ПРОФЕСІЙНА ПІДГОТОВКА СТУДЕНТІВ ЗАСОБАМИ ПІЗНАВАЛЬНО-ВІЗУАЛЬНОГО НАВЧАННЯ АЗАМ ПОЗИЦІЙНОЇ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Ленчук І.Г.,
кандидат технічних наук,
ЖДУ імені Івана Франка,
Михайленко В.Є.,
доктор технічних наук, професор,
Київський Національний університет будівництва та архітектури

Пропонується викладачам геометрії, методистам університетів, учителям математики ЗОШ погодитися, що важлива позиційна задача на перетин тіла площиною розв'язується виключно методом внутрішнього проекціювання, а метод слідів (взаємно однозначної відповідності) є лише його особливим частинним випадком.

Предлагается преподавателям геометрии, методистам университетов, учителям математики общеобразовательных школ согласиться, что важная позиционная задача на пересечение тела плоскостью решается исключительно методом внутреннего проецирования, а метод следов (взаимно однозначного соответствия) является лишь его особым частным случаем.

We propose to teachers of geometry, methodists of universities, teachers of mathematics of secondary schools to agree, that the important position problem about the intersection of the body by plane, that is solved solely by the internal projection, and the trace method (one-to-one correspondence) is only its special case.

Постановка проблеми. Сьогодні досить важко безпомилково назвати дату та прізвище особи, з чиєї „легкої руки" в часи формування методологічної системи поглядів у конструктивній стереометрії започатковано в обіг назви двох нібито різних прийомів побудови перерізів тіл площиною загального розташування, як-от: „Метод внутрішнього проекціювання" та „Метод слідів". Очевидно, що така , не зовсім виважена ідіома диференціації методів, була зумисне озвучена з єдиною метою, щоб в якості особливого елемента конструкції категорично вирізнити із загальногеометричної схеми закономірних побудовних дій слід січної площини на площині основи тіла, котрий деінде допомагає – пришвидшує та оптимізує процес вирішення важливої позиційної задачі. Прикро, але не всі поважні інтерпретатори й оповідачі можливих рисункових варіацій на цю тему змістовно строго сприйняли привнесений фразеологізм. Які понятійні підвалини кожного з методів? Що спільного і чим вони відрізняються?

Аналіз останніх досліджень. Не секрет, що в переважній більшості навчальних посібників і, навіть, підручників, адресованих учителеві чи учневі, де висвітлюються питання образно-наочного представлення позиційних задач, немає належної уваги до їх геометричного тлумачення. Оцінюючи наявну педагогічну ситуацію словами вітчизняних геометрів-методистів В. Є. Михайленка та І.Ф. Тесленка, висловлених на адресу дещо інших конструктивних реалій, констатуємо: *„В них часто переважає рецептура того „як робити?", а питання „чому?" залишається відкритим"* ([1], с. 18).

Приміром, у діючому підручнику для ЗОШ ([2], пп. 41,48) подається лише метод слідів, й той у примітивному трактуванні, далекому від наукового. Чомусь без ґрунтовних пояснень, за принципом „роби як я” чи „як показано на малюнку”(?), коротко описується варіант відшукання перетинів із січною площиною граней багатогранника, й тільки.

У класичній, загалом змістовній, якісній книзі „Методика викладання стереометрії”, виданій колективом відомих освітян за редакцією О. М. Астряба і О.С. Дубинчук, говориться: „Існує **два** способи розв’язання задачі на перерізи на проекційному рисунку: 1) спосіб *відповідності*, 2) спосіб *слідів*”. Щоб глибше осягнути перший із них, відразу ж додаються посутні пояснення: „Спосіб відповідності ґрунтується на взаємно однозначній відповідності точок шуканого перерізу і точок нижньої основи багатогранника ” ([3], с. 208). Потім окремо виписано зауваження: „Цей метод краще називати методом внутрішнього проекціювання, але в умовах шкільної роботи його краще називати методом відповідності, бо цей термін зрозуміліший учням” ([3], с. 209). Мимоволі з’являються небезпідставні сумніви стосовно еквівалентності назв методу, окрім того, варто посперечатися із приводу кращого чи гіршого розуміння кожного терміну учнями.

Не оригінальні в зазначеному сенсі й навчальні посібники, видані на допомогу вчителю значно пізніше – в 90-ті рр. минулого століття [4,5]. Той самий підхід, ті ж принципи, хоч і корисних прикладів для справи здобуття графічних навичок у побудові перерізів тіл площиною (навіть, циліндра і конуса) значно більше.

Основна частина. Ми глибоко переконані, що мовчазно-компромісний стан речей з дивними, на наш погляд, недомовками в навчанні конструктивній стереометрії помилковий, а традиційні установки на подання учням підвалин позиційних перетворень на проекційному кресленні недосконалі, місцями алогічні, й тому – неправильні.

Тож найперше з’ясуємо, яке походження терміну „внутрішнє проекціювання за напрямом бічних ребер”?, яка його природа? Вчителю математики це конче потрібно знати, тим паче, що справжні знання першопредмету приходять через його розуміння.

Нехай площина $\boldsymbol{\Pi}$ (рис. 1) є картинною площиною (дошка, зошит), а a – напрямом проекціювання ($a \nparallel \boldsymbol{\Pi}$). Візьмемо трійку найпростіших об’єктів геометрії: точку A', пряму p' і площину $\boldsymbol{\Sigma'}$, загально розташовані відносно визначеної площини проекцій $\boldsymbol{\Pi}$. Спроекціюємо A', p' і $\boldsymbol{\Sigma'}$ на площину $\boldsymbol{\Pi}$ за напрямом a. В результаті одержимо їх паралельні проекції A, p і $\boldsymbol{\Sigma}$ відповідно. Тепер, не без задуму, абстрагуємося в думці від оригіналу, тобто уявимо собі лише картинну площину $\boldsymbol{\Pi}$ із зображеними на ній точкою, прямою і площиною. Чи можна за цим кресленням з’ясувати взаємне розташування у просторі перерахованих геометричних об’єктів? Безумовно, що ні! Єдине, що можна стверджувати категорично, то це, що точка A' не належить прямій p' ([2], § 2, п. 13). На запитання „Як взаємно розташовані точка і площина, пряма і площина?”, або (знаючи напевне, що пряма не паралельна площині) “Як установити точку перетину прямої і площини?”, дати однозначну відповідь неможливо, оскільки такі зображення найпростіших геометричних фігур на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ об’єктивно не вміщують у собі відповідної інформації, тобто вони є позиційно невизначеними.

Подолати невизначеність, дійти позиційної злагоди на проекційному кресленні можна наступним прийомом. Побудуємо спочатку паралельні проекції точки A' і прямої p' ($B'C'$) на площину $\boldsymbol{\Sigma}'$ ($K'L'M'$) за деяким напрямом a', не паралельним $\boldsymbol{\Sigma}'$, а потім спроекціюємо одержану просторову модель на площину зображень $\boldsymbol{\Pi}$ за напрямом a, тобто виконаємо не одне, а **два** упорядковані проекціювання (рис. 2). Матимемо уявлювану конструкцію, в якій точка, пряма і площина вже не будуть окремо взятими геометричними об'єктами, довільно розташованими у просторі, а такими, що жорстко пов'язані між собою певною стереометричною фігурою, в нашому конкретному випадку – призмою. Нижня основа трикутної призми – трикутник $A'_1B'_1C'_1$ – належить площині $\boldsymbol{\Sigma}'$, верхня основа паралельна нижній, її розташування у просторі не суть важливо, а бічні ребра $A'A'_1$, $B'B'_1$ і $C'C'_1$ є проекціювальними прямими на $\boldsymbol{\Sigma}'$ за напрямом a'. До речі, такий зв'язок між точкою, прямою і площиною можна принагідно встановити не лише через паралельне проекціювання за визначеним напрямом a', а й за допомогою центрального проекціювання з визначеним центром проекцій S' (рис. 3). У цьому випадку пов'язуючою стереометричною фігурою буде вже піраміда $S'A'_1B'_1C'_1$.

Тепер на площині креслення $\boldsymbol{\Pi}$ матимемо таке зображення призми (піраміди), на якому кожна вершина (точка) багатогранника визначається не тільки зображенням самої точки ($A'\to A$, $B'\to B$, $C'\to C$), а й зображенням її проекції на площину $\boldsymbol{\Sigma}'$ ($A'_1\to A_1$, $B'_1\to B_1$, $C'_1\to C_1$). Інакше кажучи, на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ побудовано не лише зображення точки A', прямої p' і площини $\boldsymbol{\Sigma}'$, а також зображення їх проекцій на $\boldsymbol{\Sigma}'$ ($\boldsymbol{\Sigma}'_1\equiv\boldsymbol{\Sigma}'$) разом із апаратом первісного паралельного (чи центрального) проекціювання. Очевидно, що в цьому останньому варіанті позиційна поінформованість про задані найпростіші фігури помітно зросла.

Отож, за введених умовностей, точка на площині проекцій $\boldsymbol{\Pi}$ визначатиметься своїм власним зображенням і зображенням своєї ж проекції на деяку площину $\boldsymbol{\Sigma}'$. Тут точку A_1, приміром, називають ***вторинною проекцією точки*** A', адже A' спочатку проекціюють визначеним методом на площину $\boldsymbol{\Sigma}'$ у точку A'_1, а потім останню паралельним проекціюванням – на площину $\boldsymbol{\Pi}$ в точку A_1. Проекціювання на площину $\boldsymbol{\Sigma}'$, що в динаміці дії є першим, називають ***внутрішнім***, оскільки воно виконується "всередині" – паралельно ребрам (твірним) призми чи циліндра або з вершини піраміди чи конуса. Внутрішнє проекціювання може бути або паралельним (циліндричним), або центральним (конічним). Інше ж проекціювання (друге в упорядкованій парі), тепер вже на площину проекцій $\boldsymbol{\Pi}$, називають ***зовнішнім***. Воно, відповідно до вибору методу зображень в шкільних реаліях, завжди є виключно паралельним. При цьому площину $\boldsymbol{\Sigma}$ на зображенні називають ***основною площиною***, оскільки вона є паралельною проекцією площини основи $\boldsymbol{\Sigma}'$ певної пов'язуючої стереометричної фігури, а точки A_1, B_1, C_1 – ***основами точок*** A, B, C відповідно. Нарешті, відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, що зображають на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ промені внутрішнього проекціювання $A'A'_1, B'B'_1, C'C'_1$ відповідно, називають, за термінологією М. Ф. Четверухіна, *"**шпицями**"*.

Таким чином, *будь–яка точка простору вважається заданою на проекційному кресленні, якщо на ньому зображено точку і її паралельну (центральну) проекцію на основну площину (основу). У свою чергу, якщо на кресленні кожна точка стереометричної фігури є заданою, то зображення такої фігури називається* **позиційно визначеним** *або* **повним.** Іншими словами, ***зображення просторової фігури є повним, якщо всі її елементи задані***.

Отже, нами щойно доказово й вичерпно з'ясовано геометричну суть методу зображень просторових фігур за допомогою упорядкованого ***внутрішньо-зовнішнього*** **проекціювання,** що за певних суб'єктивних умов може забезпечити вірність зображень, наочність розміщення цих фігур на картинній площині, а також сприятиме виконанню ефективних (однак, дещо обмежених за змістом) побудов на готовому проекційному кресленні.

Напевне, що *повні зображення цілком характеризують об'єкт позиційно. За ними можна зробити висновок про розміщення його окремих елементів відносно інших. На них можна шукати і знаходити спільні елементи (інциденції) двох заданих на кресленні геометричних фігур, тобто – розв'язувати позиційні задачі*.

Тож уявляючи в динаміці процес формування на картинній площині якісного зображення стереометричного тіла, учень пізнає природу ***методу внутрішнього проекціювання*** "за напрямом бічних ребер". Тепер уже немає сумнівів, що метод внутрішнього проекціювання в геометрії не є надуманим, тому його слід сприймати як органічно невід'ємну складову переважної більшості побудовних операцій. Зрозуміло, що конус (піраміда), циліндр (призма) і куля, зображені на дошці (в зошиті) звичним прийомом із дотриманням указаних вимог, позиційно визначені й на них можна саме методом внутрішнього проекціювання побудовно строго розв'язати будь-яку задачу на інциденції, зокрема – на перерізи стереометричних тіл площиною, що досить часто трапляється в обчислювальних задачах ЗОШ.

Натомість зараз підійдемо до охарактеризування складових розглядуваного питання дещо з іншого боку, з інших теоретичних засад, уявлювано строго опрацьованих видатним російським геометром М. Ф. Четверухіним. Додамо якомога стисло і містко переказ основ ключового дійства в геометрії – проекціювання [6].

Нехай нам задано у площині $\boldsymbol{\Sigma}_1$ (рис. 4, *а*) деяку плоску фігуру Φ_1, наприклад, трикутник $A_1B_1C_1$. Припустимо, що його потрібно спроекціювати з точки S (центр проекції) на площину $\boldsymbol{\Sigma}$ (площина проекцій чи зображень). Це роблять наступним чином. Кожну вершину трикутника A_1, B_1, C_1 сполучають із центром S і знаходять точки перетину A, B, C проекціювальних прямих SA_1, SB_1, SC_1 із площиною зображень $\boldsymbol{\Sigma}$. Трикутник ABC називають **центральною проекцією** або **перспективою** трикутника-оригінала $A_1B_1C_1$.

Так, загалом, кожній точці площини $\boldsymbol{\Sigma}_1$ можна поставити у відповідність цілком певну точку площини $\boldsymbol{\Sigma}$ і навпаки[1]. Через це говорять, що центральне проекціювання встановлює *взаємно однозначну* **відповідність** між двома плоскими точковими полями $\boldsymbol{\Sigma}_1$ і $\boldsymbol{\Sigma}$: „При цьому кожну фігуру площини $\boldsymbol{\Sigma}_1$ треба розглядати як місце точок, якому відповідає перспективна фігура – місце точок на площині $\boldsymbol{\Sigma}$ " ([6], с.21). Істотною властивістю відповідності є те, що: *всякій прямій одного плоского поля відповідає пряма іншого поля*. Справді, якщо взяти у площині $\boldsymbol{\Sigma}_1$, скажімо, пряму A_1B_1, то проекціювальні прямі SA_1 і SB_1 утворюють проекціювальну площину SA_1B_1, яка перетинає площину зображень $\boldsymbol{\Sigma}$ вздовж відповідної прямої AB. Наголосимо, що пряма перетину площин $\boldsymbol{\Sigma}_1$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ є особливою прямою в цій перспективній відповідності: *кожна точка прямої s* (див. рис.), *що розглядається як*

[1] У випадку, коли проекціювальний промінь паралельний площині Σ, вважатимемо, що він перетинає останню в нескінченно віддаленій точці.

оригінал, збігається із своєю проекцією, а отже, *вся пряма сама собі відповідає.* Ця пряма називається **віссю** перспективної відповідності двох площин.

Коли ж точку S в уявленнях віднести в нескінченність, то проекціювальні промені SA_1, SB_1, SC_1 будуть паралельні (рис. 4, *б*) деякому напряму a, непаралельному жодній із площин Σ_1 і Σ. Тут між площинами Σ_1 і Σ встановлюється перспективна відповідність особливого виду, яку називають **перспективно-афінною** (або **спорідненою**). Як і в загальному випадку, у спорідненій відповідності *будь-якій прямій площині* Σ_1 *відповідає єдина пряма площини* Σ, й *ця відповідність має своєю віссю лінію перетину s площин* Σ_1 *і* Σ, а *всі точки прямої s подвійні.* Крім цього, перспективно-афінна відповідність має ще дві особливі властивості: *зберігається паралельність прямих* і *зберігається відношення відрізків на прямій.* Цікаво, що виділені **три базові** властивості паралельного проекціювання є змістовною складовою теми „Зображення просторових фігур на площині” у стереометрії ЗОШ, там вони строго доведені ([2], п.13, с.10). Ситуаційна ж відмінність підходів до висвітлення цих властивостей полягає лише в тому, що у шкільному варіанті точки і прямі, як оригінальні об’єкти проекціювання, вибираються будь-де у просторі, а не в заздалегідь визначеній площині Σ_1, проте це суті справи не змінює.

А тепер, задля виваженого з’ясування геометричного змісту кожного з методів, посилаючись до уявлень та візуального супроводу міркувань якісними проекційними кресленнями, спробуємо оперувати виключно достовірними фактами й категоріями логіки.

Найперше зауважимо, що строго обґрунтовуючи об’єктивно природне походження терміну „внутрішнє проекціювання”, ми жодним словом не обмовилися щодо взаємно однозначної відповідності двох якихось площин. Й не дивно, адже *характеристичними пріоритетами цього уявно-динамічного дійства* в геометрії є вражаюче інші поняття та закономірності, а саме: 1). *Усяке ребро піраміди чи призми (твірна конуса чи циліндра) належить проекціювальному променю, який вироджується на площину основи тіла в точку*. 2). *Бічна поверхня піраміди чи призми (конуса чи циліндра) теж є проекціювальною й вироджується на площину основи у багатокутник (коло) основи, часткова, кожна окремо взята бічна грань багатогранника вироджується у відрізок – відповідну сторону багатокутника основи.* Таким чином, тут ми безапеляційно маємо справу виключно із проекціювальними прямими, площинами і поверхнями, вироджені проекції яких, як результат внутрішнього проекціювання, володіють так званою **збиральною властивістю**: *будь-яка точка проекціювальної прямої,* а також, *будь-яка точка, пряма чи інша фігура бічної поверхні тіла,* зокрема, *проекціювальної площини (грані багатогранника) має свою основу – проекцію за напрямом бічних ребер, розташовану відповідно на виродженій (слід-) проекції прямої або ж поверхні (площини).* Саме ця, напрочуд елементарна в уявленнях прописна істина, вкупі з поняттям „належності” точок, прямих і площин, складають достатню умову успішної графічної реалізації методу внутрішнього проекціювання на всякому позиційно визначеному проекційному кресленні, *якраз у цьому, й виняткова в цьому проявляється* ***геометрична сутність*** *методу.*

Нарешті, щоб розумом осягнути ступінь ідентичності методів внутрішнього проекціювання і слідів, вирізнити їх споріднені та розрізняльні риси і остаточно визначитися з термінологією, зумисне повернемося до рисунка 4. На ньому наочно проілюстровано січну площину Σ і площину основи багатогранника $\boldsymbol{\Sigma_1}$. Між цими площинами встановлено, як відомо, взаємно однозначну відповідність, яку у випадку **центрального** внутрішнього проекціювання краще всього задавати центром S, парою відповідних точок A і A_1 та віссю s, а у випадку **паралельного** внутрішнього проекціювання – парою відповідних точок A і A_1 та віссю s. Що ж започаткувало, спонукало з'яву такої взаємно однозначної відповідності двох площин? – звичайно ж, дія внутрішнього проекціювання! В побудові інших пар відповідних елементів цієї справді чудової відповідності (напр., B і B_1 чи C і C_1), потрібно скористатися такими двома її характеристичними властивостями: 1) *всяка пара відповідних точок належить променю внутрішнього проекціювання;* 2) *будь-яка пара відповідних прямих перетинається на осі відповідності s* (див. правило-орієнтир у три кроки, навіч відображене на рис. стрілками).

Отже, слід s площини Σ на площині $\boldsymbol{\Sigma_1}$ є лише окремим допоміжним робочим інструментом конструктивних пошуків перерізу, й тому, швидше всього, саме **метод слідів** варто перейменувати в **метод відповідності**, що звучить переконливо й більш значимо, *але в жодному разі – не* **метод внутрішнього проекціювання**, оскільки *останній охоплює, включає в себе метод слідів* (відповідності), *тобто точкова взаємно однозначна відповідність площини перерізу і площини основи тіла об'єктивно* ***індукована природою внутрішнього проекціювання*** *за напрямом бічних ребер.*

Висновки. Всім відомо, що будь-яка руйнація стереотипів – пóранка з розряду невдячних. Можливо й нам не варто було ревізувати усталені, традиційні підходи висвітлення такого, як здавалося, несуперечливого й простого в конструктивній стереометрії питання: „Перерізи тіл площиною". Однак, за тезою старовічних – „істина дорожче"! Особливо, коли справа стосується педагогічних аспектів методики навчання геометрії майбутніх учителів.

Як з'ясувалося, реально **існує єдиний природний метод** побудовного подання популярної в геометрії позиційної задачі – **метод внутрішнього проекціювання** *за напрямом бічних ребер*, назва якого відображає єство одноіменного динамічного перетворення всередині стереометричного тіла та геометричну сутність уявних і рисункових дій учня. Взаємно однозначна відповідність між точками січної площини та площини основи тіла безперечно навіч проглядається в методі, однак, лише „міжрядково", в якості цікавого результативного компоненту операції внутрішнього проекціювання, а слід січної площини, у свою чергу, є одним із визначальних елементів такої перспективної (перспективно-афінної) відповідності двох площин, який в багатьох випадках просто неможливо зобразити на проекційному кресленні, оскільки цілком можливо, що він за даними умови задачі розташовується поза межами формату дошки (зошита).

Таким чином, *метод слідів принципово немислимий у графічній реалізації без свідомого задіяння методу внутрішнього проекціювання*, й навпаки, **метод внутрішнього проекціювання цілком автономний і самодостатній**, для його застосування слід категорично необов'язковий. Іншими словами, ***метод слідів (відповідності) є лише частинним випадком методу внутрішнього проекціювання***, хоч інколи вже побудований слід на проекційному рисунку виявляється дуже ефективним посередником у вирішенні серйозних питань теорії і практики конструктивної стереометрії (див., напр., [7]).

Список використаної літератури

1. *Михайленко В.Є., Тесленко І.Ф.* Зв’язки у викладанні геометрії і креслення. – К.: Радянська школа, 1965. – 82 с.

2. *Погорєлов О.В.* Геометрія: Стереометрія. // Підручник для 10-11 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 2002. – 129 с.

3. Методика викладання стереометрії. / За ред. О.М. Астряба і О.С. Дубинчук. – К.: Радянська школа, 1956. – 280 с.

4. *Гольдберг Я.Е.* З чего начинается решение стереометрической задачи. / Пособие для учителя. – К.: Радянська школа, 1990. – 120 с.

5. *Жовнір Я.М.* Позиційні задачі в стереометрії. / Посібник для вчителя. – К.: Освіта, 1991. – 96 с.

6. *Четверухін М.Ф.* Рисунки просторових фігур у курсі геометрії. / Посібник для вчителів– К.: Радянська школа, 1953. – 188 с.

7. *Ленчук И.Г., Боравлёв А.Ф.* Построение опорных точек конических сечений на проекционно-полном чертеже Четверухина. // Сб. науч.-метод. ст. «Начертательная геометрия и инженерная графика». – М.: Из-во МПИ, 1990. – Вып. 17. – С. 112-119.

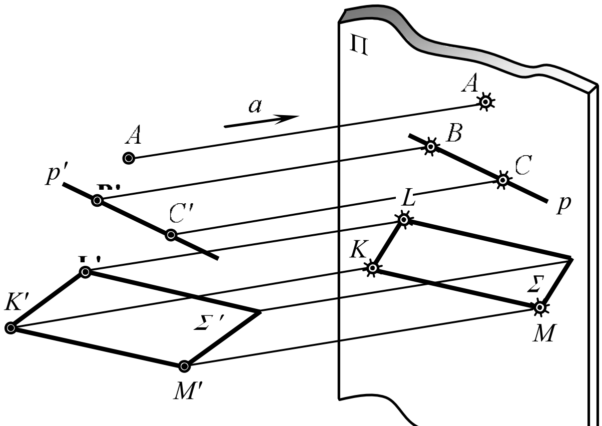

Рис. 1

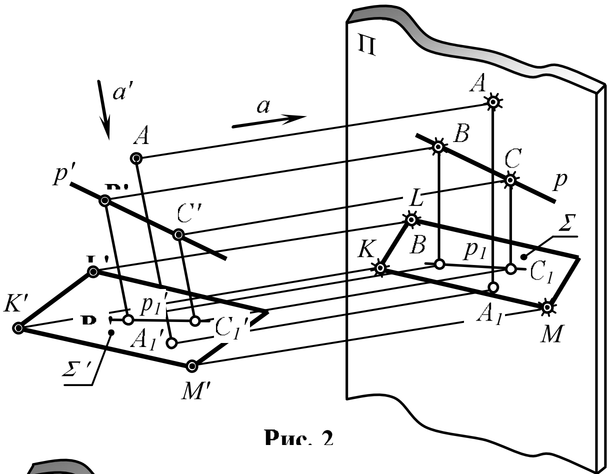

Рис. 2

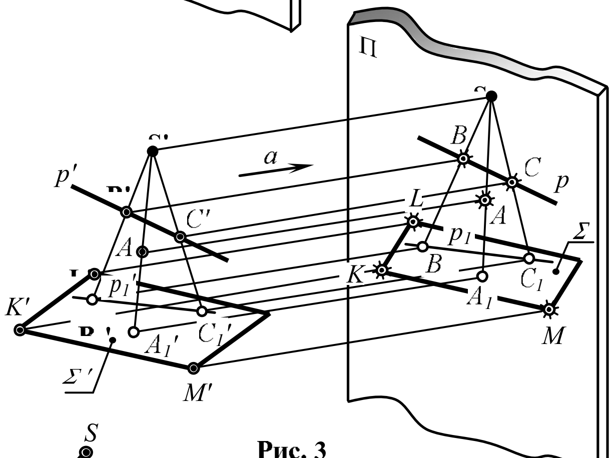

Рис. 3

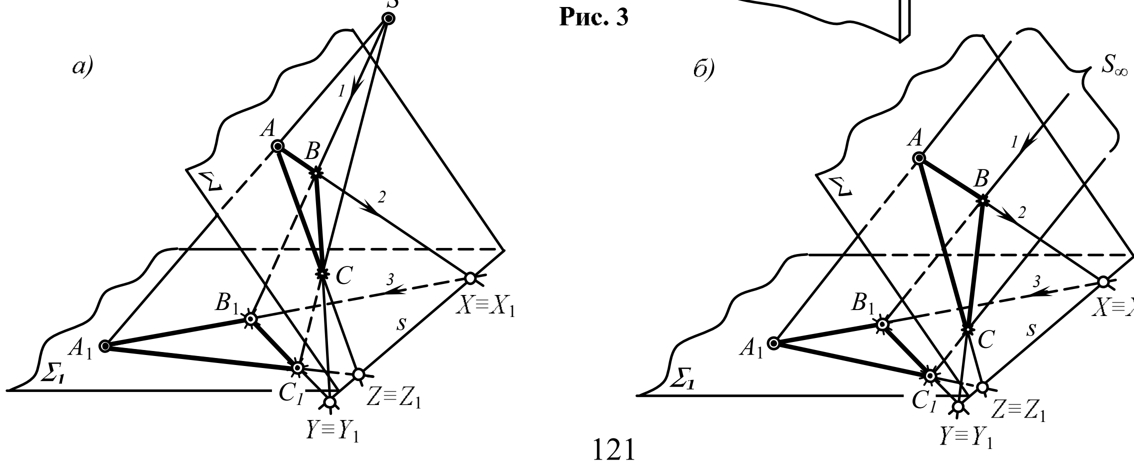

Рис. 4