УДК 378

Томащук О. П., Репета В. К., Лещинський О. Л.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ “РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ”

У статті розглянуто методичні аспекти викладання теми “Розв’язування показникових рівнянь” у закладах загальної середньої освіти. Надано рекомендації щодо ознайомлення учнів із основними методами розв’язування показникових рівнянь. Розкрито зміст кожного методу, вказано особливості використання, проілюстровано застосування кожного методу на конкретних прикладах. Наведено приклади розв’язань деяких нестандартних показникових рівнянь і рівнянь з параметрами. Саме ці види показникових рівнянь додатково доцільно розглянути у профільних класах.

Ключові слова: *математика, методика викладання, рівняння, показникове рівняння, методи розв’язування показникових рівнянь, нестандартні рівняння, рівняння з параметрами.*

Одним із важливих умінь, яким повинні володіти випускники закладів загальної середньої освіти, є вміння розв’язувати показникові рівняння. Це вміння досить часто перевіряють під час проведення зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики. Результати ЗНО по завданням, що стосуються розв’язування показникових рівнянь, не завжди є втішними. Наприклад, тест ЗНО з математики 2015 року містив завдання: “Розв’яжіть показникове рівняння $4^x = 8$”. Це завдання правильно розв’язали 40,8% абітурієнтів. Здавалося б, що це непоганий результат. Але якщо врахувати, що це завдання належить до завдань з вибором однієї правильної відповіді із п’яти запропонованих варіантів, тобто абітурієнти могли не розв’язувати це рівняння безпосередньо, а підставляти замість x запропоновані варіанти, то результат є не таким уже і добрим. Цікаво, що значна кількість абітурієнтів в якості правильної відповіді вибирала варіанти: 2 (22%) і $\frac{1}{2}$ (21%). Результати по іншим завданням тестів ЗНО з математики різних років, присвячених розв’язуванню показникових рівнянь, не є кращими. Щоби встановити причини неналежного рівня володіння абітурієнтами вмінням розв’язувати показникові рівняння, ми проаналізували діючі шкільні підручники з предметів “Математика” (рівень стандарту) і “Алгебра і початки аналізу” (профільний рівень) на предмет висвітлення у них теми “Розв’язування показникових рівнянь”. У підручниках [1], [3] і [6] чітко не виділені назви основних методів розв’язування показникових рівнянь, поверхнево розкрито їх зміст та особливості використання. Разом з тим приклади із використанням деяких із основних методів розв’язування показникових рівнянь розглянуто. У підручниках [2], [4] і [5] деякі із основних методів розв’язування показникових рівнянь виділені чітко, розглянуто приклади, які ілюструють використання цих методів, але зміст методів та їх особливості також розкриті поверхнево. Тобто, навіть знаючи назви основних методів розв’язування показникових рівнянь, учні не завжди зможуть зорієнтуватися, який саме метод використати в процесі розв’язування певного показникового рівняння. Зрозуміло, що зазначені недоліки шкільних підручників не справлять істотного негативного впливу на процес формування в учнів вміння розв’язувати показникові рівняння, якщо вчителі математики в процесі навчання використовуватимуть не лише матеріал шкільних підручників, але й інші додаткові матеріали. І в цьому плані корисною для них може бути ця стаття.

Мета статті – систематизувати основні методи розв’язування показникових рівнянь та надати методичні рекомендації вчителям математики щодо ознайомлення учнів із цими методами в процесі навчання.

Ознайомлення учнів із темою “Розв’язування показникових рівнянь” доцільно розпочати із повторення основних властивостей степенів. Це пов’язано з тим, що в процесі розв’язування показникових рівнянь ці властивості досить часто використовуються. Після цього ввести поняття показникового рівняння. Показниковим називають рівняння, в якому змінна входить лише до показників степенів при сталих основах. Навести приклади показникових рівнянь.

Зазначити, що загального методу розв’язування показникових рівнянь немає. Однак можна виділити окремі методи, що використовують при розв’язуванні показникових рівнянь.

1. Метод зведення обох частин показникового рівняння до степенів з однаковими основами. Зміст цього методу полягає в тому, що використовуючи властивості степенів, показникове рівняння зводять до рівняння вигляду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, яке рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Наголосити учням, що рівняння вигляду

$$a^x = b,\quad a^{f(x)} = b,\quad a^{f(x)} = b^{g(x)}\ (a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1)$$

розв’язують зазначеним методом. Однак у деяких випадках потрібно використовувати логарифми, з якими вони ознайомляться пізніше.

Пояснити, що оскільки $a^x > 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, то рівняння вигляду $a^x = b$ і $a^{f(x)} = b$ не мають коренів, коли $b \leq 0$.

Для розкриття змісту цього методу використати приклади.

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

а) $2^x = 16$; *б)* $(0,3)^x = 1$; *в)* $5^x = -5$; *г)* $9^{-x} = \dfrac{1}{3}$; *д)* $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$;

е) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3x^2+6x-14} = 25 \cdot (0,2)^5 \cdot \sqrt[3]{625}$; *є)* $\sqrt{8^x \cdot \sqrt[3]{64^x \cdot 0,5^{\frac{1}{x}}}} = 2\sqrt[3]{16}$.

Розв’язання. а) Оскільки $16 = 2^4$, то $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$.

б) $(0,3)^x = 1 \Leftrightarrow (0,3)^x = (0,3)^0 \Leftrightarrow x = 0$.

в) Оскільки $5^x > 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, то рівняння $5^x = -5$ розв’язків не має.

Розв’язуючи приклади г) – є), наголосити, що при використанні розглядуваного методу часто доводиться перетворювати не лише одну із частин показникового рівняння, а обидві частини, зводячи їх до степенів із однаковими основами.

г) Подавши ліву і праву частини рівняння $9^{-x} = \dfrac{1}{3}$ у вигляді степеня з основою 3, одержимо:

$$9^{-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{-x} = 3^{-1} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

д) Подамо обидві частини заданого рівняння у вигляді степеня з основою 3: $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt{\left(3^3\right)^{x-1}} = \sqrt{3^{3x-3}} = 3^{\frac{3x-3}{2}}$; $\sqrt[3]{9^{2-x}} = \sqrt[3]{\left(3^2\right)^{2-x}} = \sqrt[3]{3^{4-2x}} = 3^{\frac{4-2x}{3}}$.

Отже, маємо:

$$\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{2}} = 3^{\frac{4-2x}{3}} \Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} = \frac{4-2x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{13}.$$

е) Подамо обидві частини заданого рівняння у вигляді степеня з основою 5: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3x^2+6x-14} = 25\cdot(0,2)^5\cdot\sqrt[3]{625} \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{3}\left(3x^2+6x-14\right)} = 5^2\cdot\left(5^{-1}\right)^5\cdot\sqrt[3]{5^4} \Leftrightarrow$ $5^{x^2+2x-\frac{14}{3}} = 5^2\cdot 5^{-5}\cdot 5^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow 5^{x^2+2x-\frac{14}{3}} = 5^{-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x^2+2x-\frac{14}{3} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=1. \end{array}\right.$$

є) Подавши праву і ліву частини заданого рівняння у вигляді степеня з основою 2, одержимо: $\sqrt{8^x\cdot\sqrt[3]{64^x\cdot 0,5^{\frac{1}{x}}}} = 2\sqrt[3]{16} \Leftrightarrow \sqrt{2^{3x}\cdot\sqrt[3]{2^{6x}\cdot 2^{-\frac{1}{x}}}} = 2\sqrt[3]{2^4} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{2^{3x}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-\frac{1}{3x}}} = 2\cdot 2^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \left(2^{5x-\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}\left(5x-\frac{1}{3x}\right)} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(5x-\frac{1}{3x}\right) = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{15x^2-14x-1}{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2-14x-1=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{15}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Відповідь: а) 4; б) 0; в) $\varnothing$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{17}{13}$; е) –3; 1; є) $-\frac{1}{15}$; 1.

У класах рівня стандарту достатньо обмежитися розглядом прикладів а)-е), а у класах профільного рівня доцільно додатково розглянути складніший приклад є).

Після вивчення теми “Логарифми” потрібно пояснити учням як розв’язувати рівняння вигляду $a^x=b$, $a^{f(x)}=b$, $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ ($a>0$, $b>0$, $a\neq 1$) у тих випадках, коли число b не можна подати у вигляді степеня з раціональним показником з основою а. Зазначити, що існують два способи розв’язування таких рівнянь: використання основної логарифмічну тотожність $a^{\log_a b}=b$ ($a>0$, $b>0$, $a\neq 1$) або логарифмування обох частин рівняння за певною основою. Наприклад, якщо $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, то

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)}=\left(a^{\log_a b}\right)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=\log_a b\cdot g(x)$$

або

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=\log_a b\cdot g(x).$$

Для засвоєння цієї інформації можна запропонувати учням розв’язати рівняння на зразок таких: $2^x=9$, $3^{5-2x}=4$, $7^{2x+1}=5^{x-3}$.

2. Метод винесення спільного множника за дужки. Зазначити учням, що цей метод використовують для розв’язування рівнянь вигляду $c_1\cdot a^{f(x)+k_1}+c_2\cdot a^{f(x)+k_2}+...+c_n\cdot a^{f(x)+k_n}=b$, де $c_1,c_2,...,c_n$, $k_1,k_2,...,k_n,a,b$ – сталі числа ($a>0$). Зміст цього методу розкрити на конкретних прикладах.

Приклад 2. Розв’язати рівняння:

а) $4\cdot 3^x+5\cdot 3^{x-2}-7\cdot 3^{x-1}=180$; б) $(0,5)^{1-2x^3}-(0,25)^{1-x^3}+(0,5)^{3-2x^3}=24$.

Розв’язання. а) Винісши у лівій частині рівняння за дужки вираз 3^{x-2} і виконавши нескладні перетворення, одержимо:

$$4\cdot 3^{x}+5\cdot 3^{x-2}-7\cdot 3^{x-1}=180 \Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot\left(4\cdot 3^{2}+5-7\cdot 3^{1}\right)=180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 20=180 \Leftrightarrow 3^{x-2}=9 \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^{2} \Leftrightarrow x=4.$$

Наголосити учням, що за дужки краще виносити степінь у показнику якого є найменшим сталий доданок (за умови, що основа а степеня є більшою за 1). Це дозволить уникнути операцій з дробами. У наведеному прикладі серед показників x, $x-2$, $x-1$ найменший сталий доданок містить показник $x-2$. Тому за дужки виносили вираз 3^{x-2}. Якби за дужки винесли степінь 3^{x}, то одержали б рівняння з дробами: $3^{x}\cdot\left(4+\frac{5}{9}-\frac{7}{3}\right)=180$.

б) Подамо кожен доданок у лівій частині рівняння у вигляді степеня з основою 2 та винесемо за дужки вираз $2^{2x^{3}-3}$:

$$\left(0,5\right)^{1-2x^{3}}-\left(0,25\right)^{1-x^{3}}+\left(0,5\right)^{3-2x^{3}}=24 \Leftrightarrow 2^{2x^{3}-1}-2^{2x^{3}-2}+2^{2x^{3}-3}=24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^{3}-3}\left(2^{2}-2^{1}+1\right)=24 \Leftrightarrow 2^{2x^{3}-3}\cdot 3=24 \Leftrightarrow 2^{2x^{3}-3}=8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^{3}-3=3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}.$$

Відповідь: а) 4; б) $\sqrt[3]{3}$.

Далі потрібно зазначити учням, що досить часто степені, присутні у показниковому рівнянні, не можна звести степенів з однаковими основами (без використання основної логарифмічної тотожності). І тоді у нагоді може стати метод зведення степенів до однакових показників.

3. Метод зведення степенів до однакових показників. Зміст цього методу полягає в тому, що показникове рівняння зводять до вигляду $c\cdot a^{f(x)}=d\cdot b^{f(x)}$, де a,b,c,d – сталі числа і $a>0$, $b>0$. Після цього обидві частини рівняння ділять на $a^{f(x)}$ або $b^{f(x)}$. Учням потрібно пояснити, що після ділення на $a^{f(x)}$ або $b^{f(x)}$ одержують рівняння, рівносильне попередньому, оскільки $a^{f(x)}\neq 0$ і $b^{f(x)}\neq 0$ для всіх допустимих значень змінної х.

Зміст цього методу розкрити на конкретних прикладах.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$\textit{а)}\ 3^{x}-5^{2x}=0;\ \textit{б)}\ 5^{2x-4}=\left(\frac{1}{49}\right)^{2-x};\ \textit{в)}\ 6\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=5\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

Розв'язання. а) Як бачимо, присутні у цьому рівнянні степені мають основи 3 і 5, які без використання основної логарифмічної тотожності не можна звести до однакових основ. Тому скористаємося методом зведення степенів до однакових показників:

$$3^{x}-5^{2x}=0 \Leftrightarrow 3^{x}=5^{2x} \Leftrightarrow 3^{x}=25^{x}.$$

Оскільки $25^{x}\neq 0$ для всіх $x\in\mathbf{R}$, то поділивши ліву і праву частини останнього рівняння на 25^{x}, одержимо рівносильне йому рівняння:

$$\frac{3^x}{25^x}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{25}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0.$$

б) Зведемо присутні у рівнянні степені до степенів з однаковими показниками: $5^{2x-4}=\left(\frac{1}{49}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 5^{2x-4}=\left(7^{-2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 5^{2x-4}=7^{2x-4}$.

Поділимо обидві частини останнього рівняння на 7^{2x-4}. У результаті одержимо рівносильне рівняння $\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-4}=1$, звідки $2x-4=0$, $x=2$.

в) Без використання основної логарифмічної тотожності степені з основами 4 і 9 не можна звести до однакових основ. Тому скористаємося методом зведення степенів до однакових показників. Спочатку згрупуємо у лівій частині рівняння степені з основою 9, а у правій – з основою 4, після чого використаємо метод винесення спільного множника за дужки. При цьому виносити за дужки будемо степені з однаковими показниками:

$$6\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=5\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}+\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}=5\cdot 4^{x+1}-6\cdot 4^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^x\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 9^2+\frac{1}{2}\cdot 9\right)=4^x\cdot\left(5\cdot 4-6\right) \Leftrightarrow 9^x\cdot\frac{63}{2}=4^x\cdot 14$$

Оскільки $4^x\neq 0$ для всіх $x\in\mathbf{R}$, то поділивши обидві частини останнього рівняння на 4^x, одержимо рівносильне йому рівняння $\frac{9^x}{4^x}\cdot\frac{63}{2}=14$, звідки маємо: $\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{4}{9}$, $x=-1$.

Відповідь: а) 0; б) 2; в) –1.

Далі потрібно зазначити учням, що досить часто при розв'язуванні показникових рівнянь використовують метод заміни.

4. Метод введення заміни. Якщо показникове рівняння має вигляд $F\left(a^{f(x)}\right)=0$, то ввівши заміну $a^{f(x)}=t$, його зводять до рівняння $F(t)=0$.

Зміст методу розкрити на конкретних прикладах.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: а) $4^{x-1}-17\cdot 2^{x-3}+1=0$; б) $3^x-3^{1-x}=2$.

Розв'язання. а) Спочатку перетворимо задане рівняння:

$$4^{x-1}-17\cdot 2^{x-3}+1=0 \Leftrightarrow 2^{2x-2}-17\cdot 2^{x-3}+1=0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{2^2}-17\cdot\frac{2^x}{2^3}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{4}-17\cdot\frac{2^x}{8}+1=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-17\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(2^x\right)^2-17\cdot 2^x+8=0.$$

Увівши заміну $2^x=t$, одержимо квадратне рівняння $2t^2-17t+8=0$, коренями якого є числа $t=8$ і $t=\frac{1}{2}$.

З урахуванням заміни одержимо:

$$\textit{1)}\ 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3; \quad \textit{2)}\ 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

Дуже часто учні роблять таку помилку: звівши задане рівняння до рівняння $2 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$, тобто звівши ліву частину рівняння до алгебраїчної суми степенів з однаковими основами, далі починають використовувати метод винесення спільного множника за дужки і в результаті не можуть далі просунутися в процесі розв'язування. Тому учням потрібно наголосити, що метод винесення спільного множника за дужки використовують тоді, коли маємо алгебраїчну суму степенів з однаковими основами і показники цих степенів відрізняються один від одного лише сталими доданками.

б) Запишемо рівняння у вигляді $3^x - \dfrac{3^1}{3^x} = 2$. Помножимо обидві частини рівняння на 3^x. Оскільки $3^x \neq 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, то одержимо рівносильне рівняння: $\left(3^x\right)^2 - 3 = 2 \cdot 3^x$. Увівши заміну $3^x = t$, одержимо квадратне рівнянню $t^2 - 2t - 3 = 0$, коренями якого є числа: $t = -1$, $t = 3$.

З урахуванням заміни маємо: 1) $3^x = -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$; 2) $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Відповідь: а) –1; 3; б) 1.

Далі потрібно зазначити учням, що з використанням методу заміни розв'язують так звані однорідні показникові рівняння. Рівняння вигляду $c_1 a^{2x} + c_2 a^x b^x + c_3 b^{2x} = 0$ ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$) називають однорідним показниковим рівнянням. Його розв'язують шляхом ділення обох частин рівняння на a^{2x} або b^{2x}. Зокрема, якщо поділити обидві частини рівняння на b^{2x}, то одержують рівносильне йому рівняння $c_1 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x} + c_2 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^x + c_3 = 0$, яке після введення заміни $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = t$ зводять до квадратного рівняння $c_1 t^2 + c_2 t + c_3 = 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$.

Розв'язання. Рівняння містить степені з трьома різними основами. Перетворимо його, звівши до степенів з двома різними основами: $9^x + 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0$. Останнє рівняння є однорідним показниковим рівнянням. Поділивши його ліву і праву частини на 2^{2x}, одержимо рівносильне йому рівняння $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Увівши заміну $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t$, одержимо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$, коренями якого є числа: $t = 1$, $t = -2$. З урахуванням заміни одержимо:

$$\textit{1)}\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \textit{2)}\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Відповідь***: 0.***

5. Використання властивості монотонності функції. Ознайомлення учнів із цим методом потрібно розпочати із формулювання таких тверджень:

1. Якщо функція $y = f(x)$ зростає на проміжку Р, а функція $y = g(x)$ спадає на цьому проміжку, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня на проміжку Р.

2. Якщо функція $y = f(x)$ зростає або спадає на проміжку Р, то рівняння $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) має не більше одного кореня на цьому проміжку.

До кожного твердження обов'язково навести графічну ілюстрацію. Зміст цього методу розібрати на конкретних прикладах.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: а) $5^{x-2} = 8 - x$; б) $3^x + 4^x = 5^x$.

Розв'язання. а) Функція $y = 5^{x-2}$ зростає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, а функція $y = 8 - x$ спадає на цьому інтервалі. Тому згідно із твердженням 1 рівняння $5^{x-2} = 8 - x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ має не більше одного кореня. Легко переконатися, що цим коренем є число $x = 3$.

Потрібно зауважити учням, що зазначений метод часто використовують при розв'язуванні рівнянь змішаного виду. Особливістю цього методу також є те, що корінь рівняння (якщо він існує) знаходять шляхом добору, після чого на основі твердження 1 або твердження 2 роблять висновок, що інших коренів рівняння не має.

б) Оскільки $5^x \neq 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, то поділивши ліву і праву частини заданого рівняння на 5^x, одержимо рівносильне йому рівняння: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Функція $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ є спадною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, як сума двох спадних функцій. Тому за твердженням 2 рівняння $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ має не більше одного кореня. Легко переконатися, що цим коренем є число $x = 2$.

Відповідь: а) 3; б) 2.

6. Графічний метод. Слід зазначити учням, що іноді показникове рівняння вдається розв'язати, використавши графічний метод. Пояснити, що для того, щоб розв'язати графічно рівняння $f(x) = g(x)$, потрібно в одній системі координат побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Абсциси точок перетину цих графіків є коренями рівняння $f(x) = g(x)$. Також наголосити, що графічний метод часто використовують для розв'язування рівнянь змішаного виду.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $(0,5)^x + 1,5x = 1$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $(0,5)^x = -1,5x + 1$. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = (0,5)^x$ і $y = -1,5x + 1$ (рис. 1). Ці графіки перетинаються лише в двох точках з абсцисами: $x = -2$ і $x = 0$. Отже, $x = -2$ і $x = 0$ – корені заданого рівняння.

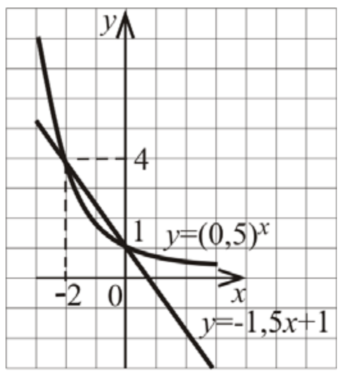

Рис. 1

Відповідь***:*** -2***; 0.***

Наступні два методи є менш вживаними, тому їх доцільно розглянути лише у профільних класах.

7. Метод ділення на показниковий вираз.

Приклад 8. Розв’язати рівняння $4^{x+12}\cdot 5^{5x-8}=20^{3x+2}$.

Розв’язання. Особливістю цього рівняння є те, що $(x+12)-(3x+2)=-(2x-10)$ і $(5x-8)-(3x+2)=2x-10$, тобто різниці показників степенів є протилежними за знаками. Поділимо обидві частини заданого рівняння на 20^{3x+2}. Оскільки $20^{3x+2}\neq 0$ для всіх $x\in\mathbf{R}$, то одержимо рівносильне рівняння: $\frac{4^{x+12}\cdot 5^{5x-8}}{20^{3x+2}}=1 \Leftrightarrow \frac{4^{x+12}\cdot 5^{5x-8}}{4^{3x+2}\cdot 5^{3x+2}}=1 \Leftrightarrow$ $\frac{5^{2x-10}}{4^{2x-10}}=1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-10}=\left(\frac{5}{4}\right)^{0} \Leftrightarrow 2x-10=0 \Leftrightarrow x=5$.

Відповідь: 5.

8. Метод розкладання на множники. Іноді показникове рівняння вдається розв’язати, використавши метод розкладання на множники.

Приклад 9. Розв’язати рівняння:

$$\textit{а)}\ x\cdot 2^{x}-8x+2^{x+1}-16=0;\ \textit{б)}\ 48\cdot 12^{x}-4\cdot 3^{x+1}-9\cdot 4^{x+2}+36=0.$$

Розв’язання. а) Використавши спосіб групування, розкладемо вираз у лівій частині рівняння на множники:

$$x\cdot 2^{x}-8x+2^{x+1}-16=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(2^{x}-8\right)+2\cdot\left(2^{x}-8\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x}-8\right)\cdot\left(x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{x}-8=0,\\ x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

б) Спочатку перетворимо вираз у лівій частині рівняння, а потім, використовуючи спосіб групування, розкладемо його на множники:

$$48\cdot 12^{x}-4\cdot 3^{x+1}-9\cdot 4^{x+2}+36=0 \Leftrightarrow 48\cdot 12^{x}-12\cdot 3^{x}-9\cdot 16\cdot 4^{x}+36=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(48\cdot 12^{x}-12\cdot 3^{x}\right)+\left(-9\cdot 16\cdot 4^{x}+36\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\cdot 3^{x}\left(4\cdot 4^{x}-1\right)-36\cdot\left(4\cdot 4^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{x+1}-1\right)\cdot\left(12\cdot 3^{x}-36\right)=0 \Leftrightarrow 12\cdot\left(4^{x+1}-1\right)\cdot\left(3^{x}-3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4^{x+1}-1=0,\\ 3^{x}-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Відповідь***: а)*** -2***; 3; б)*** -1***; 1.***

У профільних класах також доцільно розглянути деякі нестандартні рівняння та рівняння з параметрами. Саме рівняння з параметрами, в тому числі і показникові рівняння з параметрами, дуже часто є присутніми у відкритій частині тестів ЗНО з математики.

Розглянемо деякі нестандартні рівняння.

Приклад 10. Розв’язати рівняння :

$$\textit{а)}\ 4^{x}+\left(x-1\right)\cdot 2^{x}+2x-6=0;\ \textit{б)}\ x^{4}-2x^{2}+2=2^{x}-4^{x-1}.$$

Розв'язання. а) Позначимо $2^x = t$ і розв'яжемо одержане рівняння $t^2 + (x-1)\cdot t + 2x - 6 = 0$ відносно t:

$$D = (x-1)^2 - 4\cdot(2x-6) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2;$$

$$t_1 = \frac{-(x-1)-(x-5)}{2} = 3 - x,\ t_2 = \frac{-(x-1)+(x-5)}{2} = -2.$$

Тоді $2^x = 3 - x$, $2^x = -2$. Друге рівняння коренів не має. Розв'яжемо рівняння $2^x = 3 - x$. Функція $y = 2^x$ зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$, а функція $y = 3 - x$ спадає на цьому проміжку. Тому рівняння $2^x = 3 - x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ має не більше одного кореня. Легко переконатися, що цим коренем є число $x = 1$.

б) Перетворимо задане рівняння, виділивши повні квадрати:

$$\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) + \left(\left(2^{x-1}\right)^2 - 2\cdot 2^{x-1} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 + \left(2^{x-1} - 1\right)^2 = 0.$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли одночасно $x^2 - 1 = 0$ і $2^{x-1} - 1 = 0$. Тому останнє рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ 2^{x-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Відповідь: а) 1; б) 1.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $4^x - a(a+1)\cdot 2^x + a^3 = 0$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання. ОДЗ для параметра a: $a \in \mathbf{R}$. Уведемо заміну $2^x = t$. Тоді задане рівняння набуває вигляду $t^2 - a(a+1)t + a^3 = 0$. Його дискримінант

$$D = a^2\cdot(a+1)^2 - 4a^3 = a^2\cdot\left(a^2 + 2a + 1 - 4a\right) = a^2\cdot(a-1)^2.$$

Отже, завжди $D \geq 0$.

Розглянемо два випадки:

I. $D = 0 \Leftrightarrow a^2\cdot(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1. \end{array}\right.$ ***Тоді*** $t = \dfrac{a(a+1)}{2}$.

а) Якщо $a = 0$***, то*** $t = 0$ ***і тоді маємо рівняння*** $2^x = 0$***, яке не має коренів.***

б) Якщо $a = 1$***, то*** $t = \dfrac{1\cdot 2}{2} = 1$ ***і тоді маємо рівняння*** $2^x = 1$***, звідки*** $x = 0$.

II. $D > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbf{R}\setminus\{0;1\}$***. У цьому випадку рівняння*** $t^2 - a(a+1)t + a^3 = 0$ ***має два різні корені*** t_1 ***і*** t_2***:***

$$t_1 = \frac{a(a+1) - a(a-1)}{2} = a,\ t_2 = \frac{a(a+1) + a(a-1)}{2} = a^2.$$

Урахувавши заміну, одержимо два рівняння: $2^x = a$, $2^x = a^2$.

а) Якщо $a < 0$, то рівняння $2^x = a$ не має коренів, а коренем рівняння $2^x = a^2$ є: $x = \log_2 a^2 = 2\log_2(-a)$.

б) Якщо $a > 0$, то обидва рівняння мають корені:

$$2^x = a \Leftrightarrow x = \log_2 a; \qquad 2^x = a^2 \Leftrightarrow x = \log_2 a^2 \Leftrightarrow x = 2\log_2 a.$$

Відповідь***:*** $\varnothing$***, коли*** $a = 0$***; 0, коли*** $a = 1$***;*** $2\log_2(-a)$***, коли*** $a \in (-\infty; 0)$***;***

$\log_2 a$***,*** $2\log_2 a$***, коли*** $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Зрозуміло, що оволодіння учнями вмінням розв'язувати показникові рівняння неможливе без самостійного розв'язування різних показникових рівнянь. З цією метою доцільно запропонувати учням задачі для самостійного розв'язування. Розв'язуючи їх, вони зможуть більш ґрунтовно засвоїти розглянуті вище методи розв'язування показникових рівнянь.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. ***Розв'язати рівняння: 1)*** $5^x = 125$***; 2)*** $7^x = 1$***; 3)*** $4^x = -4$***; 4)*** $(0,5)^x = \frac{1}{16}$***;***

5) $10^{1-2x} = 0{,}1$***; 6)*** $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 8$***; 7)*** $3^{x^2-2x-0,5} = 9\sqrt{3}$***; 8)*** $2^{x+3} = 7$***; 9)*** $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{16^{x+2}}$***;***

10) $\left(2^{x-3}\right)^{x+4} = (0,5)^x \cdot 4^{x-4}$***; 11)*** $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{0,25^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1$***;***

12) $2 \cdot 15^x + 15^{x-1} - 65 \cdot 15^{x-2} = 400$***; 13)*** $7^x - 3^{2x} = 0$***; 14)*** $4^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$***;***

15) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$***; 16)*** $9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$***; 17)*** $5^x + 5^{2-x} = 26$***;***

18) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$***; 19)*** $7^{6-x} = x + 2$***; 20)*** $4^x + 9^x = 25^x$***; 21)*** $2^x = 5^x - 3$***;***

22) $3^x = 4x + 1$***; 23)*** $2^{3x} \cdot 3^{x+2} = 6^{2x+1}$***; 24)*** $x \cdot 3^x - 9x + 3^{x+1} - 27 = 0$***;***

25) $4^x + (x-13) \cdot 2^x - 2x + 22 = 0$***; 26)*** $\sqrt{x^2 + x - 2} + 9^{x+2} + 1 = 18 \cdot 3^x$.

2. Залежно від значень параметра а розв'язати рівняння:

1) $4^{-x} - (a+3)2^{-x} + 4a - 4 = 0$***; 2)*** $9^x - 2(a+1)3^x + a^2 + 2a = 0$.

Висновки. Для того, щоб учні могли оволодіти умінням розв'язувати показникові рівняння потрібно їх ознайомити із основними методами розв'язування, розкрити їх зміст, вказати особливості застосування, проілюструвати використання цих методів на конкретних прикладах та підібрати задачі, за допомогою яких вони самостійно засвоюватимуть ці методи. Саме такий підхід до формування в учнів уміння розв'язувати показникові рівняння реалізований у цій статті.

Вважаємо, що викладений вище матеріал буде корисним для учнів на етапі підготовки до проходження ЗНО з математики та для вчителів, які навчатимуть учнів розв'язувати показникові рівняння.

Використана література:

1. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х. : Гімназія, 2011. – 448 с.
2. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – К. : Генеза, 2019. – 416 с.
3. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 352 с.
4. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Видавничий дім "Освіта", 2019. – 272 с.
5. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер. – К. : Генеза, 2019. – 304 с.
6. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 208 с.

References:

1. Alhebra. 11 klas: pidruch. dlya zahal′noosvit. navch. zakladiv: akadem. riven′, prof. riven′ / YE. P. Nelin, O. YE. Dolhova. – KH. : Himnaziya, 2011. – 448 s.
2. Alhebra i pochatky analizu (prof. riven′) : pidruch. dlya 11 kl. zakladiv zahal′noyi seredn′oyi osvity / O. S. Ister., O. V. Yerhina. – K. : Heneza, 2019. – 416 s.
3. Alhebra i pochatky analizu: prof. riven′ : pidruch. dlya 11 kl. zakladiv zahal′noyi seredn′oyi osvity / A. H. Merzlyak, D. A. Nomirovs′kyy, V. B. Polons′kyy ta in. – KH. : Himnaziya, 2019. – 352 s.
4. Matematyka: alhebra i pochatky analizu ta heometriya, riven′ standartu: pidruch. dlya 11 kl. zakladiv zahal′noyi seredn′oyi osvity / H. P. Bevz, V. H. Bevz. – K. : Vydavnychyy dim "Osvita", 2019. – 272 s.
5. Matematyka: alhebra i pochatky analizu ta heometriya, riven′ standartu : pidruch. dlya 11 kl. zakladiv zahal′noyi seredn′oyi osvity / O. S. Ister. – K. : Heneza, 2019. – 304 s.
6. Matematyka: alhebra i pochatky analizu ta heometriya, riven′ standartu : pidruch. dlya 11 kl. zakladiv zahal′noyi seredn′oyi osvity / A. H. Merzlyak, D. A. Nomirovs′kyy, V. B. Polons′kyy ta in. – KH. : Himnaziya, 2019. – 208 s.

Томащук А. П., Репета В. К., Лещинский О. Л. Методика преподавания темы "Решение показательных уравнений".

В статье рассмотрены методические аспекты преподавания темы "Решение показательных уравнений" в учреждениях общего среднего образования. Проведен анализ действующих школьных учебников по предметам "Математика" (уровень стандарта) и "Алгебра и начала анализа" (профильный уровень) на предмет освещения в них темы "Решение показательных уравнений". Систематизированы основные методы решения показательных уравнений и даны методические рекомендации учителям математики по ознакомлению учащихся с этими методами в процессе обучения. Раскрыто содержание каждого метода, указано особенности использования, проиллюстрировано применение каждого метода на конкретных примерах. Указано, какие из методов решения показательных уравнений целесообразно использовать только в классах уровня стандарта, а какие - в профильных классах. Приведены примеры решений некоторых нестандартных показательных уравнений и уравнений с параметрами. Именно эти виды показательных уравнений целесообразно рассмотреть в профильных классах. В конце статьи приведены задачи, которые нужно предложить учащимся для самостоятельного решения. Решая эти задачи, они лучше овладеют основными методами решения показательных уравнений.

Материал статьи будет полезен для учащихся на этапе подготовки к прохождению ВНО по математике и для учителей, которые будут обучать учеников решать показательные уравнения.

Ключевые слова: *математика, методика преподавания, уравнение, показательное уравнение, методы решения показательных уравнений, нестандартные уравнения, уравнения с параметрами.*

Tomashchuk O., Repeta V., Leshchynskyi O. Methods of lecturing the topic of "Solving exponential equations".

One of the main skills that students of high school must possess is a skill of solving exponential equations. Development of this skill during the teaching process can be done only by math teachers with a high enough level of corresponding theoretical and methodical preparation.

The article covers methodical aspects of lecturing the topic of "Solving exponential equations" in high school. Actively used students' books on "Mathematics" (standard level) and "Algebra and calculus" (profile level) subjects are analyzed for depiction of the stated topic. Main methods of solving exponential equations are systemized and methodical recommendations for math teachers on familiarizing students with these methods in the teaching process are given. In particular, the following methods of solving exponential equations are highlighted: 1) the method of reducing both hand-sides to powers with common bases; 2) the method of extracting common multiplier; 3) the method of reducing both hand-sides to powers with common exponents; 4) the method of substitution; 5) the method of using function monotonicity property; 6) graphical method; 7) the method of division by exponential expression; 8) the method of factorization.

Each method is described including its peculiarities and its application is illustrated with concrete problems. It is stated which methods of solving exponential equations are more suitable for classes of standard level and which should be considered in specialized classes. Examples of solving some nonstandard exponential equations and equations with parameters are provided. It is these exponential equations that should be considered in specialized classes. The ending of the article contains problems for home assignment. Doing these tasks will help them better encompass the main methods of solving exponential equations.

The material of this article will be useful for students on stages of preparation for the external independent examination on mathematics and for teachers who will teach students how to solve exponential equations.

Keywords: *mathematics, lecturing methods, equation, exponential equation, methods of solving exponential equations, nonstandard equations, equations with parameters.*

UDC 372.851

Oleksandr Shkolnyi, Yurii Zakhariichenko

MODERN THEMATIC PREPARATION FOR EIA IN MATHEMATICS IN UKRAINE: EQUATIONS AND INEQUALITIES

The relevance of the research on thematic preparation for the EIA in mathematics in modern Ukrainian realities is not in doubt. Based on the experience of systematization of the school course in mathematics, we have proposed dividing the whole course of mathematics into 10 thematic blocks: "Numbers and Expressions", "Functions", "Equations and Systems of Equations", "Inequalities and Systems of Inequalities", "Text Problems", "Elements of mathematical analysis", "Geometry on the Plane", "Geometry in the Space", "Coordinates and vectors", "Elements of probability theory and statistics".

In this paper, we propose thematic tests for two substantial blocks ("Equations" and "Inequalities"), as well as the answers to them. In addition, we solve the basic tasks of these tests and give methodological comments on these solutions. We are convinced that a properly organized thematic repetition of the school course in mathematics will allow teachers to excel in preparing pupils for independent assessment in mathematics.

Keywords: *IEA in mathematics, SFA in mathematics, thematic preparation, educational achievements of pupils, thematic tests, basic tasks, numbers and expressions, functions.*

Formulation of the problem. External Independent Assessment (EIA) of the quality of mathematics knowledge is now the main feature of assessing the quality of mathematical preparation for Ukrainian graduates. Also it is used for conducting the State Final Attestation (SFA) of academic achievements of senior school students, as well as a tool for competitive selection of