ПІДХІД «ЛИСТКІВ» В ГУРТКОВІЙ РОБОТІ
З УЧНЯМИ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

Пихтар М.П.
викладач Славутицької філії НТУУ «КПІ»,
учитель математики Славутицького ліцею

Стаття присвячена проблемі підбору задач для учнів – членів МАН при вивченні матеріалу в гуртковій роботі секції математики. Як один з шляхів вирішення вищевказаної проблеми пропонується використання простого прийому – підхід «листків».

Статья посвящена проблеме подбора задач для учащихся – членов МАН при изучении материала в кружковой работе по секции математики. Как один из путей решения вышеуказанной проблемы предлагается использование простого приема – подход «листков».

The article is devoted to problem of items selection for pupils, that are members of the Small Academy of Sciences, during their working in the section of mathematics. As one of the ways to solve the above problems is proposed to use simple device - "sheets"approach.

При дослідженні проблеми дуже важливим є не тільки результат, відповідь до задачі, а й знайдений при розв'язанні метод, завдяки якому часто вдається розв'язати багато інших задач. При правильному підході накопичені результати та методи об'єднуються в єдине ціле – нову математичну теорію. Отримуємо, таким чином, ланцюг розвитку реального дослідження: ЗАДАЧА – РОЗВ'ЯЗАННЯ – МЕТОД – ТЕОРІЯ – ЗАСТОСУВАННЯ.

Традиційно перед учнями рідко одразу ставлять нову задачу з невідомим методом розв'язання, а ще рідше просять учня самого ставити нову задачу. Вивчати матеріал можна в двох протилежних напрямках: від теорії та від задач, кожен з яких має свої переваги і недоліки. Відокремленим є підхід – «*листків*», при якому керівник гуртка не пояснює теоретичного матеріалу (або пояснює певній частині), а учень (або інша частина) вивчає тему, самостійно розв'язуючи дану послідовність задач, спеціально сформульованих і упорядкованих керівником.

Наведемо приклад такого «листка», який було складено автором для гурткової роботи з кандидатами МАН за темою «Многочлен та його корені».

Листок із теми «Многочлен та його корені»

Означення. Многочленом степеня n від змінної x будемо називати вираз виду $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$, де $n\in N_0, a_n\neq 0, a_{n-1},\ldots,a_0$ – будь-які числа.

Многочлен нульового степеня є многочленом-константою, тобто $P(x)\equiv C$. Будемо також вважати многочленом константу, яка рівна нулю, такий многочлен будемо називати нуль-многочленом (нуль-многочлен не має степеня, на відміну від інших многочленів).

Терміни і позначення:

1) Многочлени від змінної x будемо позначати символами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ і т. д.

2) Степінь многочлена $P(x)$ позначимо так: $\deg(P)$.

3) Числа $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ будемо називати коефіцієнтами многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, a_n – старшим коефіцієнтом, a_0 – вільним членом.

4) Нехай $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ – даний многочлен і x_0 –деяке число, тоді $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \dots + a_1 x_0 + a_0$ називається значенням многочлена $P(x)$ при $x = x_0$.

Означення. Число x_0 називається коренем многочлена $P(x)$, якщо при $x = x_0$ значення $P(x_0) = 0$.

5) Многочлени $\mathrm{P}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n\text{-}1} + \dots + a_{n\text{-}1}x + a_n$, $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m\text{-}1} + \dots + b_m$ вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли $m = n$ і коефіцієнти многочленів відповідно рівні, тобто $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_m$.

Зауважимо, що коли $P(x)$ і $Q(x)$ рівні многочлени, то для довільного числа $c \in R$ їхні значення при $x = c$ збігаються. Має місце і обернене твердження: якщо для довільного числа c виконується рівність $P(c) = Q(c)$, то $P(x) = Q(x)$.

Вправи для колективного обговорення. (Цикл опорних задач)

<u>Теорема Безу</u>. Остача від ділення будь-якого многочлена $P(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$ дорівнює значенню многочлена $P(x)$ при $x = \alpha$.

Доведення. Нехай $P(x)$ – многочлен-ділене, а $Q(x) = x - \alpha$ – дільник, тоді остача $R(x)$ або многочлен нульового степеня або нуль, тобто $R(x) = C (C = const)$ і тоді $R(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + R(x)$, звідси $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + R(\alpha)$, $P(\alpha) = R$.

Наслідки:

1. $P(x) \vdots (x - \alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$, тобто $x = \alpha$ – корінь $P(x)$.

2. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ – різні корені многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots ((x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n))$.

Доведення. Доведемо методом математичної індукції:

1) при $n = 1$ – твердження вірне.

2) нехай воно вірне для $n = k$ різних коренів, доведемо його для $n = k + 1$ різних коренів. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ – різні корені многочлена $P(x)$, тоді за припущенням: $P(x) \vdots ((x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k))$, тобто існує $Q(x)$ такий, що $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k) \cdot Q(x)$. Підставимо $x = \alpha_{k+1}$, отримаємо: $(*) P(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1) \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot Q(\alpha_{k+1}) = 0$, бо $P(\alpha_{k+1}) = 0$.

І оскільки $\alpha_{k+1} \neq \alpha_i (i=\overline{1,n})$, то $Q(\alpha_{k+1})=0$, звідси $Q(x)\vdots(x-\alpha_{k+1})$, тобто $Q(x)=(x-\alpha_{k+1})\cdot S(x)$ і $P(x)=\underbrace{(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)\cdot(x-\alpha_{k+1})}_{T(x)}\cdot S(x) \Rightarrow P(x)\vdots T(x)$.

3. Число різних коренів многочлена, відмінного від нуля, не більше, ніж його степінь.

Доведення. Нехай $P(x)\neq 0$ і $\deg P=n$. Припустимо, що $P(x)$ має $(n+1)$ різних коренів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$, тоді за наслідком 2 отримаємо $P(x)\vdots(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})$, що неможливо, оскільки степінь дільника не може бути більшим за степінь діленого.

Теорема (критерій Ейзенштейна): Якщо для даного многочлена $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ з цілими коефіцієнтами a_i $(i=\overline{0,n})$ виконуються умови:

1) $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}$ діляться на деяке просте число *p*;

2) a_0 не ділиться на p^2;

3) a_n не ділиться на *p*, то даний многочлен $P(x)$ є незвітним над полем *Q*.

Наприклад, многочлен $P(x)=x^4-2x^3-4x^4+2x-6$ є незвітним над *Q*, бо при $p=2$, $a_3=-2, a_2=-4, a_1=2, a_0=-6$ – діляться на 2, $a_0=-6$ не ділиться на 2^2, $a_4=1$ не ділиться на 2.

Складіть доповідь про доведення цієї теореми і вкажіть джерело прочитаного.

Теорема: Якщо кубічний многочлен степеня $P(x)$ з раціональними коефіцієнтами не має раціональних коренів, то $P(x)$ – незвітний над полем *Q*.

Теорема (Вієта): Якщо $x_1, x_2 .. x_n$ – корені многочлена $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2..x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

1. Доведіть, що якщо x_0 – корінь многочлена $P(x)$, то $P(x)$ ділиться на $(x-x_0)$.

2. Доведіть теорему Безу: остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $(x-a)$ рівна значенню многочлена $P(x)$ при $x=a$.

3. Доведіть, що якщо многочлен P ділиться на многочлен Q, то всі корені Q є коренями P. Чи вірне обернене твердження?

4. Доведіть, що многочлен степеня n має не більше n коренів.

5. а) Доведіть, що для будь-яких $a_0, \dots, a_{n-1}$ існує таке число C, що при всіх $x > C$ вірна нерівність $x^n > a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$.

б) Доведіть, що будь-яких $a_0, \dots, a_{n-1}$ многочлен непарного степеня має дійсний корінь.

6. (теорема Вієта)

а) Нехай квадратний тричлен $a(x) = x^2 + px + q$ розкладається на лінійні множники: $a(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Доведіть формули Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

б) Нехай кубічний чотиричлен $b(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ розкладається на лінійні множники: $b(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Доведіть, що $x_1 + x_2 + x_3 = -p,$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q,\quad x_1x_2x_3 = -r$.

в*) Виведіть аналогічні формули для многочлена довільного степеня, що розкладається на лінійні множники.

7. Нехай многочлен P такий, що для всіх x $P(x) = P(-x)$. Чи може P містити непарні степені x?

8. Нехай значення многочленів P і Q співпадають при n різних значеннях змінної, і степені цих многочленів менші n. Доведіть, що тоді $P = Q$.

9. Доведіть, що для будь-яких різних чисел $a_1, \dots, a_n$ і для будь-яких чисел $b_1, \dots, b_n$ існує єдиний многочлен $P(x)$ степеня менше n такий, що $P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n$ (цей многочлен називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

10. 1). Знайдіть суми всіх коефіцієнтів многочлена: а) $(x-1)^{1000}$, б) $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \dots (x+2010)$, в) $P(x) = \left(5x^2 + x - 6\right)^{100} + \left(6x^2 + x - 6\right)^{101}$.

2). Доведіть, що:

а) сума всіх коефіцієнтів многочлена $P(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$ обчислюється за формулою $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = P(1)$;

б) сума коефіцієнтів многочлена $P(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$, що стоять при парних (непарних) степенях x обчислюється за формулою: $\dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$ $\left(\dfrac{P(1) + P(-1)}{2}\right)$.

11. Якщо многочлен $P(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$ з цілими коефіцієнтами і $a,b\in Z$, то $(P(a)-P(b))\vdots(a-b)$. Доведіть це.

12. При діленні многочлена $P(x)$ на $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ остачі відповідно рівні 3, 15, 0. Яку остачу отримаємо при діленні цього многочлена на x^3-2x^2+2?

13. а) Нехай $f(x)=2x^2-1$. Розв'язати рівняння $f_n(x)=x$.

б) Нехай $f(x)=4x^3-3x$. Розв'язати рівняння $f_n(x)=x$.

в) Чи існує такий многочлен $f(x)$ другого степеня, що для будь-якого $n\in N$ рівняння $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n\ раз}=0$, має рівно 2^n розв'язки?

14. Нехай $P(x)$ – многочлен такий, що для кожного многочленна $Q(x)$ має місце функціональне співвідношення: $P(Q(x))=Q(P(x))$. Знайти $P(x)$.

15. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ такі, щоб рівність $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ виконувалася для всіх x, y.

16. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, відмінними від константи, такі, що для довільного $x\in R$ виконується рівність: $f(\sin x+\cos x)=f(\sin x)+f(\cos x)$.

17. Нехай $P(x)$ – а) квадратний тричлен; б) многочлен парного степеня з невід'ємними коефіцієнтами. Доведіть нерівність: $(P(xy))^2\le P(x^2)P(y^2)\ \forall x,y\in R$.

Запрошуємо до розгляду пошуково-дослідницьких задач

Нехай $n>2, n$ є N. Розглянемо множини M усіх многочленів виду $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+1$ з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину S множини M ви зможете визначити (охарактеризувати), щоб $\min\limits_{P\in S}(a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2)=\dfrac{4}{n-1}$?

Пропонуємо таку схему:

1). Аналіз структури задачі. Вираз, який потрібно отримати, складається, щонайменше, з суми квадратів коефіцієнтів заданого многочленна. Найбільш логічно його порівняти із сумою коефіцієнтів цього многочленна, оскільки така сума дорівнює $P(1)$.

2). Перетворення виразу. Для подальших досліджень представимо даний вираз у вигляді $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2=\left(\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2}{n-1}}\right)^2(n-1)$.

3). Підхід до дослідження. Скористаємося відомою нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним для невід'ємних величин, а також особливостями абсолютних величин.

4). Розв'язання задачі.

Оскільки $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \dfrac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \dfrac{|a_1+\ldots+a_{n-1}|}{n-1} = \dfrac{|P(1)-2|}{n-1}$, то $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \dfrac{(P(1)-2)^2}{n-1}$. Отже, якщо $P(1)=0$ або $P(1)=4$, то $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \dfrac{4}{n-1}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі a_i рівні між собою і дорівнюють $\pm\dfrac{2}{n-1}$.

5). Відповідь. Шуканою підмножиною S є, наприклад, множина всіх вказаних многочленів, для яких $P(1)=0$ або $P(1)=4$.

6). Узагальнення. Міркуючи аналогічно, отримаємо нерівність $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \dfrac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \dfrac{\left|-\mathrm{a}_1+a_2-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\right|}{n-1}$. Звідси при парному *n* будемо мати $a_1^2+\ldots+a_{n\text{-}1}^2 \geq \dfrac{(P(-1)-2)^2}{n-1}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі $|a_i|$ рівні між собою і дорівнюють $\dfrac{2}{n-1}$, а знаки коефіцієнтів a_i чергуються. Таким чином, до знайденої вище підмножини S можна додати ще й многочлени, для яких $P(-1)=0$ або $P(-1)=4$. Якщо ж *n* парне, то при тих самих умовах отримуємо нерівність $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \dfrac{(P(-1))^2}{n-1}$. У такому випадку до S додаються многочлени, для яких $P(-1)=\pm 2$.

Відзначимо ще й такий можливий напрям узагальнення даної задачі як виділення підмножини S, для якої $\min\limits_{P\in S}\left(|a_1|^k+\ldots+|a_{n-1}|^k\right)=\dfrac{a^k}{(n-1)^{k-1}}$, де $a>0$, $k-$ довільне дійсне число, більше одиниці. Скориставшись нерівністю $\left(\dfrac{|a_1|^k+\ldots+|a_{n-1}|^k}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \dfrac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \dfrac{|a_1+..a_{n-1}|}{n-1}$ між середнім степеневим і середнім арифметичним, легко отримати, міркуючи аналогічно, що у ролі *S* можна взяти множину заданих многочленів, для яких $P(-1)=a\pm 2$. Зокрема, при $k=2,\ a=2$ одержуємо дану задачу.

Зауважимо, що окремо для парних та непарних n множину S легко розширити за рахунок многочленів, для яких відповідно $P(-1) = a \pm 2$ чи $P(-1) = \pm a$.

7). Висновок. Запропонований нами підхід до дослідження виявився вдалим, оскільки ми змогли виділити достатньо об'ємну підмножину S. Більше того, цією ж ідеєю ми змогли скористатися для розв'язування більш загальної задачі. Цікаво відзначити, що при цьому значення $P(1)$ виявилися незалежними від числа k. Крім того, маючи додаткову інформацію про n, виділену підмножину S ми змогли суттєво розширити. Цікаво, що і тут вибір значень $P(1)$ також не залежить від k.

18. Дано многочлен P з а) натуральними; б) цілими коефіцієнтами. Для кожного натурального числа n позначимо суму цифр десяткового запису числа $|P(n)|$ через a_n. Доведіть існування числа, яке зустрічається в послідовності $a_1, a_2, a_3, \ldots$ нескінченно багато разів.

19. Розглянемо послідовність многочленів $P_0, P_1, P_2, \ldots$, заданих формулами $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ і $P_{n+1} = x \cdot P_n(x) - P_n(x) - P_{n-1}(x)$ для будь-якого натурального x.

Доведіть рівності:

а) $$x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ldots \frac{1}{x}}}} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}$$, де в лівій частині n букв x;

б) $\dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = P_n(2\cos\varphi)$, якщо $\dfrac{\varphi}{\pi}$ не ціле;

в) $t^{n+1} - \dfrac{1}{t^{n+1}} = (t - \dfrac{1}{t})P_n(t + \dfrac{1}{t})$, якщо $t \neq 0$; г) $P_n(x) = \prod\limits_{1 \le k \le n} (x - 2\cos\dfrac{\pi k}{n+1})$;

д) $P_n(x) = \sum\limits_{0 \le k \le \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_{n-k}^k \cdot x^{n-2k}$; е) $\prod\limits_{1 \le k \le n} \cos\dfrac{\pi k}{2n+1} = \dfrac{1}{2^n}$.

є) Придумайте аналогічну рівність для послідовності многочленів, яка визначена таким же рекурентним співвідношенням, але яка починається не з многочленів 1 і x, а з многочленів 2 і x.

20. Нехай дано многочлен $f(x) = x^3 - x + 1$. Доведіть, що $\forall m \in N(m > 1)$ числа $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ попарно взаємно прості.

21. Чи існує натуральне число $k > 1$ і такий відмінний від константи многочлен P з цілими коефіцієнтами, що кожні два з чисел $P(k),\ P(k^2),\ P(k^3), \ldots$ взаємно прості?

22. Побудуйте многочлен з раціональними коефіцієнтами, мінімальне значення якого дорівнює: а) $-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) доведіть, що не існує многочлена 4-го степеня, який

задовольняв би умові пункту б); г) чи існують многочлени з цілими коефіцієнтами, один з яких задовольняє умові пункту а), а інший – умові пункту б)?

23. Знайдіть многочлен з цілими коефіцієнтами а) 4-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$; б) 5-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$; в) доведіть існування многочлена з цілими коефіцієнтами n-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$; г) доведіть або спростуйте твердження: число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами.

24. а) Всі коефіцієнти многочлена P цілі, причому $P(x) > x$ для будь-якого додатного числа x. Розглянемо послідовність, задану формулами $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1}) \forall n \in N$. Доведіть рівність: $НСД(a_m, a_n) = a_{НСД(m,n)}$ $\forall m \in N, n \in N$.

б) Доведіть аналогічну рівність для послідовності Фібоначчі, що задається рівностями $\varphi_1 = \varphi_2$ і $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n \forall n \in N$.

25. Позначимо через $T_k(n)$ суму добутків по k чисел від 1 до n. Наприклад, $T_2(4) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4$.

а) Знайдіть формули для $T_2(n)$ і $T_3(n)$.

б) Доведіть, що $T_k(n)$ є многочленом від n степеня $2k$.

в) Вкажіть метод знаходження многочленів $T_k(n)$ при $k = 2, 3, 4, \ldots$ та використайте його для знаходження многочленів $T_3(n)$ і $T_4(n)$.

Запрошуємо до розгляду відкритих проблем.

Цікаву проблему про значення многочленів запропанували О. Г. Кукуш та Р. П. Ушаков: Зафіксуємо натуральне число $m \geq 2$.

Означення. Многочлен $P_m(x)$ з цілими коефіцієнтами називається m-подільним, якщо при будь-якому цілому k число $P_m(k)$ ділиться на m без остачі.

Приклад. $P_2(x) = x^2 - x$, $P_3(x) = x^3 - x$, $P_5(x) = x^5 - x$. Многочлен x^2 є також 6-подільним, а многочлен $Q(x) = (x^2-1)(x^2+2x)$ є m-подільним при $m = 4$ та $m = 8$. Легко бачити, що при будь-якому $m \geq 2$ многочлен $R(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+m)$ є m-подільним.

Теорема. Нехай є m – просте число, тоді $P(x) = x^m - x$ є m-подільним.

Доведення. Якщо $k = ml$, $l \in Z$, то $P(k) = k(k^{m-1}-1) = ml(k^{m-1}-1)$, ділиться на m. Якщо ж $k \neq ml$, $l \in Z$, то числа k та m взаємно прості і згідно з малою теоремою Ферма $k^{\varphi(m)} - 1$ ділиться на m. Тут $\varphi(m)$ – це функція Ейлера, вона дорівнює кількості натуральних чисел, менших за m та взаємно простих з ним. Для простого m $\varphi(m) = m-1$. Тому при $k \neq ml$ $P(k) = k(k^{m-1}-1) = k(k^{\varphi(m)}-1) \vdots m$.

Пропонується проблема: *для довільного натурального* $m \geq 2$ *якомога точніше оцінити зверху та знизу найменший степінь m-подільного многочлена з взаємно простими коефіцієнтами* (цілі числа $a_0, a_1, \ldots, a_m$ називаються взаємно простими, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1).

Зокрема можна довести, що для простого числа m цей степінь рівний m.

Література для початкового ознайомлення з темою:

1. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 352с.

2. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс – [3-е изд.] – М.: МЦНМО, 2001. – 586 с.

3. Вибрані питання елементарної математики / За редакцією А. В. Скорохода. «Вища школа», 1982. – 456с.

4. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – [2-е изд., испр.]. – М.: Наука, 1975. – 463 с.

Література, рекомендована для фахової підготовки:

1. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв‘язання / В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів: Євросвіт, 1999. – 128 с.

2. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра і теорія чисел. – Ч. 2. – К.: Вища школа, 1980. – 408 с.

3. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. – М.: АПН РСФСР, 1949.

4. Пойа Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 / Г. Пойа, Г. Сеге. – М.: Наука, 1978. – 392с., 432с.

Листок із завданнями при цьому має обов’язково містити наступні положення:

–основні мінімальні теоретичні питання, яких достатньо буде для розв’язання циклу запропонованих задач, або достатньо, щоб здобути нові невідомі факти самостійно завдяки поставленим задачам;

–завдання для колективного розв’язування;

–завдання пошукового і дослідницького характеру;

–нерозв’язані задачі і відкриті проблеми та гіпотези даної теми;

–література, за допомогою якої можна збагатити знання з розглядуваної теми.

Вивчаючи «від теорії», ми виховуємо користувача науки, який успішно може використовувати відомі методи в різних ситуаціях. Вивчаючи «від задач» – виховуємо творця науки, здатного знаходити нові методи та ставити нові задачі. Отже, для дітей, обдарованих з математики, з’являється нова можливість – поглиблюватися не за рахунок пасивного вивчення більш складної теорії, а за рахунок активної самостійної роботи при вивченні того ж матеріалу. Зрозуміло, що навчання «від задач» має більш індивідуальний підхід, у порівнянні з навчанням «від теорії», а тому на заняттях гуртка МАН можливі тільки деякі елементи такого навчання. Такого роду різні форми організації пізнавальної діяльності дають широку можливість диференціації навчально-дослідницької діяльності та систематичності її здійснення.

Система «листків» неодмінно впливатиме позитивно на розвиток у школярів:

–самостійного мислення;

–критичного ставлення до навколишнього;

–логіки та математичної культури;

–уміння читати спеціальну літературу.

Звісно тут присутня і зворотна сторона, бо така система:

–забирає багато часу в школярів та у викладачів;

–вимагає безперервної роботи зі складання листків.

Сам «листок» із завданнями має відображати той колектив, для якого він написаний, а тому часто доповнюється чи переробляється. Аудиторією визначається глибина проникнення темою, а тому послідовність і кількість задач та рівень їх складності переорієнтовується.

Список використаної літератури

1. Український математичний журнал «У світі математики». Київ:«ТВіМС» – Т. 7. – Вип. 1, 2001. – С. 12; – Т. 1. – Вип. 2, 1995. – С. 43; – Т. 7. – Вип. 4, 2001. – С. 25–26; – Т. 1. – Вип. 1, 1995. – С. 61; – Т. 4. – Вип. 1, 1998. – С. 11.
2. *Пихтар М. П.* Розвиток математичних та дослідницьких здібностей учнів у рамках Малої академії наук / М. П. Пихтар // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 24–28.