**Математика**

УДК 519.863

# ПРО ОДНУ ЧИСЛОВУ ХАРАКТЕРИСТИКУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.

***Борисов Є.М.,***
*к.ф.-м.н., доцент,*
***Борисова Л.Є.***
*асистент,*
*Глухівський національний педагогічний*
*університет ім.. О. Довженка*

В роботі досліджується одна із основних числових характеристик випадкової величини - ексцес. Показано, що у відповідності до загально прийнятого означення, ексцес в більшості випадків неможливо визначити або охарактеризувати користуючись тільки графіками щільності ймовірності розподілів випадкових величин.

В работе исследуется одна из основных числовых характеристик случайной величины - эксцесс. Показано, что в соответствии с обще принятого определения, эксцесс в большинстве случаев неизвестна или охарактеризовать пользуясь только графиками плотности вероятности распределений случайных величин.

We study one of the basic numerical characteristics of random variable - kurtosis. Shown that, in accordance with generally accepted definition, kurtosis in most cases impossible to define or describe the graphs using only the probability density distributions of random variables.

**Вступ.** В більшості навчально методичних посібниках та в інших виданнях з теорії ймовірностей та математичної статистики, в яких використовують поняття числової характеристики – ексцес в означені цієї величини або в її характеристиці йдеться про так звану "гостровершинність" або "плосковершинність" [1, 2, 3]. Однак зміст цих термінів залишається не зовсім зрозумілим, а в деяких випадках призводить до хибних висновків щодо визначення ексцесу або принаймні його знака користуючись лише графіками відповідних функцій щільності розподілу. Адже, у відповідності до означень, для "гостровершинних" кривих ексцес додатній, а для "плосковершинних" від'ємний.

В зв'язку з вищесказаним, пропонується розглянути графіки деяких симетрично розподілених функцій щільності розподілу та криву нормального розподілу, адже саме в порівнянні з цією кривою, у відповідності до означень, визначається "гостровершинність" або "плосковершинність" інших, а, отже, і знак ексцесу.

Побудуємо на одному рисунку (рис. 1) графіки двох функцій щільності розподілу: нормально розподіленої випадкової величини (a=0, $\sigma = 1$) та функції, що має форму рівнобедреного трикутника і має такий аналітичний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} b^2 x + b, & \frac{-1}{b} \le x \le 0 \\ -b^2 x + b, & 0 \le x \le \frac{1}{b}, \end{cases} \qquad (1)$$

Зауважимо, для функцій щільності розподілу, які мають вигляд (1), (2) умова нормування виконується для будь-яких значень параметра $b$. В даному випадку $b = \frac{2}{3}$.

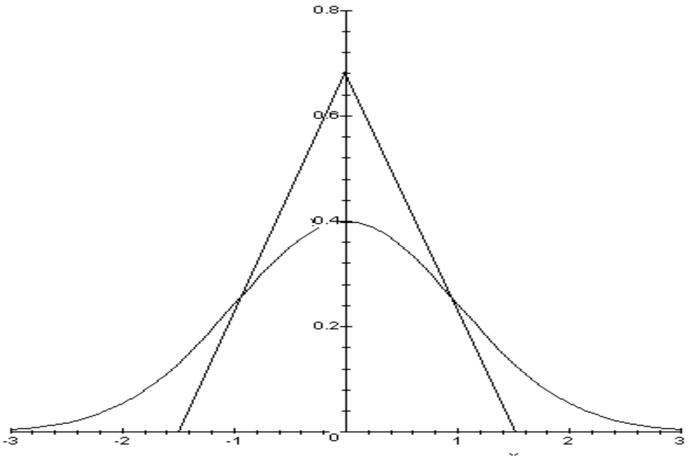


Рис.1

Відповідно до рис. 1 "гостровершинність" вочевидь спостерігається для кривої, що має форму трикутника. Однак підрахунки для ексцесу стверджують протилежне, а саме: для цієї кривої ексцес від'ємний, що вказує на "плосковершинність" розподілу випадкової величини.

Побудуємо ще один графік. На рисунку 2 зображено графіки щільності нормального розподілу (a=0, $\sigma = 1$) та рівномірного розподілу.

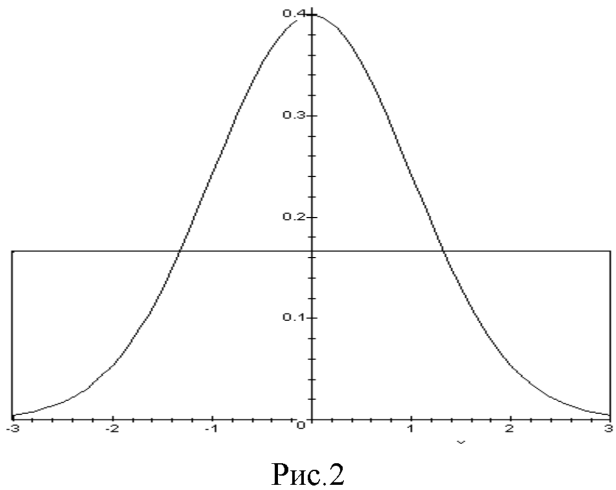


Рис.2

В даному випадку спостерігаємо "плоску вершину" для графіка рівномірного розподілу, про що говорить і числове значення ексцесу, який приймає від'ємне значення. Але, візуально порівнюючи графіки на цих двох рисунках (рис.1 та рис.2), очевидно не можна зробити висновок , що вони обидва "плосковершинні".

В зв’язку з наведеними прикладами постає питання в коректності самого означення для ексцесу (або його характеристики), яке фігурує в багатьох виданнях. Слід відмітити, що не у всіх цих виданнях означення однакові, а мають свої незначні відмінності (можливо викликані перекладом цього означення з російськомовних видань). Тут не будемо наводити ці означення, за виключенням одного, яке на думку авторів є найбільш коректним в сенсі розглянутих вище питань. В зв’язку з викладеною вище важливістю кожного терміна в цьому питанні, характеристику ексцесу тут представлено мовою оригіналу: «Величина эксцесса характеризует «крутость» кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса» [1].

2. Проаналізуємо ще один аспект цього питання. На рисунку 3 зображено графіки двох функцій щільності розподілу (1), які мають вигляд рівнобедрених трикутників(в даному випадку $b=\frac{1}{4}, b=1.$ ). Якщо оцінювати ці графіки з точки зору "гостровершинності", то може з'явитися хибний висновок, про те що ексцеси за своїм числовим значенням у них різні. Одна числовий підрахунок говорить про те, що ексцеси у них однакові і дорівнюють $-\frac{3}{5}$. Більш того, неважко переконатись у тому, що це значення для ексцесу залишається незмінним для будь-яких функцій щільності, які мають форму рівнобедрених трикутників і задаються формулою (1).

Той самий висновок можна зробити стосовно кривих, які зображено на рисунку 4. На цьому рисунку зображено графіки функцій щільності розподілу, які функціонально мають вигляд квадратичної функції ($b=1, \quad b=1{,}5$):

$$f(x)=b^2-\frac{16}{9}b^6x^2, \quad -\frac{b}{a}\le x\le \frac{b}{a}, \quad a=\frac{4}{3}b^3 \tag{2}$$

Ексцес для цих двох функцій однаковий і дорівнює $-\frac{6}{7}$, а також для всіх інших функцій щільності розподілу, які мають аналітичний вигляд (2).

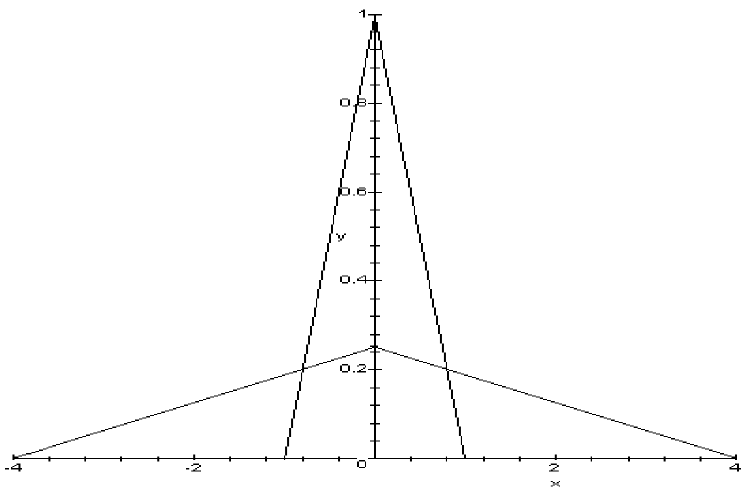


Рис.3

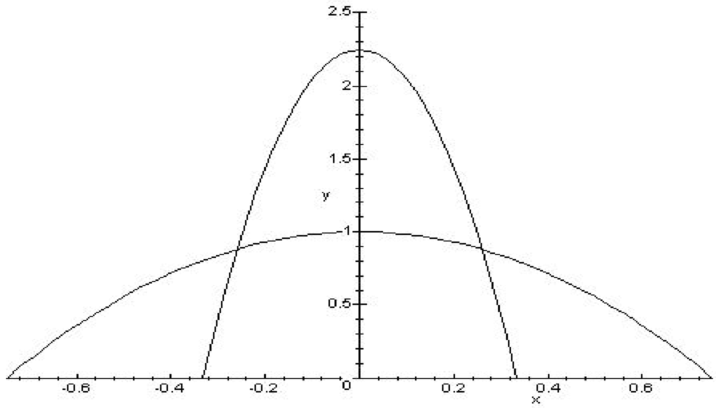


Рис.4

Продовжуючи, по аналогії, для всіх рівномірно розподілених величин значення ексцесу також однакове і дорівнює $-\frac{6}{5}$.

Вище наведені приклади дають змогу зробити висновок про те, що ексцес або його знак не можна однозначно визначити візуально через так звану "гостровершинність" чи "плосковершинність". Принаймні в багатьох випадках це неможливо або результат такого визначення може привести до хибних висновків.

З іншого боку, два приклади дають змогу стверджувати про те , що ексцес визначається функціональним (аналітичним) виглядом самої функції щільності розподілу, а не виглядом свого графіка. Також залишаються не зрозумілими, що означають терміни "гостровершинність", "плосковершинність" (що таке вершина, гостра чи плоска вершина).

В зв'язку з вищесказаним пропонуються більш уважно відноситись до самого означення, а також до його тлумачення.

3. Нижче наведені розрахунки ексцесу для симетрично розподілених функцій щільності розподілу, що мають такий аналітичний вигляд:

$$f(x) = b^{2k} - (ax)^{2k}, \quad -\frac{b}{a} \le x \le \frac{b}{a}, \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

При цьому умова нормування виконується для будь-яких дійсних $b$. Були виведені формули, які дають змогу знаходити ексцес для будь-яких $k$ та $b$. При, слід зауважити, що цьому ексцес визначається тільки параметром $k$.

Так, наприклад, для $k = 1,\ a = \frac{4}{3}b^3,\ Es = -\frac{6}{7}$, $\quad k = 2,\ a = \frac{8}{5}b^5,\ Es = -\frac{26}{25}$, $k = 3,\ a = \frac{12}{7}b^7,\ Es = -\frac{426}{385}$, $\quad k = 4,\ a = \frac{16}{9}b^9,\ Es = -\frac{74}{65}$.

На рисунку 5 зображено дві криві розподілу, які визначаються формулою (3). Перша крива відповідає випадку $b = 1,\ k = 1$ (крива виділена "жирною" лінією) та друга - $b = 1,\ k = 3$. В цьому випадку з огляду на графіки можна зробити висновок, що більш плоску вершину має друга крива, що підтверджує і саме знайдене значення ексцесу.

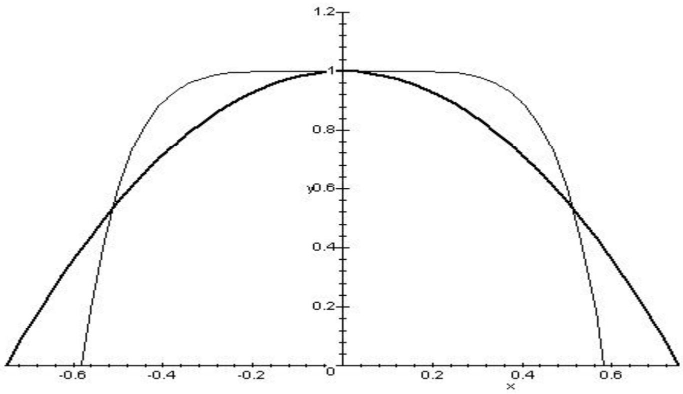


Рис. 5

**Висновки.** Таким чином, в роботі досліджена числова характеристика випадкової величини - ексцес. Показано, що ексцес в більшості випадків неможливо визначити або охарактеризувати користуючись тільки графіками щільності ймовірності розподілів випадкових величин.

## Список використаної літератури


1. Г.И. Агапов. Задачник по теории вероятности. // "Высшая школа".- М.- 1986. 80с.
2. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. // "Наука".- М.- 1964. 576с.
3. Жлуктенко В.І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей та математична статистика, Київ: ІЗМН, 1997, 408с.