ДВА УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ У КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Курченко О.О.,
доктор фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка професор
Рабець К.В.,
кандидат фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університете імені Тараса Шевченка, докторант

Стаття містить два узагальнення теореми Коші про середнє значення для диференційовних функцій та методичний аспект цих узагальнень у курсі математичного аналізу для студентів математичних факультетів класичних і педагогічних університетів.

Статья содержит два обобщения теоремы Коши о среднем значении для дифференцируемых функций и методический аспект этих обобщений в курсе математического анализа для студентов математических факультетов классических и педагогических университетов.

This article contains two generalizations of Cauchy's mean value theorem and the methodical aspect of these generalizations in the course of mathematical analysis for mathematical faculties in classical and pedagogical universities.

Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, формула Тейлора – золотий ланцюжок теорем диференціального числення функції однієї змінної класичного математичного аналізу. Вже більше століття вони входять до навчальної програми нормативного курсу математичного аналізу в університетах всього світу. У цій статті ми наводимо два маловідомих узагальнення теореми Коші. Перше узагальнення стосується відношення залишкових членів асимптотичних розвинень приростів двох функцій: чисельник і знаменник відношення нагадують формулу Тейлора. Його доведення грунтується на комбінації ідей доведення теореми Коші для диференційовних функцій та доведення формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша. Наведені приклади застосування цього узагальнення для доведення нерівностей та для доведення формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша. Друге узагальнення отримано для скінченних різниць $n-$го порядку.

Теорема 1. Нехай $m,n-$ невід'ємні цілі числа, інтервал $J\subset \mathrm{R}$, функції $f,g:J\to \mathrm{R}$ задовольняють наступні умови:

1) функція f $n+1$ разів диференційовна на J;

2) функція g $m+1$ разів диференційовна на J;

3) для довільного $t\in J$: $g^{(m+1)}(t)\neq 0$.

Тоді для довільних $x_0,x\in J$ існує таке число $\theta\in(0;1)$, що

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{g^{(m+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}(1-\theta)^{n-m}(x-x_0)^{n-m}.$$

(1)

Доведення. Нехай $x_0, x \in J$. Відрізок та інтервал з кінцями x_0, x позначимо відповідно символами $\overline{I}, I$. Спочатку доведемо, що знаменник дробу у правій частині рівності (1) відмінний від нуля. Для цього розглянемо допоміжну функцію

$$\chi(z)=g(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k,\ z\in J.$$

Функція χ неперервна на відрізку $\overline{I}$ та диференційовна на інтервалі I:

$$\chi'(z)=-g'(z)-g''(z)(x-z)+g'(z)-\frac{g'''(z)}{2!}(x-z)^2+g''(z)(x-z)-$$

$$-\frac{g^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3+\frac{g^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2-\ldots-\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m+\frac{g^{(m)}(z)}{(m-1)!}(x-z)^{m-1}.$$

Після взаємного знищення доданків правої частини цієї рівності отримаємо

$$\chi'(z)=-\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m,\quad z\in J.$$

Очевидно, $\chi(x)=0,$ а $\chi(x_0)$ дорівнює знаменнику дробу лівої частини рівності (1). Припустимо, що $\chi(x_0)=0.$ Тоді, внаслідок теореми Ролля для функції χ на відрізку $\overline{I}$, існує таке число $c\in I,$ що $\chi'(c)=0,$ звідки випливає рівність $g^{(m+1)}(c)=0,$ яка суперечить умові 3). Отже, $\chi(x_0)\neq 0,$ тобто знаменник дробу лівої частини рівності (1) відмінний від нуля.

Перейдемо до доведення власне твердження теореми. Ліву частину рівності (1) позначимо через λ і введемо допоміжну функцію

$$\varphi(z)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k-\lambda\chi(z),\ z\in J.$$

Ця функція неперервна на відрізку $\overline{I}$ та диференційовна на інтервалі $I.$ Похідна за змінною z виразу $f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$ обчислюється аналогічно похідній функції χ і дорівнює $-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$. Тому

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\lambda\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m.$$

Крім того, функція φ дорівнює нулю на кінцях відрізка $\overline{I}$: $\varphi(x)=\varphi(x_0)=0.$ Тому, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $c\in I,$ що $\varphi'(c)=0,$ тобто

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\lambda\frac{g^{(m+1)}(c)}{m!}(x-c)^m=0,$$

звідки $\lambda=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(m+1)}(c)}(x-c)^{n-m}$. Точка c належить інтервалу I з кінцями x_0, x, а отже існує таке число $\theta\in(0;1)$, що $c=x_0+\theta(x-x_0)$. При цьому $x-c=(1-\theta)(x-x_0)$. Таким чином,

$$\lambda=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{g^{(m+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}(1-\theta)^{n-m}(x-x_0)^{n-m}.$$

Беручи до уваги, що через λ позначена ліва частина рівності (1), отримаємо твердження теореми. Теорема доведена.

У теоремі Коші для диференційовних функцій розглядаються функції, задані на відрізку $[a;b]$. Тож сформулюємо отриманий результат для визначених на відрізку функцій.

Теорема 2. Нехай $m,n-$ невід'ємні цілі числа, функції $f,g:[a;b]\to\mathrm{R}$ задовольняють наступні умови:

1) функція f неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ n разів і $n+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b)$;

2) функція g неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ m разів і $m+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b)$;

3) для довільного $t\in(a;b)$: $g^{(m+1)}(t)\neq 0.$

Тоді існує таке число $c\in(a;b)$, що

$$\frac{f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{g(b)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(m+1)}(c)}(b-c)^{n-m}.$$

(2)

Зауваження 1. При $m=n=0$ теорема 2 переходить у теорему Коші для дифенційовних функцій. Якщо при цьому покласти $g(x)=x,\ x\in[a;b]$, то отримаємо теорему Лагранжа для диференційовних функцій.

Наведемо прклади застосування теореми 2 для доведення нерівностей.

Приклад 1. Нехай натуральне число n має остачу 3 від ділення на 4.

Тоді для довільного числа $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$ справджується нерівність

$$\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}.$$

(3)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=\cos t,$ $g(t)=\sin t$ на відрізку $[0;x]$ і $m=n.$ Натуральне число $n+1$ ділиться на 4, тобто $n+1=4k,$ де $k-$ натуральне число. Далі,

$$f^{(4k)}(t)=\cos\left(t+\frac{4k\pi}{2}\right)=\cos t,\qquad g^{(4k)}(t)=\sin\left(t+\frac{4k\pi}{2}\right)=\sin t.$$

Внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x),$ що

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}=\frac{f^{(4k)}(c)}{g^{(4k)}(c)}=\frac{\cos c}{\sin c}=\mathrm{ctg}c.$$

Котангенс на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ набуває значень, більших одиниці. Отже,

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}>1.$$

(4)

Знаменник лівої частини цієї нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t)=\sin t,$ $g(t)=t,$ $n=4k-1,$ $m=0$ на відрізку $[0;x].$ Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1\in(0;x),$ що

$$\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}{x}=\frac{0!}{n!}\frac{\sin(c_1)}{1}(x-c_1)^n>0,$$

оскільки синус додатний на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{4}\right).$ Таким чином, нерівність (3) еквівалентна нерівності (4).

Зокрема, для $x=\alpha=\frac{\pi}{4},$ $n=4k-1$ із нерівності (3) отримаємо наступну нерівність:

$$\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{\alpha^3}{3!}-\frac{\alpha^4}{4!}+...+\frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{\alpha^n}{n!}>1.$$

Зауважимо, що нерівність (3) можна також довести за допомогою формули Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа для функціїї $\cos x-\sin x,$ $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right].$

У наступному прикладі комбінація гіперболічного косинуса і гіперболічного синуса дозволяє отримати відому нерівність для $e^{-x},$ $x>0.$

Приклад 2. Нехай $n-$ непарне натуральне число, $n=2k-1$, $k\in\mathrm{N}$. Тоді для довільного $x>0$ справджується нерівність

$$e^{-x}>1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

(5)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=\mathrm{ch}(t)$, $g(t)=\mathrm{sh}(t)$ на відрізку $[0;x]$ і $m=n=2k-1$.Натуральне число $m+1=n+1=2k$ парне. Далі, $(\mathrm{ch}t)^{(2k)}=\mathrm{ch}t$, $(\mathrm{sh}t)^{(2k)}=\mathrm{sh}t$. Внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x)$, що

$$\frac{\mathrm{ch}x-1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}-\ldots-\dfrac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}=\frac{\mathrm{ch}c}{\mathrm{sh}c}=\mathrm{cth}c.$$

Котангенс гіперболічний на інтервалі $(0;+\infty)$ набуває значень, більших одиниці. Отже,

$$\frac{\mathrm{ch}x-1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}-\ldots-\dfrac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}>1.$$

(6)

Знаменник лівої частини цієї нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t)=\mathrm{sh}t$, $g(t)=t$, $n=2k-1$, $m=0$ на відрізку $[0;x]$. Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1\in(0;x)$, що

$$\frac{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}{x}=\frac{0!}{(2k)!}\frac{\mathrm{sh}(c_1)}{1}(x-c_1)^{2k-1}>0,$$

оскільки гіперболічний синус додатний на інтервалі $(0;+\infty)$. Таким чином, нерівність (6) еквівалентна нерівності

$$\mathrm{ch}x-1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}>\mathrm{sh}x-x-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Враховуючи, що $\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x}$, із останньої нерівності отримуємо нерівність (6).

Через α_0 позначимо корінь рівняння $\cos x=\mathrm{sh}x$ на відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Існування та єдиність такого кореня випливає із теореми Коші про проміжне значення нуль, застосованої до неперервної і спадної на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функції $\varphi(x)=\cos x-\mathrm{sh}x$. Зауважимо, що $\alpha_0\approx 0,7$.

Приклад 3. Нехай $n-$ натуральне число, що має остачу 3 від ділення на 4, тобто $n=4k-1,\ k\in\mathrm{N}$. Тоді для довільного $x\in(0,\ \alpha_0]$ справджується нерівність

$$\cos x-\mathrm{sh}x>1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-...-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}-\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}.$$

(7)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=\cos t,\ g(t)=\mathrm{sh}t$ на відрізку $[0;x]$ і $m+1=n+1=4k$. Далі, $(\cos t)^{(4k)}=\cos t,\ \ (\mathrm{sh}t)^{(4k)}=sht.$ Внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x)$, що

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\mathrm{sh}x-x-\frac{x^3}{3!}-...-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}=\frac{\cos c}{\mathrm{sh}c}>1.$$

У прикладі 2 показано, що знаменник дробу лівої частини останньої нерівності додатний. Тому отримана нерівність рівносильна нерівності (7).

Приклад 4. Для довільного натурального n та для довільного дійсного числа $x>0$ справджується нерівність

$$e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}<\frac{x}{n}\left(e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right).$$

(8)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=g(t)=e^t,\ m=n-1$ на відрізку $[0;x]$. Оскільки $\left(e^t\right)^{(n)}=e^t$, то, внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x)$, що $\dfrac{e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}{e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}}=\dfrac{(n-1)!}{n!}\dfrac{e^c}{e^c}(x-c)$, звідки

$$\frac{e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}{e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}}<\frac{x}{n}.$$

(9)

Знаменник дробу лівої частини останньої нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t)=e^t,\ g(t)=t$ для невід'ємних чисел $n-1,\ \ 0$ на відрізку $[0;x]$. Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1\in(0;x)$, що

$$\frac{e^x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}{x} = \frac{0!}{(n-1)!} \frac{e^{c_1}}{1} (x-c)^{n-1} > 0.$$

Таким чином, нерівність (9) еквівалентна нерівності (8). Нерівність (8) доведена.

Із нерівності (8) випливає, що для всіх натуральних n і для всіх $x > 0$ має місце нерівність

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}\left(e^x - 1\right).$$

(10)

Дійсно, для $n \in \mathrm{N},\ x > 0:$ $e^x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \le e^x - 1$. Нерівність (10) пропонується довести у задачі IV.4.51* збірника задач [1]. Як відмічено у зауваженні до розв'язання цієї задачі на с. 296 [1], справджується більш сильна нерівність, а саме

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n+1}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Цю нерівність можна довести за допомогою розкладу функції $e^x,\ x \in \mathrm{R}$ у степеневий ряд.

Застосуємо теорему 1 для виводу формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша ([2], п. 126).

Теорема 3. Нехай $n-$невід'ємне ціле число, $p > 0,$ функція $f:(a;b) \to \mathrm{R}$ $n+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b).$ Тоді для довільних $x_0, x \in (a;b)$ існує таке число $\theta \in (0;1),$ що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

(11)

де
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

(12)

Залишковий член (12) формули Тейлора називається залишковим членом у формі Шлемільха і Роша.

Доведення. Нехай $x_0 < x.$ Застосуємо теорему 1 для функцій $f(t),$ та $g(t) = (x-t)^p$, $t \in [x_0; x]$ і невід'ємних цілих чисел n, 0. Зауважимо, що у доведенні цієї теореми була використана відмінність від нуля $g^{(m+1)}(t)$ лише на інтервалі $(x_0; x).$ Внаслідок теореми 1, існує таке число $\theta \in (0;1),$ що

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{0-(x-x_0)^p}=\frac{0!}{n!}\cdot\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{-p(x-x_0-\theta(x-x_0))^{p-1}}(1-\theta)^n(x-x_0)^n$$

(13)

Враховуючи, що $x-x_0-\theta(x-x_0)=(1-\theta)(x-x_0)$, із рівності (13) отримуємо рівності (11), (12).

Для випадку $x<x_0$ теорема 1 застосовується для функцій $f(t)$, та $g(t)=(t-x)^p$, $t\in[x;x_0]$. Теорема 3 доведена.

При $p=n+1$ отримаємо залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Залишковий член Шлемільха і Роша при $p=1$ називається залишковим членом формули Тейлора у формі Коші:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

Перейдемо до узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій на випадок різниць $n-$го порядку.

Означення 1 ([2], п. 122). Нехай $n-$ натуральне число, функція $f:(a;b)\to \mathrm{R}$, $h>0;$ $x\in(a;b)$, $x+nh\in(a;b)$. Різницею $n-$го порядку з кроком h функції f на відрізку $[x;x+nh]$ називається число

$$\Delta_h^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+kh),$$

де $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0\le k\le n-$ біномні коефіцієнти.

При $n=1$ маємо різницю першого порядку:

$$\Delta_h^1 f(x)=\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x).$$

При $n=2-$ різницю другого порядку:

$$\Delta_h^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

Нехай функція $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Покладемо $x=a,$ $h=b-a.$ Тоді формулу скінченних приростів для функції f на відрізку $[a;b]$ можна записати наступним чином: існує така точка $c\in(a;b)$, що $\Delta_h f(a)=f'(c)h.$

Узагальнення теореми Лагранжа для різниць другого порядку називають теоремою Гельдера ([3], с. 91).

Теорема Гельдера. Нехай $x,h\in\mathrm{R}$, $h>0$, функція $f:[x;x+2h]\to\mathrm{R}$ неперервно диференційовна на відрізку $[x;x+2h]$ і двічі диференційовна на інтервалі $(x;x+2h)$. Тоді існує таке число $c\in(x;x+2h)$, що

$$\Delta_h^2 f(x)=f''(c)h^2.$$

Добре відоме узагальнення теореми Лагранжа та теореми Гельдера на випадок різниць $n-$го порядку, $n\geq 3$ ([2], п.122). Сформулюємо і доведемо відповідне твердження.

Теорема 4. Нехай $n-$натуральне число, $x,h\in\mathrm{R}$, $h>0$, функція $f:[x;x+nh]\to\mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовна на відрізку $[x;x+nh]$ і n разів диференційовна на інтервалі $(x;x+nh)$. Тоді існує таке число $c\in(x;x+nh)$, що

$$\Delta_h^n f(x)=f^{(n)}(c)h^n.$$

(14)

Лема 1 ([4], задача 4.42). Нехай $n-$натуральне число, функція $\psi:[a;b]\to\mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ і n разів диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Нехай, далі, існують такі числа $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\in[a;b]$, $\alpha_0<\alpha_1<...<\alpha_n$, що $\psi(\alpha_0)=\psi(\alpha_1)=...=\psi(\alpha_n)$. Тоді існує таке число $c\in(\alpha_0;\alpha_n)$, що $\psi^{(n)}(c)=0.$

Доведення леми 1. На кожному відрізку $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$, $0\leq k\leq n-1$, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $\alpha_k^{(1)}\in(\alpha_k;\alpha_{k+1})$, $0\leq k\leq n-1$, що $\psi'\left(\alpha_k^{(1)}\right)=0.$ Далі, на кожному відрізку $\left[\alpha_k^{(1)};\alpha_{k+1}^{(1)}\right]$, $0\leq k\leq n-2$, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $\alpha_k^{(2)}\in\left(\alpha_k^{(1)};\alpha_{k+1}^{(1)}\right)$, $0\leq k\leq n-2$, що $\psi''\left(\alpha_k^{(2)}\right)=0.$Продовжуючи ці міркування, на $n-$тому кроці отримаємо існування такого числа $c=\alpha_0^{(n)}\in\left(\alpha_0^{(n-1)};\alpha_1^{(n-1)}\right)\subset(\alpha_0;\alpha_n)$, що $\psi^{(n)}(c)=0.$ Лема доведена.

Доведення теореми 4. Покладемо

$$\varphi_j(t)=\prod_{i=0,\ i\neq j}^{n}\frac{t-x-ih}{(j-i)h},\quad t\in[x;x+nh].$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$g(t)=\sum_{j=0}^{n}f(x+jh)\varphi_j(t),\ t\in[x;x+nh].$$

Неважко бачити, що $\varphi_j(x+kh)=\delta_{kj}$, $0\leq k,j\leq n$, де $\delta_{kj}-$символ Кронекера, рівний одиниці при $k=j$ і нулю при $k\neq j.$ Тому $g(x+kh)=f(x+kh)$, $0\leq k\leq n.$ Покладемо $\psi(t)=g(t)-f(t)$, $t\in[x;x+nh]$. Функція ψ задовольняє умови леми 1 при $[a;b]=[x;x+nh]$ і $\alpha_k=x+kh$, $0\leq k\leq n.$ Тому, внаслідок леми 1, існує таке число

$c \in (x; x+nh)$, що $\psi^{(n)}(c)=0$, тобто $f^{(n)}(c)=g^{(n)}(c)$. Функція $\varphi_j(t)$, $0 \le j \le n-$ многочлен степеня n з коефіцієнтом $\left(h^n \prod\limits_{i=0,\, i\neq j}^{n}(j-i)\right)^{-1}$ при t^n. Тому

$$\varphi_j^{(n)}(t)=\frac{n!}{h^n \prod\limits_{i=0,\, i\neq j}^{n}(i-j)}=(-1)^{n-j}\,C_n^j\cdot\frac{1}{h^n},\ t\in[x;x+nh].$$

Остаточно,

$$f^{(n)}(c)=g^{(n)}(c)=\sum_{j=0}^{n} f(x+jh)\varphi_j^{(n)}(t)=\frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,C_n^j f(x+jh)=\frac{1}{h^n}\cdot\Delta_h^n f(x),$$

звідки випливає рівність (14). Теорема доведена.

Наступна теорема є узагальненням теореми Коші для диференційовних функцій на випадок різниць $n-$го порядку.

Теорема 5. Нехай $n-$натуральне число, $x,h\in \mathrm{R}$, $h>0$, функції $f,g:[x;x+nh]\to \mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовні на відрізку $[x;x+nh]$ і n разів диференційовні на інтервалі $(x;x+nh)$. Нехай, далі, для довільного $t\in(x;x+nh)$: $g^{(n)}(t)\neq 0.$ Тоді існує таке число $c\in(x;x+nh)$, що

$$\frac{\Delta_h^n f(c)}{\Delta_h^n g(c)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

(15)

Доведення. Внаслідок теореми 4 для функції g, існує таке число $c_1\in(x;x+nh)$, що $\Delta_h^n g(x)=g^{(n)}(c_1)h^n\neq 0.$ Таким чином, знаменник дробу у лівій частині рівності (15) відмінний від нуля.

Покладемо $\lambda=\dfrac{\Delta_h^n f(x)}{\Delta_h^n g(x)}$ і розглянемо допоміжну функцію

$$\psi(t)=f(t)-\lambda g(t),\ \ t\in[x;x+nh].$$

Ця функція задовольняє умови теореми 4 і тому існує таке число $c\in(x;x+nh)$, що $\Delta_h^n\psi(x)=\psi^{(n)}(c)h^n$, тобто $0=\Delta_h^n f(x)-\lambda\Delta_h^n g(x)=f^{(n)}(c)-\lambda g^{(n)}(c)$, звідки випливає (15). Теорема доведена.

Приклад 5. Нехай $n-$ парне натуральне число, $n=2k,\ k\in\mathrm{N}$; $x,\ x+nh\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Тоді

$$\frac{\Delta_h^{2k}\cos(x)}{\Delta_h^{2k}\sin(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{2k}(-1)^{n-i}\,C_n^k\cos(x+kh)}{\sum\limits_{i=0}^{2k}(-1)^{n-i}\,C_n^k\sin(x+kh)}>1.$$

(16)

Функції $f(t)=\cos t$ і $g(t)=\sin t$ задовольняють умови теореми 5 на відрізку $[x;x+nh]$. Внаслідок цієї теореми існує таке число $c\in(x;x+nh)\subset\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, що $\frac{\Delta_h^{2k}f(x)}{\Delta_h^{2k}g(x)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}=\frac{\cos c}{\sin c}>1$, звідки випливає (16). Зокрема, для парного натурального n, $x=0$, $h=\frac{\pi}{4n}$ справджується нерівність

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^k\cos\frac{\pi i}{4n}}{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^k\sin\frac{\pi i}{4n}}>1.$$

Зауважимо, що при $n=4k$, $k\in\mathrm{N}$ чисельник і знаменник дробу у лівій частині цієї нерівності додатні.

Наведені у статті узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій можуть бути використані у науково-дослідній роботі студентів молодших курсів, для підготовки курсових робіт, у спеціальних курсах для студентів-математиків педагогічних і класичних університетів.

Список використаної літератури

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К., Вища школа, 1987. – 408 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М., "Наука", 1969. – 608 с.
3. Бляшке В. Круг и шар. – М., "Наука", 1967. – 232 с.
4. Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова Т.О., Чайковський А.В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної. – К., ВПЦ "Київський університет", 2005. – 240 с.