512.8
К 93
Р-Р
686/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
Киевский государственный педагогический институт
им. А.М.Горького

На правах рукописи

Курдаченко Леонид Андреевич

ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЕВ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.03. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Киев - 1974

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313253

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

Киевский государственный педагогический институт
им.А.М.Горького

512.8
Курд2

На правах рукописи

Курдаченко Леонид Андреевич

ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЕВ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.03. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Киевский государственный
педагогический институт
им. А. М. Горького
БИБЛИОТЕКА

Киев - 1974

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького

Научный руководитель - член корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор С.Н.Черников

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор Ю.М. Горчаков; кандидат физико-математических наук, Д.И. Зайцев.

Ведущее предприятие - Институт математики СО АН СССР

Автореферат разослан " " _____ 1974 г.

Защита диссертации состоится " " _____ 1974 г. в " " часов на заседании Ученого совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (ауд. 431).

Отзывы просим присылать по адресу: г.Киев, 30, ул.Пирогова, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Одним из основных направлений в теории бесконечных групп является изучение строения групп с различными условиями конечности. Под условием конечности понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существует хотя бы одна бесконечная группа, не обладающая этим свойством.

Условиями конечности определился естественный подход к изучению бесконечных групп, которые находятся на стыке конечных и бесконечных групп. Систематическое изучение групп с условиями конечности началось в конце тридцатых годов в работах С.Н.Черникова "Бесконечные специальные группы" и "Бесконечные локально разрешимые группы", где изучались группы с условием минимальности для подгрупп. Как оказалось, такие группы исчерпываются при дополнительном условии локальной разрешимости конечными расширениями прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Позже эти группы были названы экстремальными группами или группами Черникова.

Наряду с условием минимальности для всех подгрупп О.Ю.Шмидтом и С.Н.Черниковым было начато изучение групп с условием минимальности для абелевых подгрупп. С.Н.Черниковым было установлено, что при дополнительном условии локальной разрешимости из условия минимальности для абелевых подгрупп вытекает условие минимальности для всех подгрупп. В 1970 г. В.П.Шунковым была доказана равносильность этих двух условий в классе локально конечных групп. Им

же была доказана экстремальность локально конечной группы, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Этот же результат получили почти в то же время Кегель и Верфриц.

Другим условием конечности, присущим всем абелевым группам, является условие конечности всех классов сопряженных элементов. Группы с конечными классами сопряженных элементов называют теперь, следуя Бэру, FC-группами. Изучение FC-групп началось в связи с доказанным А.П.Дицманом утверждением о том, что в произвольной группе всякое конечное инвариантное множество элементов конечного порядка порождает конечную подгруппу. Из этого утверждения следует, что в периодических FC-группах и только в них всякое конечное множество элементов содержится в конечной нормальной подгруппе. Такие группы называют локально нормальными. С.Н.Черникову принадлежит следующий фундаментальный результат: группа G тогда и только тогда является FC-группой, когда она либо локально нормальна, либо является центральным расширением абелевой группы без кручения с помощью локально нормальной группы.

Более узким, чем класс FC-групп, является класс слойно-конечных групп - групп, у которых множество элементов каждого порядка конечно. Слойно-конечные группы были введены в рассмотрение и полностью описаны С.Н.Черниковым. Всякая слойно-конечная p-группа экстремальна, и потому слойно-конечная группа имеет только экстремальные силовские подгруппы. С.Н.Черниковым было показано также, что локально нормальная группа с экстремальными силовскими подгруппами слойно-конечна, т.е. класс слойно-конечных групп - это в точности класс локально нормальных групп с экстремальными силовскими подгруппами. Слойно-конечную группу можно представить в виде произведения двух нормальных поэлементно перестановочных подгрупп, одна из которых является полной абелевой, а другая - слойно-конечная

группа с конечными силовскими подгруппами (тонкая слойно-конечная группа). С.Н.Черников показал, что тонкая слойно-конечная группа вкладывается в прямое произведение конечных групп, причем для каждого простого p это прямое произведение имеет только конечное число множителей с порядками, делящимися на p. Это утверждение обобщил Я.Д.Половицкий, доказав, что всякая слойно-конечная группа вкладывается в прямое произведение экстремальных групп, причем для каждого простого p число множителей этого прямого произведения, содержащих p-элементы, конечно. Я.Д.Половицким, а позже Д.Робинзоном, изучались группы, являющиеся обобщением слойно-конечных групп. Это группы, у которых каждый слой (множество элементов одного и того же порядка) порождает экстремальную подгруппу. Обобщениям слойно-конечных групп посвящена и настоящая диссертация.

Диссертация состоит из введения, раздела "Обозначения, определения и используемые предложения" и двух глав. Охарактеризуем содержание диссертации.

В первой главе диссертации рассматриваются три обобщения слойно-конечных групп, возникающие из трех характеристик слойно-конечных групп.

Первое обобщение возникает на основе приведенного выше определения слойно-конечных групп и состоит в том, что требование конечности снимается с конечного множества слоев. Такие группы названы в диссертации QLF-группами. Строение локально конечных QLF-групп описывается в следующей теореме.

Т е о р е м а I. (Теорема I.5 диссертации).

Всякая локально конечная QLF-группа, порядки элементов которой не ограничены в совокупности, почти слойно-конечна, т.е. является расширением слойно-конечной группы с помощью конечной группы.

С л е д с т в и е (Следствие I.5 диссертации).

Порядки элементов локально нормальной QLF-группы, у которой бесконечен хотя бы один слой, ограничены в совокупности.

Как уже отмечалось, С.Н.Черниковым слойно-конечные группы были охарактеризованы как локально нормальные группы с экстремальными словскими подгруппами. С другой стороны, из доказанного С.Н.Черниковым утверждения о том, что если в локально конечной p-группе конечен хотя бы один слой, то она экстремальна, вытекает, что локально конечная (и в частности, локально нормальная) QLF-группа имеет только для конечного множества простых p неэкстремальные силовские p-подгруппы. В связи с этим возникает вопрос о строении групп, в которых силовские p-подгруппы неэкстремальны только для конечного множества простых p. Такие группы будем называть QSE-группами. Весьма интересные примеры QSE-групп доставляют нам линейные группы. Так, линейная локально конечная группа над алгебраически замкнутым полем простой характеристики имеет экстремальные силовские p-подгруппы по всем простым p, отличным от характеристики поля (см. например, Д.А.Супруненко "Группы матриц", М.,"Наука", 1972, § 25), и следовательно, является QSE-группой. Строение локально нормальных QSE-групп описывается в следующей теореме.

Т е о р е м а 2. (Теорема I.I. диссертации).

Локально нормальная QSE-группа G обладает таким рядом нормальных подгрупп

$$G \geqslant A \geqslant B \geqslant \langle 1 \rangle,$$

что

(I) фактор-группа G/A вкладывается в прямое произведение $\bar{G}$ экстремальных групп, причем для всех простых p, кроме конечного числа, все p-элементы группы $\bar{G}$ содержатся только в конечном числе прямых множителей;

(2) фактор-группа A/B /если она нетривиальна/ не имеет нетривиальных экстремальных силовских подгрупп и множество $\Pi(A/B)$ простых делителей порядков ее элементов конечно;

(3) подгруппа B экстремальна.

Т е о р е м а 3. (Теорема I.3 диссертации).

Пусть G – локально сверхразрешимая локально нормальная QSE-группа. Тогда группа G является расширением слойно-конечной подгруппы H с помощью группы $\bar{G}=G/H$, у которой все нетривиальные силовские подгруппы неэкстремальны и множество $\Pi(\bar{G})$ конечно.

Т е о р е м а 4. (Теорема I.4 диссертации).

Пусть G – локально сверхразрешимая локально нормальная QSE-группа. Тогда группа G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что

$$G/F = H/F \leftthreetimes S/F,$$

где H/F – слойно-конечная группа, а S/F – группа, у которой все нетривиальные силовские подгруппы неэкстремальны и множество $\Pi(S/F)$ конечно.

Очевидно, что периодическая группа тогда и только тогда слойно-конечна, когда все ее примарные слои (слои, состоящие из p-элементов) конечны. Поэтому слойно-конечную группу можно определить как периодическую группу с конечными примарными слоями. Это дает основание выделить группы с конечным множеством бесконечных припримарных слоев как одно из обобщений слойно-конечных групп. Такие группы будем называть LB-группами. Строение локально конечных LB-групп описывается в следующих теоремах.

Т е о р е м а 5. (Теорема I.2 диссертации).

Локально нормальная группа G тогда и только тогда является LB-группой, когда она является расширением подгруппы H

с ограниченными в совокупности порядками элементов с помощью группы, вложимой в прямое произведение $\bar{G}$ экстремальных групп, удовлетворяющее следующим условиям:

(I) для всех простых p, кроме конечного множества, существует лишь конечное число прямых множителей группы $\bar{G}$, содержащих p-элементы;

(2) если q - такое простое число, что силовские q-подгруппы G неэкстремальны, то порядки q-элементов группы $\bar{G}$ ограничены в совокупности;

(3) множество тех простых q, для которых силовские q-подгруппы группы $\bar{G}$ неэкстремальны, конечно.

С л е д с т в и е . (Следствие I.2 диссертации).

Локально нормальная QSE-группа тогда и только тогда является LB-группой, когда порядки элементов всякой ее неэкстремальной силовской подгруппы ограничены в совокупности.

Т е о р е м а 6. (Следствие I.4 диссертации).

Пусть G - локально сверхразрешимая локально нормальная LB-группа. Тогда группа G включает в себя такую нормальную конечную подгруппу F, что

$$G/F = H/F \leftthreetimes S/F,$$

где H/F - слойно-конечная группа, а S/F - группа с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Т е о р е м а 7. (Теорема I.6 диссертации).

Локально конечная LB-группа G является расширением локально нормальной LB-группы с помощью группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Во второй главе изучаются непериодические QSE-группы (соответственно LB- и QLF-группы) с конечными классами сопряженных элементов. Из приведенной выше теоремы С.Н.Черникова о строении произвольной FC-группы вытекает, что FC-группа вкладывается в

прямое произведение абелевой группы без кручения и локально нормальной группы. Поэтому возникает вопрос о вложимости QSE-группы (соответственно LB - и QLF-группы) с конечными классами сопряженных элементов в прямое произведение абелевой группы без кручения и локально нормальной QSE-группы (соответственно LB - и QLF-группы). В § 2 приведен пример, показывающий, что в общем случае такое вложение невозможно. Следующая теорема показывает, что одним из достаточных условий, при которых такое вложение имеет место, является условие конечности ранга фактор-группы FC-группы по периодической части.

Т е о р е м а 8. (Теорема 2.I диссертации).

Пусть G - FC-группа, фактор-группа которой по периодической части H имеет конечный ранг. Тогда имеют место следующие утверждения:

(I) если G - QSE-группа, то группа G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения A конечного ранга и локально нормальной QSE-группы B;

(2) если G - LB-группа, то группа G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения A конечного ранга и локально нормальной -группы B;

(3) если G - FC-группа со слойно-конечной периодической частью, то группа G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения A конечного ранга и слойно-конечной группы B.

Во всех трех случаях полные части групп H и B изоморфны.

Так как локально нормальные QLF-группы исчерпываются слойно-конечными группами и группами с ограниченными в совокупности порядками элементов, то для изучения QLF-групп с конечными классами сопряженных элементов необходимо рассмотреть FC-группы, порядки

элементов периодической части которых ограничены в совокупности.

Т е о р е м а 9. (Теорема 2.2 диссертации).

Пусть G – FC -группа, порядки элементов периодической части H которой ограничены в совокупности, а фактор-группа G/H имеет конечный ранг. Тогда группа G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения конечного ранга и локально нормальной LB -группы, порядки элементов каждой силовской подгруппы которой ограничены в совокупности.

В связи с этой теоремой и разложимостью абелевой группы, порядки элементов периодической части которой ограничены в совокупности, в прямое произведение периодической части и абелевой группы без кручения, возникает вопрос о вложимости FC -группы с ограниченными в совокупности порядками элементов периодической части, фактор-группа которой по периодической части имеет конечный ранг в прямое произведение такого рода. В § 3 главы построен пример FC-группы с ограниченными в совокупности порядками элементов периодической части с фактор-группой по последней конечного ранга, не допускающей вложения в прямое произведение абелевой группы без кручения и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Тем не менее имеют место следующие утверждения.

Т е о р е м а 10. (Теорема 2.3 диссертации).

Пусть G – локально сверхразрешимая FC -группа, порядки элементов периодической части H которой ограничены в совокупности. Если ранг фактор-группы G/H конечен, то группа G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Т е о р е м а 11. (Теорема 2.4 диссертации).

Пусть G – нильпотентная FC -группа с ограниченными в совокупности порядками элементов периодической части. Тогда группа

G вкладывается в прямое произведение абелевой группы без кручения и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Во второй главе изучаются связи между QSE -группами с конечными классами сопряженных элементов и прямыми произведениями QSF -групп (QSE -групп, у которых все экстремальные силовские подгруппы конечны) и FC -групп, периодическая часть которых является полной абелевой слойно-конечной группой.

Т е о р е м а 12. (Теорема 2.5 диссертации).

Пусть G - QSE -группа с конечными классами сопряженных элементов и пусть H - ее периодическая часть. Тогда в центре группы G содержится такая тонкая слойно-конечная подгруппа U ,что фактор-группа G/U вкладывается в прямое произведение двух таких FC -групп $\bar{D}$ и $\bar{A}$, что периодическая часть группы $\bar{D}$ является полной абелевой слойно-конечной группой, а периодическая часть группы $\bar{A}$ - QSF-группа.

В конце второй главы рассмотрены произвольные FC-группы со слойно-конечной периодической частью. Доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 13. (Теорема 2.6 диссертации).

Пусть G - FC -группа со слойно-конечной периодической частью H. Тогда группа G включает в себя такую нильпотентную нормальную подгруппу N , класса нильпотентности не выше 2, что $N/z(H)$ - нормальная абелева подгруппа без кручения группы $G/z(H)$, а фактор-группа G/N по ней вложима в прямое произведение счетного множества конечных групп.

Если группа G локально нильпотентна, то фактор-группа G/N является тонкой слойно-конечной группой.

С л е д с т в и е 1. (Следствие 2.9 диссертации).

Пусть G - FC -группа со слойно-конечной периодической частью H. Тогда группа G является расширением своей подгруппы $z(H)$ с помощью группы, вложимой в прямой произведение счетного множества конечных групп и абелевой группы кручения.

С л е д с т в и е 2. (Следствие 2.10 диссертации).

Пусть G - FC-группа со слойно-конечной периодической частью H. Если центр подгруппы H тривиален, то группа G вкладывается в прямое произведение счетного множества конечных групп и абелевой группы без кручения.

Следующее утверждение дополняет следствие 2.

С л е д с т в и е 3. (Следствие 2.11 диссертации).

Пусть G - FC -группа со слойно-конечной периодической частью H . Если центр подгруппы H тривиален, то группа G вкладывается в прямое произведение счетного множества конечных групп без центров и абелевой группы без кручения.

Следующая теорема обобщает утверждение следствия 3.

Т е о р е м а 14. (Теорема 2.7 диссертации).

Пусть G - FC -группа, периодическая часть которой имеет тривиальный центр. Тогда группа G вкладывается в прямое произведение конечных групп без центров и абелевой группы без кручения.

При доказательстве этого утверждения существенно использовался результат Ю.М.Горчакова о том, что локально нормальная группа без центра вкладывается в прямое произведение конечных групп без центров.

Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории групп Института математики АН УССР.

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях:

1. Л.А.Курдаченко. Некоторые обобщения слойно-конечных групп, сб. "Группы с заданными свойствами подгрупп", изд. Института математики АН УССР, Киев, 1973, 270-308.

2. Л.А.Курдаченко. FC-группы со слойно-конечной периодической частью, IУ Всесоюзный симпозиум по теории групп, Новосибирск, 1973, 93-98.

БФ 26577. Формат 60x84 1/16. Объем 0,75 п.л. Тираж 200. Зак. № 4-2683

Киевская книжная типография научной книги