

АНАЛІЗ СИГНАЛУ МАТЕМАТИЧНИМ АПАРАТОМ РЯДІВ ФУР'Є

Кондакова С. В.

кандидат фіз.-мат. наук,

доцент кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь

НПУ ім. М. П. Драгоманова

У статті розглянуті ряди Фур'є з точки зору їх використання для аналізу електромагнітних та акустичних коливань з метою оптимального перетворення і передачі. Проілюстровано зв'язок між функціями та їх наближеннями у вигляді перших членів рядів Фур'є в дійсній і комплексній формі.

В статье рассмотрены ряды Фурье с точки зрения их использования для анализа электромагнитных и акустических колебаний с целью оптимального преобразования и передачи. Проиллюстрирована связь между функциями и их приближениями в виде первых членов рядов Фурье в действительной и комплексной форме.

The article deals with Fourier's series as to their usage for the electromagnetic and acoustic oscillations analysis in order to process and transmit them optimally. The connection between functions and their approximations as the first terms of the Fourier's series in real and complex forms has been illustrated.

Ряди Фур'є – один з небагатьох розділів класичного курсу вищої математики, що безпосередньо широко використовується на практиці та в навчальних дисциплінах, пов'язаних з новітніми інформаційними технологіями. На жаль, при викладанні цієї теми традиційно відсутній практичний аспект застосування. В результаті цього для студентів залишається відкритим питання щодо доцільності записувати за допомогою нескінченних сум порівняно складних тригонометричних функцій досить прості лінійні та показникові. І якщо застосування рядів Тейлора досить чітко ілюструється на прикладах наближених обчислень, то відповідні застосування рядів Фур'є розглянуті лише в спеціальній технічній літературі, яка найчастіше залишається поза увагою студентів педагогічних вузів, які на перших курсах вивчають математичний аналіз. До речі, і сам Фур'є свого часу сумнівався в практичній доцільності започаткованої ним теорії. Дана стаття присвячена мотиваційному аспекту вивчення рядів Фур'є.

Отже, як правило, різноманітні сигнали (акустичні, електричні, оптичні, гідравлічні та ін.) є функціями часу. При цьому один вид сигналу можна перетворювати на інший, в зв'язку з чим найчастіше розглядають електромагнітні чи акустичні сигнали, які по своїй природі мають властивість розповсюджуватися у просторі або вздовж направляючих систем. У радіотехніці та техніці зв'язку загального визнання набув спектральний опис фізичних

явищ та сигналів, що пояснюється прямим зв'язком, який існує між спектральним розкладом та роботою реальних коливальних систем.

Французький математик Ж. Фур'є (1768 – 1830) висунув гіпотезу, згідно з якою не існує функції, яку не можна було б розкласти в тригонометричний ряд. І хоча інтуїтивно повірити в цю гіпотезу досить складно, з певними уточненнями це дійсно так.

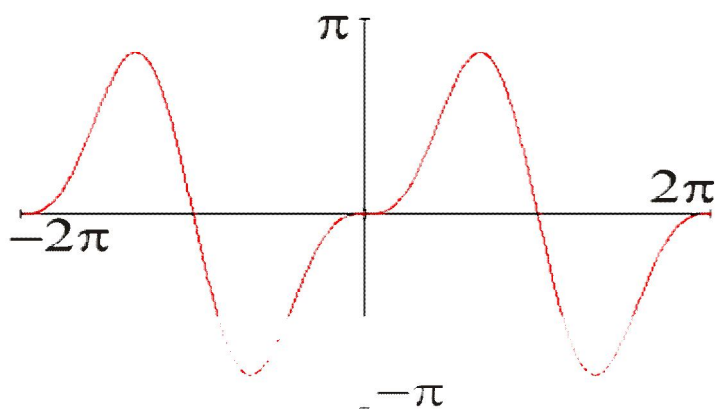
Приклад 1. Побудувати графіки функцій $f(t) = 2 \sin t - \sin 2t$,

$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t, \quad f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \dots - \frac{1}{5} \sin 10t,$$

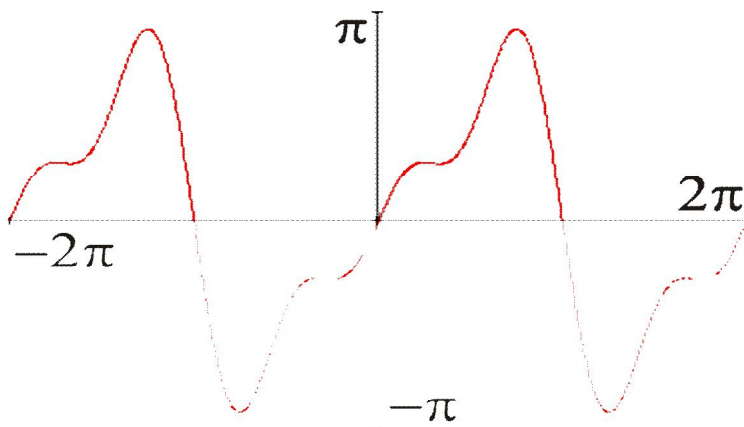
$$f(t) = \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kt.$$

Розв'язання. Задані функції можна дослідити методами диференціального числення. Проте, через їх громіздкість, скористаємося програмою Mathcad. В результаті отримаємо графіки, зображені на рис. 1.

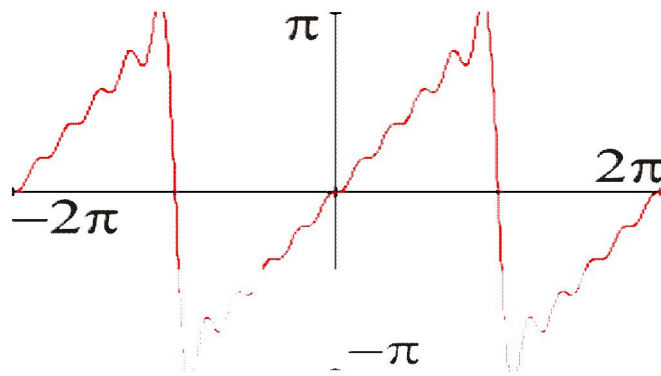
$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t$$



$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t$$



$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \dots - \frac{1}{5} \sin 10t$$



$$f(t) = \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kt$$

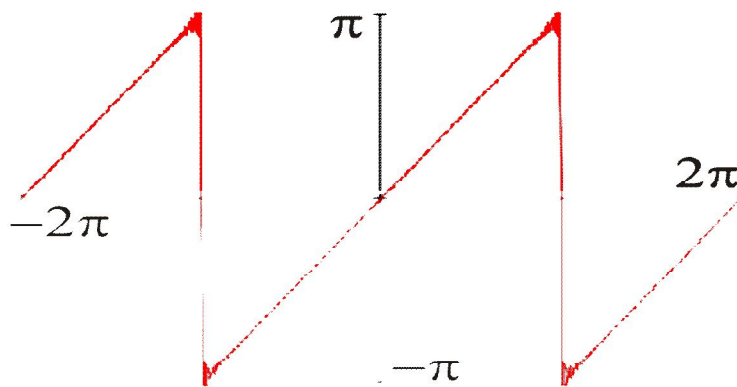


Рис. 1.

Дивлячись на останній графік, швидше можна припустити, що зображено періодичну з періодом 2π функцію $f(t) = t$, $t \in (-\pi; \pi)$, аніж функцію, яка аналітично задається сумою синусоїд.

У 1822 році Ж. Фур'є опублікував роботу “Аналітична теорія тепла” у якій навів перші приклади розкладу в тригонометричні ряди Фур'є функцій, які задані на різних інтервалах різними аналітичними виразами. І хоча його спроба довести можливість розкладу в тригонометричний ряд Фур'є довільної функції була невдалою, сама ідея поклала початок великому циклу досліджень, присвячених проблемі зображення функцій тригонометричними рядами та інтегралами Фур'є.

Результати цих досліджень широко застосовуються в теорії передавання інформації, оскільки дають змогу сигнал довільної форми розкласти на складові різних частот або ж через відповідні додавання синусоїд з різними частотами синтезувати сигнал довільної форми. Використовуючи розклад функції в ряд Фур'є, В. А. Котельников довів теорему, що лежать в основі всього імпульсного зв'язку. Так, на основі рядів Фур'є ним було показано, що при необхідності передати неперервну функцію $f(t)$ з обмеженим спектром, достатньо

передати окремі миттєві значення, відраховані через $\Delta t = \frac{1}{2F}$, де F – ширина спектра функції.

В фізичному світі діє багато явищ, які можна зобразити як суми коливань різних частот. Наприклад, світло – це сума електромагнітних хвиль з довжиною хвилі від 8 000 до 4 000 ангстрем (від червоного до фіолетового). При пропусканні через призму отримуємо спектр з семи чистих кольорів.

Подібно до світла, шляхом розкладу звукового сигналу на різні частотні складові, ми можемо отримати детальну інформацію про сам сигнал.

Розглянемо так звану тригонометричну систему ортонормованих на відрізку $[-\pi; \pi]$ функцій $\{1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos 2t, \dots, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin 2t, \dots\}$. Аналогічно тому, як будь-який вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, так і кожен функцію з певного класу можна розкласти у ряд, де базисом буде вказана тригонометрична система ортонормованих функцій. Цей зв'язок легко пояснити, якщо уявити множину значень функції вектором нескінченно великої розмірності. Нагадаємо теорему, яка приводить до поняття ряду Фур'є.

Теорема. Якщо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos \frac{k\pi t}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin \frac{k\pi t}{l} \quad (1)$$

рівномірно збігається до функції $f(t)$ на відрізку $[-l; l]$, то

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для будь-якої інтегровної функції $f(t)$ коефіцієнти a_k і b_k , визначені рівностями (2), називають коефіцієнтами Фур'є функції $f(t)$, а тригонометричний ряд із цими коефіцієнтами – її рядом Фур'є. Позначають

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos \frac{k\pi t}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin \frac{k\pi t}{l}, \quad t \in [-l; l]. \quad (3)$$

Знак наближеної рівності \approx можна замінити знаком рівності зокрема тоді, коли функція $f(t)$ диференційовна на відрізку $[-l; l]$, за винятком, можливо, скінченної кількості точок.

Якщо функція $f(t)$ парна, то

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для непарної функції функції $f(t)$ дістаємо

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

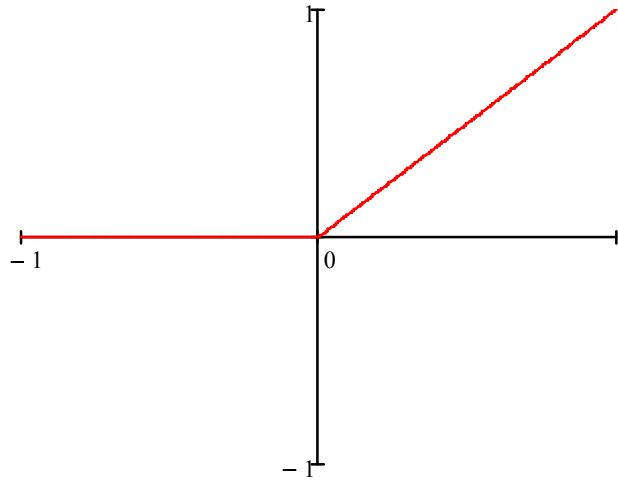
Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є задані функції на вказаних проміжках:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi;$$

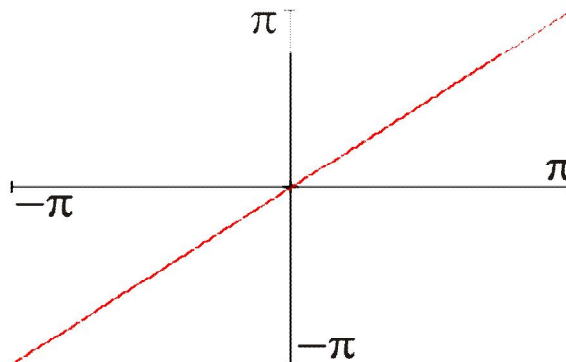
$$\text{в) } f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Розв'язання. Графіки заданих функцій зображено на рис. 2.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1; \end{cases}$$



$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$



$$f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

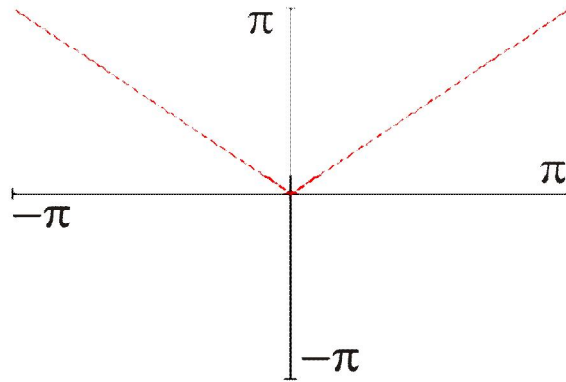


Рис 2.

а) За формулами (2) знаходимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 0 dt + \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{k\pi t}{1} dt = \int_{-1}^0 0 \cos k\pi t dt + \int_0^1 t \cos k\pi t dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad dt = du \\ \cos k\pi t dt = dv \quad \frac{1}{k\pi} \sin k\pi t = v \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t \sin k\pi t}{k\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi t dt = 0 + \frac{\cos k\pi t}{k^2 \pi^2} \Big|_0^1 = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

парному k коефіцієнти $a_{2k} = 0$, $k = \overline{1; \infty}$, для непарних значень отримуємо:

$$a_{2k-1} = \frac{-2}{\pi^2 (2k-1)^2}, \quad k = \overline{1; \infty}.$$

$$b_k = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{k\pi t}{1} dt = \int_{-1}^0 0 \sin k\pi t dt + \int_0^1 t \sin k\pi t dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad dt = du \\ \sin k\pi t dt = dv \quad -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi t = v \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t \cos k\pi t}{k\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi t dt = \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} + \frac{1}{k^2 \pi^2} \sin k\pi t \Big|_0^1 = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Знайдені коефіцієнти підставляємо у формулу (3). Оскільки $f(t)$ скрізь диференційовна на $[-1; 1]$, крім однієї лише точки $t = 0$, у якій існують лівостороння та правостороння похідні, то $f(t) = \frac{1}{4} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2 \pi^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi t}{k\pi}$. Графік правої частини цієї рівності для $k = \overline{1; 20}$ зображено на рис. 3.

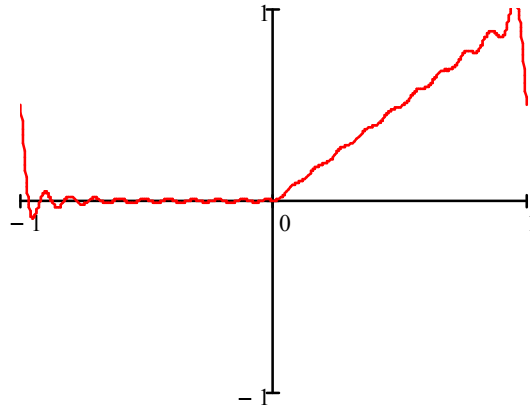


Рис. 3.

б) Задана функція непарна, тому достатньо обчислити лише коефіцієнти b_k . Скористаємося формулою (5).

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{k\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad dt = du \\ \sin kt dt = dv \quad -\frac{1}{k} \cos kt = v \end{array} \right| = -\frac{t}{k} \cos kt \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kt dt = -\frac{\pi}{k} \cos k\pi + \frac{1}{k^2} \sin kt \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{k+1} \pi}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \pi}{k} \sin kt$. Графік правої частини цієї рівності при $k = \overline{1; 20}$

зображено на рис. 4.

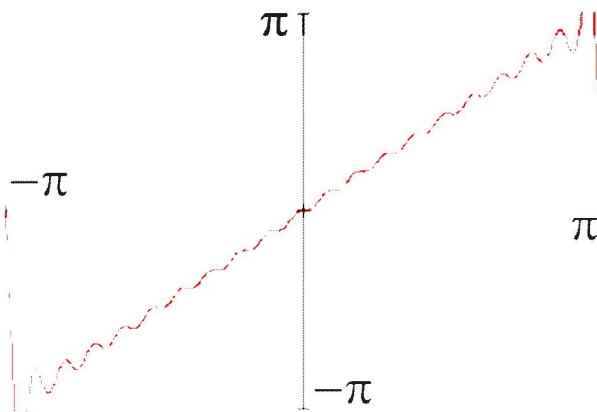


Рис 4.

в) Задана функція парна, тому достатньо обчислити лише коефіцієнти a_k . Скористаємося формулою (4).

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos \frac{k\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad dt = du \\ \cos kt dt = dv \quad \frac{1}{k} \sin kt = v \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2t}{\pi k} \sin kt \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \sin kt dt = \frac{2}{\pi k^2} \left((-1)^k - 1 \right), \text{ тобто } a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}, a_{2k} = 0, k = \overline{1; \infty}.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos \frac{0\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cdot 1 dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_0^\pi = \pi. \text{ Отже, } f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2}.$$

На рис. 5 зображено графік при $k = \overline{1; 3}$. Слід відзначити досить високу (в порівнянні з попередніми прикладами) швидкість збіжності ряду до початкової функції.

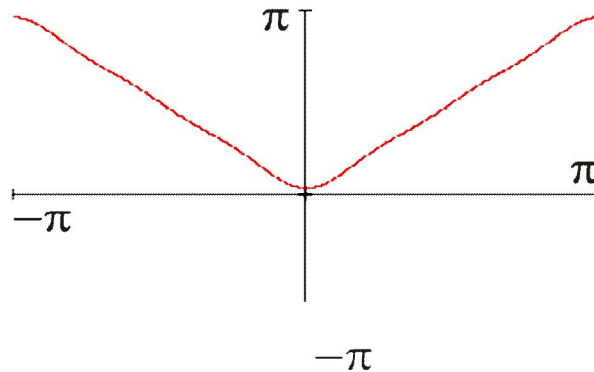


Рис. 5.

Природно вважати, що сигнали, які відображають фізичні величини і в подальшому певним чином опрацьовуються, мають значення в області дійсних чисел. Однак, на практиці частіше користуються розкладом у комплексний ряд Фур'є, що пов'язано з його порівняною простотою. Крім того, у випадку опрацювання сигналу, який описується комплексним рядом Фур'є, його зображення використовують безпосередньо, без будь-яких додаткових перетворень. Відповідні комп'ютерні програми теж значно спрощуються.

Вище було показано розклад у ряд Фур'є періодичних сигналів. Якщо сигнал неперіодичний, або є одиночним імпульсом, то розклад такого сигналу на обмеженому інтервалі не відповідає дійсності. Проте, для теорії передавання інформації важливою є теорія більш загального аналізу Фур'є, включаючи аналіз неперіодичних та згасаючих сигналів.

Якщо вважати неперіодичний сигнал як періодичний з нескінченно великим періодом, то такий сигнал можна розглядати як періодичний. Якщо сигнал виражено функцією $f(t)$ в часовій області, а в частотній області – $F(\omega)$, де ω – кутова частота, то зв'язок між функціями $f(t)$ і $F(\omega)$ описується співвідношеннями

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6)$$

В техніці зв'язку спектр сигналу часто свідомо скорочують. Це обумовлено тим, що апаратура та лінії зв'язку мають обмежену смугу пропускання частот. Скорочення спектру виконується виходячи з допустимих спотворень сигналу. Наприклад, для передачі звуку при телефонному зв'язку діапазон задають в межах від 300 до 3400 Гц, хоча сам початковий сигнал займає спектр до 15...17 кГц. Необхідна ширина спектра телевізійного сигналу визначається вимогами щодо чіткості зображення. При стандарті в 625 рядків верхня частота сигналу досягає 6 МГц.

Найбільш загальною та наочною характеристикою сигналу є його об'єм $V_c = T_c F_c D_c$,

де T_c – тривалість сигналу, F_c – ширина спектру (діапазон частот в межах якого зосереджена його основна енергія), D_c – динамічний діапазон сигналу (відношення найбільшої миттєвої потужності сигналу до тієї найменшої потужності, яку необхідно відрізнити від нуля при заданій якості передачі).

Досвід роботи автора показує, що вивчення рядів Фур'є саме в такому розрізі сприяє зацікавленості студентів та покращує засвоєння матеріалу.

Список використаної літератури

1. Жураковський Ю П., Полторах В. П. Теорія інформації та кодування: Підручник для студентів технічних вузів. – К.: Вища школа, 2001. – 255 с.
2. Игнатов В. А. Теория информации и передачи сигналов. 2-е изд. – М.: Радио и связь, 1991. – 280 с.
3. Ричард Рид. Основы теории передачи информации.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 320 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. – К.: Вища шк., 2005. – 510 с.
5. Юкио Сато. Обработка сигналов. Первое знакомство. — М., 2002. – 175 с.