

# НАСТУПНІСТЬ У НАВЧАННІ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ НА МНОГОГРАННИКИ ТА ТІЛА ОБЕРТАННЯ МІЖ СТАРШОЮ ШКОЛОЮ ТЕХНІЧНОГО ПРОФІЛЮ ТА ВИЩИМ ТЕХНІЧНИМ НАВЧАЛЬНИМ ЗАКЛАДОМ

*О. І. Скафа,  
доктор педагог.наук, професор,  
Донецький національний університет,  
І. М. Реутова,  
аспірант, Донецький національний університет*

У статті розкриваються особливості навчання геометрії в старшій школі технічного профілю спрямованого на реалізацію наступності в системі неперервної освіти "технічний ліцей - вищий технічний навчальний заклад".

В статье раскрываются особенности обучения геометрии в старшей школе технического профиля, ориентированного на реализацию преемственности в системе непрерывного образования «технический лицей – высшее техническое учебное заведение».

The article revealed features of teaching geometry at senior school of technical type, directed on realization of the continuity in the system of continuous education "technical lyceum - higher technical educational establishment".

**Постановка проблеми.** Завданням інженерної освіти сьогодні є забезпечення економіки конкурентноздатними фахівцями, що володіють передовими технологіями, здатними самостійно розв'язувати поставлені перед ними завдання. З цією метою в Україні створена система ступеневої професійної освіти, першою ланкою якої є старша профільна школа. В умовах профілізації старшого ступеню ЗОШ особливої актуальності набуває питання забезпечення наступності між школою технічного профілю (технічним ліцеєм) та вищим технічним навчальним закладом (ВТНЗ) у навчанні профільних дисциплін. Такою дисципліною для майбутніх фахівців інженерної справи є геометрія.

Однією з цілей навчання геометрії в старшій школі є систематичне вивчення властивостей геометричних тіл у просторі, оволодіння способами обчислення практично важливих числових характеристик геометричних тіл (об'ємів, площ поверхонь). Оскільки геометричні тіла є формоутворюючою основою всіх деталей машин та механізмів, архітектурних споруд, то у зв'язку з цим вивчення їхніх властивостей для майбутніх інженерів має не тільки загальнокультурне значення, а є основою подальшого професійного становлення. Саме тому вивчення геометричних тіл

відкриває широкі можливості для розв'язання задачі по формуванню професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів старшої школи.

**Метою даної статті** є висвітлення деяких особливостей навчання геометрії учнів старшої школи технічного профілю, спрямованого на забезпечення наступності в системі неперервної освіти «технічний ліцей – ВТНЗ».

**Виклад основного матеріалу.** В курсі геометрії старшої школи учні знайомляться з найпростішими геометричними тілами: призмою, пірамідою, зрізаною пірамідою, прямим круговим циліндром, прямим круговим конусом, зрізаним конусом, кулею та її частинами. В курсі вищої математики та фахових курсах ВТНЗ перелік геометричних тіл значно розширюється, причому їхня форма визначається через перелік поверхонь, що обмежують геометричне тіло. В курсі нарисної геометрії виконуючи креслення різних деталей машин та механізмів (моделями яких є певні геометричні тіла). Студенти також мають справу з різного виду поверхнями – будують розгортки геометричних тіл, у випадку врізки або проникнення многогранників будують лінію перетину їхніх поверхонь. Тому, з точки зору забезпечення наступності в системі «технічний ліцей – ВТНЗ», формування понять про найпростіші геометричні тіла в курсі стереометрії в класах технічного профілю має відбуватись паралельно з формуванням поняття відповідної поверхні.

Автори практично всіх підручників з геометрії визначають многогранник як тіло, поверхня якого складається зі скінченої кількості многокутників, а поняття призми та піраміди визначаються в підручниках як види многогранників з відповідними родовими ознаками. В той же час підходи до визначення циліндра, конуса та кулі різняться. Так, в підручнику [2; 4] ці тіла визначаються як тіла обертання певних плоских фігур. Такий підхід цілком виправданий з точки зору формування просторового уявлення учнів. До того ж ця ідея покладена в основу обробки деталей, які мають форму зазначених тіл, на токарному верстаті. Усвідомлення цього важливо для майбутніх інженерів, однак в такому разі порушується наступність у вивченні циліндричних і конічних поверхонь з курсом вищої математики (аналітичної геометрії), нарисної геометрії.

З точки зору нашого дослідження ми вважаємо за доцільно перенести в курс стереометрії змістову стадію формування понять циліндричної та конічної поверхні. Тобто, ще під час навчання в старшій школі учні мають розуміти належність призм та циліндрів (пірамід та конусів) одному класу геометричних об'єктів, розуміти, що циліндр може бути не тільки прямим, а й нахиленим і т.д. Автори підручника [1] починають вивчення геометричних тіл з означення циліндра та конуса в широкому розумінні, а вже потім розглядають призми та піраміди, як різновиди циліндра та конуса, в основі яких лежать многокутники.

Такий підхід, без сумніву, найбільш близький до визначення відповідних поверхонь в курсі вищої математики, однак, ми в цьому питанні дотримуємось позиції, яка висвітлена в підручнику [3]. Так циліндр в ньому визначається як тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині і переходять одне в одного паралельним перенесенням, та всіх відрізків, які з'єднують відповідні точки цих кругів. Таке означення корелюється з визначенням циліндричної поверхні в курсі вищої математики та разом з цим залишає можливість для формування в учнів такої евристики як узагальнення. Теж саме можна сказати і про означення конуса. Наведемо приклад розгортання бесіди з учнями під час узагальнення поняття конуса.

*Учитель.* У курсах вищої геометрії конусом називають тіло, утворене всіма відрізками, які сполучають дану точку – вершину конуса, з точками деякої обмеженої плоскої фігури – основи конуса. Поверхню, яка утворена всіма відрізками, що з'єднують дану точку з точками кривої, що обмежує основу конуса, називають відповідною конічною поверхнею. Яке відоме вам геометричне тіло, крім прямого кругового конуса, підпадає під поняття конуса в широкому розумінні?

*Учні.* Піраміда.

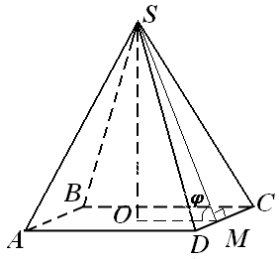
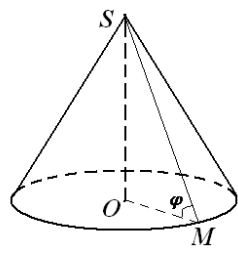
*Учитель.* Так. Проведіть аналогію між поняттями піраміди та конуса, та назвіть їхні відповідні елементи (табл. 1). Результати занесіть в другий стовпчик таблиці.

*Учні* заповнюють таблицю 1 (курсивом в таблиці виділено те, що заповнюється учнями).

Аналогічним чином доцільно узагальнити поняття циліндра, проводячи аналогію з призмою. При такому підході вивчення конічних та циліндричних поверхонь в курсі вищої математики – є узагальненням наведеного вище означення. Фактично при такому підході поняття зазначених поверхонь вже сформується в учнів у курсі стереометрії, а у курсі вищої математики акцент можна цілком змістити на аналітичний виклад теорії поверхонь.

Таблиця 1

**Аналогія між пірамідою та конусом**

<p>Правильна піраміда</p> 	<p>Прямий круговий конус</p> 
<p>Висота піраміди</p>	<p><i>Вісь конуса</i></p>
<p>Апофема піраміди</p>	<p><i>Твірна конуса</i></p>

Лінійний кут двогранного при основі піраміди	<i>Кут нахилу твірної до площини основи</i>
Бічна поверхня піраміди	<i>Бічна поверхня (або конічна поверхня) даного конуса</i>
$S_{\sigma} = \frac{S_{осн}}{\cos \varphi}$	$S_{\sigma} = \pi R l = \frac{\pi R l}{R} = \frac{\pi R^2}{R/l} = \frac{S_{осн}}{\cos \varphi}$ , де $R$ - <i>радіус основи, <math>l</math> – твірна конуса</i>
$V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ , де $H$ – висота піраміди	$V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ , де $H$ – висота конуса

Інженерна справа невіддільна від експериментальної та конструкторської діяльності, які передбачають перетворення двомірного образу на кресленні в трьохмірний (при відтворенні форми деталі за кресленням його проєкцій, розгортки) і навпаки. Тому при викладанні математики (геометрії) в класах технічного профілю постає задача доповнити систему задач такими, які б сприяли формуванню саме такої діяльності. Використання системи задач, в яких фігурують розгортки геометричних тіл, надає такої можливості. Виконуючи розгортку, учень перевіряє свої уявлення про геометричне тіло, його елементи, залежності між ними. Порівняння розгорток та моделей многогранників за наданим кресленням є ефективним засобом тренування варіації фігур у просторі. До того ж задачі на побудову розгорток сприяють розвитку просторової орієнтації, створення запасу динамічних уявлень, для яких необхідні повороти фігур, додаткові побудови подумки.

У курсі основної школи учні знайомились з поняттям розгортки многогранника та розв'язували задачі на «склеювання» многогранника з даної розгортки та побудови розгортки даного многогранника, розрізанням по ребрам. У старшій школі технічного профілю ми пропонуємо доповнити систему задач задачами наступних типів: 1) виготовлення розгорток многогранників та виготовлення многогранників за даними розгортками на основі знань метричних властивостей відповідних геометричних тіл; 2) задачі, в умові яких присутні розгортки геометричних тіл; 3) задачі, в яких розгортки використовуються як апарат розв'язання.

При розв'язанні задач першого типу важливо приділити увагу закономірностям в розташуванні граней, ребер, вершин многогранника на його розгортці при її «склеюванні». Наприклад.

Задача 1. Дано розгортки куба та прямокутного паралелепіпеда (рис. 1, 2). Вкажіть ребра та вершини, які співпадуть при «склеюванні» з цих розгорток многогранників.

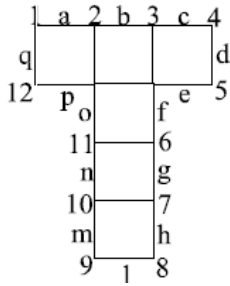


Рис. 1. Розгортка куба

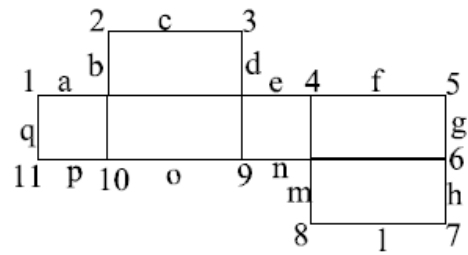


Рис. 2. Розгортка прямокутного паралелепіпеда

До другого типу ми відносимо задачі, в яких на основі властивостей геометричних тіл необхідно встановити відповідність між поданими розгортками та тілами, задачі на знаходження елементів розгортки за поданими елементами многогранника та навпаки, задачі, на відповідність властивостей розгортки та геометричного тіла, задачі змішаного типу, в яких необхідно будувати розгортку та конструювати геометричне тіло. Наведемо приклади.

Задача 2. Які з даних плоских фігур, наведених на рис. 3, не можуть бути розгортками куба? Чому?

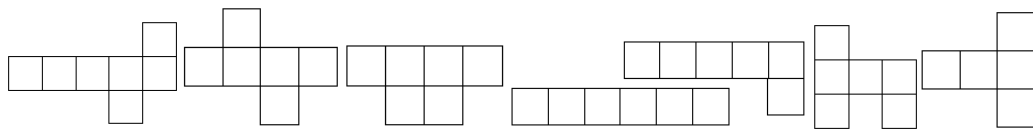


Рис. 3. Креслення до задачі 2

При розв'язанні саме таких задач виникає необхідність постійно співвідносити образ многогранника з образом розгортки та навпаки, аналізувати їхні властивості, здійснювати перехід від двомірних уявлень до трьохмірних.

Умінню «бачити у просторі», конструювати геометричні тіла подумки сприяють задачі, в яких необхідно визначати положення деякої лінії на зображенні многогранника, його проекційному кресленні, розгортці.

Задача 3. На рисунку 4 наведено зображення деякої лінії на проекційному кресленні многогранника. Зобразіть цю лінію на многограннику; на розгортці многогранника.

Задача 4. Для двох кубів зробили розгортки та перемішали їх. Знайдіть розгортки кожного з кубів (рис.5)

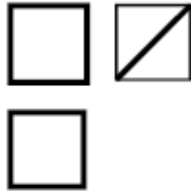


Рис. 4. Креслення до задачі 3

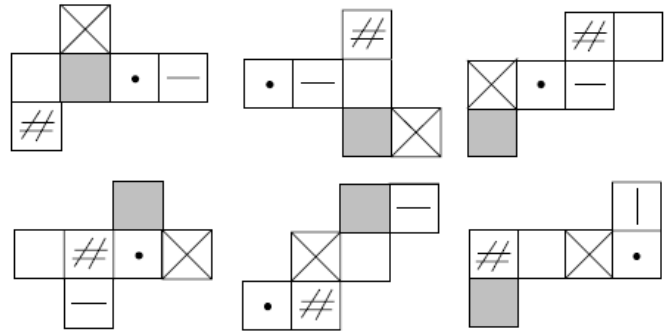


Рис. 5. Креслення до задачі 4

Задача 5. Розгортка конічного ковпака – сектор радіуса 50 см та з центральним кутом  $288^\circ$ . Знайдіть радіус основи та висоту конічного ковпака.

В задачах третього типу побудова розгортки геометричного тіла використовується як метод розв'язання задачі. Це можуть бути задачі на відшукування відстані між точками на поверхні геометричних тіл. В таких задачах розгортання геометричного тіла дозволяє зробити «перехід з простору в площину», в якій відстань між точками визначається довжиною відповідного відрізка.

Задача 6. Кімната має форму куба з ребром 3 м (рис. 6). Знайдіть найкоротшу відстань для між точками  $A$  і  $B$  по стінах, стелі або підлозі для економного прокладання електропроводки, якщо точка  $A$  знаходиться на відстані 0,5 м від підлоги, а точка  $B$  знаходиться в центрі стелі.

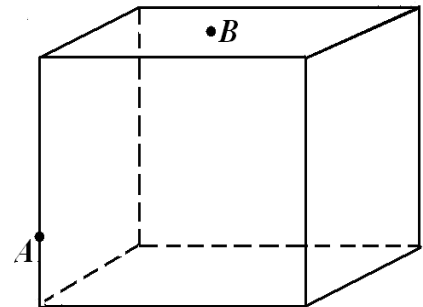


Рис. 6. Зображення кімнати кубічної форми

Задача 7. Пряма лежить в площині осевого перерізу конуса та перетинає його бічну поверхню в точках, які ділять твірні у відношенні 1:1 та 1:2, якщо рахувати від вершини конуса. Знайдіть відстань між цими точками по поверхні конуса, якщо радіус основи конуса дорівнює 1 м, висота -  $2\sqrt{2}$  м.

Наступність у навчанні між старшою школою та ВНЗ передбачає суб'єктне становлення учня і студента. А це може відбутися лише за умови сформованості відповідного рівня мотивації навчальної діяльності, достатньої для такого становлення. Оскільки у старшому шкільному віці та в студентські роки мотиви учіння пов'язані з перспективами їхньої майбутньої професії, то при вивченні многогранників, обчисленні їхніх об'ємів та площ поверхонь ми вважаємо за доцільне поповнити систему задач такими

задачами, в яких би учні безпосередньо мали справу з реальними об'єктами інженерної діяльності, формулювання яких знайомить учнів з будовою технічних приладів, містить цікаву інформацію про досягнення в галузі техніки. Крім того, такі задачі є прекрасним матеріалом для формування евристичної діяльності учнів. Надання евристичних підказок учителем під час розв'язання задач прикладної спрямованості дозволяє управляти евристичною діяльністю учнів, а свідомому застосуванню відповідних евристик сприяє залучення учнів до самостійного складання евристичних підказок до прикладних задач. Наведемо приклади.

Задача 8. *Дах будівлі має форму піраміди, всі бічні грані якої утворюють з основою кут  $30^\circ$  (рис. 7). Чому дорівнює площа даху, якщо площа будівлі  $60 \text{ м}^2$ ?*

Евристична підказка. *Переформулюйте задачу на геометричну: знайдіть площу бічної поверхні піраміди, у якій всі бічні грані утворюють з основою кут  $30^\circ$ , а площа основи  $60 \text{ м}^2$ .*

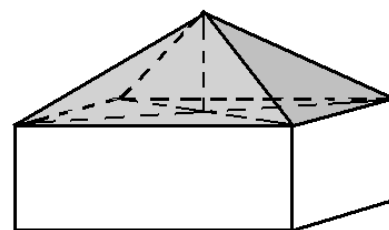


Рис. 7. Зображення будівлі з пірамідальним дахом

Задача 9. *Під час зберігання нафтопродуктів відбувається їх природна втрата через випарювання, яке пропорційне площі поверхні випарювання. Для визначення граничної норми втрати нафтопродуктів, що зберігаються*

*в горизонтальних циліндричних резервуарах, площа поверхні випарювання повинна відповідати ДЕСТ, якщо вважати, що резервуар заповнений на 75% свого об'єму (рис. 8). Знайдіть стандартну площу поверхні випарювання для горизонтального циліндричного резервуара з діаметром  $d$  та довжиною  $l$ .*

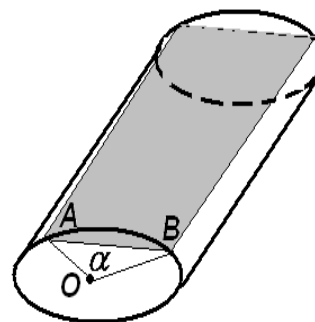


Рис. 8. Зображення циліндра із

повздовжнім перерізом, що відтинає  $\frac{1}{4}$  об'єму

Евристична підказка. *Переформулюйте задачу на геометричну: знайдіть площу повздовжнього перерізу циліндру, що відтинає  $\frac{1}{4}$  об'єму.*

Деталі машин, механізми здебільшого представляють собою комбінацію геометричних тіл, тому їхнє проектування та обслуговування потребує уміння аналізувати їх властивості, обчислювати числові характеристики таких геометричних тіл. Зокрема, деталі,

які виготовляються на токарних верстатах є комбінаціями тіл обертання. У зв'язку з цим у класах технічного профілю значну увагу необхідно приділити комбінаціям геометричних тіл. У діючих підручниках геометрії пропонуються задачі, в яких розглядаються тіла, утворені в наслідок обертання плоскої фігури навколо деякої осі. Однак, ми вважаємо за доцільне подавати умови таких задач за кресленням поздовжнього перерізу, бо саме аналізуючи креслення інженер отримує інформацію про геометричні властивості матеріального об'єкту і, навпаки, розробляючи певну деталь, інженер передає інформацію про неї виробнику саме через технічне креслення. Пропедевтика цих умінь має закладатись в шкільному курсі стереометрії та удосконалюватись під час вивчення нарисної геометрії та інженерної графіки. Відповідно до професійної дії аналізувати креслення, ми пропонуємо включати задачі двох типів: в яких явно зазначено, що мова йде про тіла обертання, та такі, в яких учні, аналізуючи надане кресленням, мають зробити цей висновок самостійно. До задачі першого типу можна віднести, наприклад, задачу 10, а до задач другого типу – задачу 11.

Задача 10. На рисунку 9 подане креслення поздовжнього перерізу деталі, що є тілом обертання. Знайдіть об'єм та площу поверхні деталі.

Задача 11. Знайдіть вагу мідного полої деталі за даними розмірами на рисунку 10. Питома вага міді  $8,6 \text{ г/см}^3$ .

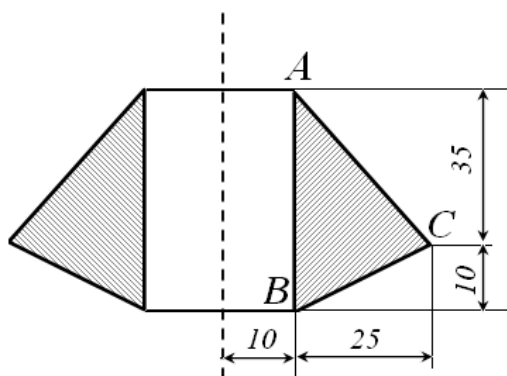


Рис. 9. Креслення поздовжнього перерізу деталі до задачі 10

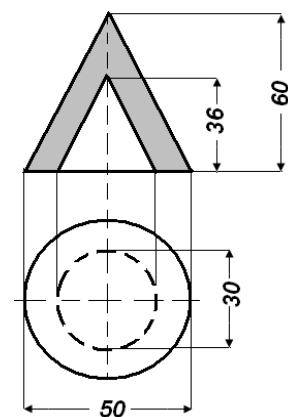


Рис. 10. Розміри деталі до задачі 11

Уміння «читати креслення» поздовжнього перерізу тіла обертання передбачає перехід від двомірного простору в тримірний. На цій основі учні здійснюють візуалізацію об'єкту з метою розбиття його на простіші геометричні тіла, властивості яких їм відомі. Разом з цим необхідно формувати в учнів старшої школи технічного профілю і вміння здійснювати перехід в зворотному напрямку, бо дуже часто дослідження перерізів тіла дозволяє проаналізувати його властивості. З чотирьох основних тіл обертання, що вивчаються учнями в курсі загальноосвітньої школи, можна отримати 12 видів комбінацій.



Зрозуміло, що проаналізувати всі ці комбінації не має можливості, та й непотрібно. Учні мають засвоїти апарат такого аналізу, основні його стратегії. Як свідчить наш досвід, найбільші труднощі в учнів викликають задачі на комбінацію кулі з іншими геометричними тілами. Дослідження властивостей таких комбінацій зводиться до аналізу розташування центру кулі. Наведемо приклад розгортання такого дослідження при дослідженні комбінацій кулі з іншими тілами обертання.

Розпочати таку роботу можна з аналізу комбінації «куля вписана в циліндр» (рис. 11). Учитель організовує діалог з учнями, спонукаючи їх до аналізу комбінації наступними питаннями та завданнями: з'ясуйте, що отримаємо в осьовому перерізі комбінації; який зв'язок отриманих плоских фігур з даною комбінацією; з'ясуйте розташування осі циліндра на осьовому перерізі; з'ясуйте розташування центру кулі по відношенню до осі циліндра; з'ясуйте як пов'язані між собою основні елементи циліндра та кулі.

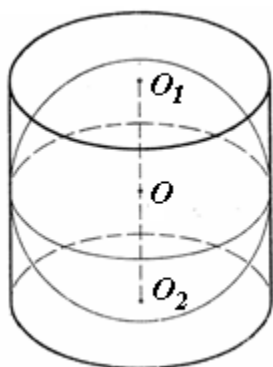


Рис 11. Куля вписана в циліндр

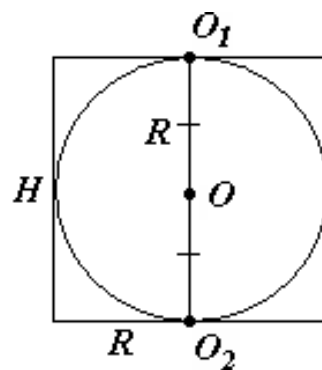


Рис. 12. Осьовий переріз комбінації тіл «куля вписана в циліндр»

Після цього складається правило-орієнтир аналізу комбінацій будь-яких тіл обертання: 1) побудувати осьовий переріз комбінації; 2) з'ясувати зв'язок отриманих плоских фігур з тілами, що входять до комбінації; 3) проаналізувати властивості комбінації плоских фігур; 4) інтерпретувати отримані властивості по відношенню до елементів просторових об'єктів.

Подальшу роботу по формуванню уміння застосовувати отримане правило-орієнтир можна організувати наступним чином. Учні об'єднуються в групи і кожна група отримує завдання проаналізувати одну з наступних комбінацій тіл обертання: кулю описану навколо циліндра, кулю вписану в конус, кулю описану навколо конуса. Після обговорення групи презентують результати своєї роботи.

**Висновки.** Таким чином, забезпечення наступності у навчанні геометрії в системі неперервної освіти «технічний ліцей – вищий технічний навчальний заклад передбачає:

- перенесення в курс стереометрії змістової стадії формування понять циліндричної та конічної поверхні та проведення у зв'язку з цим аналогій між призмами і циліндрами, пірамідами і конусами;
- доповнення системи задач задачами з розгортками наступних типів: 1) виготовлення розгорток многогранників та виготовлення многогранників за даними розгортками на основі знань метричних властивостей відповідних геометричних тіл; 2) розв'язання задач, в умові яких присутні розгортки геометричних тіл; 3) розв'язання задач, в яких розгортки використовуються як апарат розв'язання
- включення в систему задач прикладної спрямованості, відповідно до напрямку профілю;
- формулювання задач на геометричні тіла на їхніх кресленнях та задач, які б передбачали аналіз геометричного тіла за його кресленням та, навпаки, створення креслення заданого геометричного тіла.

### **Список використаної літератури**

1. Геометрія. 10-11 класи: Пробний підручник / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003. - 264 с.
2. Геометрія: підручн. для для учнів 10-11 кл. з поглибленим вивченням математики / Г.П. Бєвз, В.Г. Бєвз, В.М. Владімірова, Н.Г. Владімірова – К.: Освіта, 2000. – 239 с.
3. Погорелов А.В. Геометрия: Стереометрия: учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учебных заведений / А.В. Погорелов. – 4-е изд. – К.: Школяр, 2004. – 142 с.
4. Тадеєв В.О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / В.О. Тадеєв; [за ред. В.І. Михайлівського]. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003. - 384 с.
5. Тадеєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / В.О. Тадеєв; [за ред М.Й. Ядренка]. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2004. - 480 с.