М 51

334/—

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. Горького

Кафедра математики

Я. П. МЕНЬКО

К ТЕОРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

334 (04)

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Київський педагогічний інститут БІБЛІОТЕКА

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук
профессор ФЕЩЕНКО С. Ф.

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313475

КИЕВ
1966

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького направляет автореферат диссертации тов. Я. П. Менько, представленной на соискание ученой степени кандидата физико математических наук.

Просим ознакомиться с авторефератом и Ваши замечания прислать по адресу: Киев—30, бульвар Шевченко, 22/24 научная часть.

Официальные опоненты:

доктор физико-математических наук профессор

ВОЛОСОВ В. М.

кандидат физико-математических наук

ФОДЧУК В. И.

Защита состоится в Киевском педагогическом институте им. А. М. Горького в сентябре 1966 года.

Автореферат разослан 10 июня 1966 года.

Реферируемая работа посвящена вопросам асимптотического представления решений системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами[1] с отклоняющимся аргументом, который также медленно изменяется, и исследованию квазигармонической системы с отклоняющимся аргументом. Теория асимптотических представлений решений дифференциальных уравнений содержит несколько направлений. Среди наиболее важных из них следует отметить теорию асимптотического представления решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с малым параметром и асимптотические методы нелинейной механики. Оба направления допускают различные обобщения применительно к задачам для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих малый параметр.

Идея асимптотического представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений, зародившись еще в работах Лиувилля и Штурма, получила дальнейшее развитие и обоснование в работах Пуанкаре, Горна, Шлезингера, Стеклова, Биркгоффа, Тамаркина, Крылова и Боголюбова, Тржцинского, Пугачева, Штокало, Тихонова, Митропольского, Фещенко, Волосова и др. Особенно важное как практическое, так и прикладное значение имеют работы советских математиков Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и их учеников.

Асимптотические методы нелинейной механики, созданные ими, базируются на строгом математическом обосновании, позволяют получать в виде разложений по сте-

---

1) Функция называется медленно изменяющейся, если производная от нее по аргументу пропорциональна малому параметру.

пеням малого параметра решение дифференциальных уравнений для широкого класса задач, в том числе и для исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Одним из эффективных методов нахождения асимптотического представления решений систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами является асимптотический метод Фещенко. Этот метод еще не нашел достаточного освещения в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Важное значение для приложений имеют случаи, когда система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом неоднородная, а свободные члены имеют вид

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{N} B_j(\tau, \varepsilon) e^{i\Theta_j}, \tag{1}$$

где

$$\frac{d\Theta_j}{dt} = k_j(\tau), \qquad \begin{matrix} \tau = \varepsilon t \\ 0 \leqslant \tau \leqslant L \end{matrix} \tag{2}$$

ε—малый действительный параметр.

В этих случаях структура решений зависит от соотношения между функциями $ik_j(\tau)$ и корнями характеристического уравнения.

В математической литературе для обыкновенных дифференциальных уравнений изучены случаи, когда корни характеристического уравнения или всегда отличаются или всегда совпадают с $ik_j(\tau)$ во всем интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Фещенко впервые рассмотрел случай, когда один из корней характеристического уравнения может становиться равным одной из функций $ik_j(\tau)$ в некоторой точке τ_1 на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$ [2]—[3].

Дальнейшие результаты в этом направлении (случай кратных корней) были получены Фещенко и Шкилем [4].

Как известно, при решении уравнений с отклоняющимся аргументом возникают большие трудности. В замкнутой форме они интегрируются в исключительно редких случаях. Пока, насколько известно автору, нет эффектив-

ных методов решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и переменным отклонением аргумента даже в линейном случае.

Нашей задачей является обобщить асимптотический метод Фещенко на системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и переменным отклонением аргумента.

При помощи предложенного метода уже можно найти решения некоторых систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих при членах с запаздыванием малый параметр.

В то время как другие известные методы оказываются малоэффективными или вовсе непригодными.

Работа состоит из четырех глав

В первой главе рассматривается неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varepsilon p(\tau, \varepsilon)\frac{dx(t)}{dt} + \varepsilon g(\tau, \varepsilon)\frac{dx(t-\Delta(\tau))}{dt} +$$

$$+ \omega^2(\tau, \varepsilon)x(t) + \varepsilon b(\tau, \varepsilon)x(t-\nu(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \overline{A}_j(\tau, \varepsilon)e^{i\theta_j} \qquad (3)$$

Предполагается, что функции $p(\tau, \varepsilon)$, $g(\tau, \varepsilon)$, $\omega(\tau, \varepsilon)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $\overline{A}_j(\tau, \varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$—неограничено дифференцируемы по τ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$, имеют представление

$$p(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_s(\tau), \qquad g(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s g_s(\tau)$$

$$\omega^2(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s q_s(\tau), \qquad \text{причем } q_0(\tau) = \omega_0^2(\tau) \text{ и} \qquad (4)$$

$$\sqrt{q_0(\tau)} = \omega_0(\tau) > 0$$

$$b(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s b_s(\tau)$$

$$\overline{A}_j(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\left[A_{js}(\tau)+iB_{js}(\tau)\right]$$

$$\frac{d\Theta_j}{dt}=k_j(\tau)>0$$

Функции $k_j(\tau)$ имеют также неограниченное число производных по τ в интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$.

Запаздывание $\Delta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ имеют неограниченное число производных по τ в том же интервале и удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} t-\Delta(\tau)\geqslant 0 \\ t-\nu(\tau)\geqslant 0 \end{array}\right. \quad (t\geqslant 0) \qquad (5)$$

Асимптотическое представление интеграла дифференциального уравнения с запаздыванием будет зависеть от значения функций $\sqrt{q_0(\tau)}$ и $k_j(\tau)$ $(j=1,2,\ldots,N)$.

При рассмотрении данной задачи могут встретиться два случая:

1) Может случиться, что при некотором значении τ функция $\sqrt{q_0(\tau)}$ будет равна одной (или нескольким) функциям $k_j(\tau)$; допустим, что $\sqrt{q_0(\tau)}=k_1(\tau)$. Этот случай будем называть „резонансным".

2) В другом случае, любая из функций $\sqrt{q_s(\tau)}$ при любом значении τ и всевозможных значениях индексов s и j не равняется функции $k_j(\tau)$. Этот случай будем называть „нерезонансным".

Для „резонансного" случая имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1

Если функции $p_s(\tau)$, $g_s(\tau)$, $q_s(\tau)$, $b_s(\tau)$, $k_j(\tau)$ и $\overline{A}_j(\tau,\varepsilon)$, а также запаздывания $\Delta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ имеют неограниченное

число производных по τ на конечном интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. кроме того, запаздывание $\Delta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ удовлетворяют условиям (5), то формальное решение уравнения (3) в случае „резонанса“ можно представить выражением вида

$$x = \zeta e^{i\theta_1} + \sum_{j=2}^{N} \pi_j(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_j}, \tag{6}$$

где ζ будем искать из формального дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\zeta}{dt} = [D(\tau, \varepsilon) + i(\Omega(\tau, \varepsilon) - k_1(\tau)j]\zeta + Z(\tau, \varepsilon), \tag{7}$$

в котором

$$k_1(\tau) = \frac{d\theta_1}{dt}, \qquad D(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s D_s(\tau)$$

$$\Omega(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_s(\tau)$$

$$Z(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left[X_s(\tau) + i Y_s(\tau) \right] \tag{8}$$

$$\text{и} \quad \pi_j(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left[L_{js}(\tau) + i M_{js}(\tau) \right]$$

$$(j = 2, 3, \ldots, N)$$

Для „нерезонансного“ случая имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2

Если функции $p_s(\tau)$, $g_s(\tau)$, $q_s(\tau)$, $b_s(\tau)$, $k_j(\tau)$ и $\overline{A}_j(\tau,\varepsilon)$, а также запаздывание $\Delta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ имеют неограниченное число производных по τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$, кроме того, запаздывание $\Delta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ удовлетворяют условию (5), то

формальное решение уравнения (3) в случае „нерезонанса“ можно представить выражением вида

$$x = \tilde{\zeta} + \sum_{j=1}^{N} \tilde{\pi}_j(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_j}, \tag{9}$$

где $\tilde{\zeta}$ определяется формальным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dt} = \left[\tilde{D}(\tau, \varepsilon) + i\tilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)\right]\tilde{\zeta}, \tag{10}$$

в котором

$$\tilde{D}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{D}_s(\tau), \qquad \tilde{\Omega}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{\Omega}_s(\tau), \tag{11}$$

$$\tilde{\pi}_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left[\tilde{L}_{js}(\tau) + i\tilde{M}_{js}(\tau)\right]$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N)$$

В первой главе в качестве примеров приводятся частные случаи уравнения (3) и строится асимптотическое представление решений этих уравнений.

Вторая глава посвящена вопросу асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varepsilon p(\tau, \varepsilon)\frac{dx(t)}{dt} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{r=1}^{K} q^{(r)}(\tau, \varepsilon)\frac{dx(t - \Delta_r(\tau))}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x(t) + \tag{12}$$

$$+\varepsilon \sum_{l=1}^{M} k^{(l)}(\tau, \varepsilon) x(t-\nu_l(\tau)) = \varepsilon \sum_{h=1}^{N} \overline{A}^h(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_h},$$

$$\tau = \varepsilon t; \qquad \frac{d\theta_h}{dt} = k_h(\tau) > 0,$$

где $a(\tau, \varepsilon)$, $p(\tau, \varepsilon)$, $q^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ $(r = 1,2, \ldots K)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $k^l(\tau, \varepsilon)$ $(l = 1,2, \ldots M)$—квадратные матрицы n-го порядка, которые допускают разложение в ряд по степеням ε, причем $a_0(\tau)$, $b_0(\tau)$—симметричные матрицы.

Комплексные вектор—функции $\overline{A}^h(\tau, \varepsilon)$ $(h=1,2 \ldots, N)$ также допускают разложение в ряд по степеням ε, $x(t)$—n-мерный вектор.

Возможно матрицы $a(\tau, \varepsilon)$, $p(\tau, \varepsilon)$, $q^{(r)}(\tau, \varepsilon)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $k^{(l)}(\tau, \varepsilon)$ и вектор-функции $\overline{A}^h(\tau, \varepsilon)$ могут быть представлены и конечными суммами.

Запаздывания $\Delta_r(\tau)$ и $\nu_l(\tau)$—скалярные функции, имеют неограниченное число производных по τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &t-\Delta_r(\tau) \geqslant 0 \\ &\qquad\qquad (t \geqslant 0) \\ &t-\nu_l(\tau) \geqslant 0 \\ &\qquad (r=1,2, \ldots, K) \\ &\qquad (l=1,2, \ldots, M) \end{aligned} \tag{13}$$

При решении данной задачи рассматриваются два случая:

1) Случай „резонанса“, когда одна из функций $\sqrt{\lambda_r(\tau)}$, $\lambda_r(\tau)$—корни уравнения

$$Det\,|b_0(\tau)-\lambda a_0(\tau)|=0, \tag{14}$$

может становиться равной одной из функций $k_h(\tau) = \dfrac{d\Theta_h}{dt}$ при некотором значении аргумента t из интер-

вала $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ Будем предполагать, что функция $\sqrt{\lambda_1(\tau)}$ при некотором значении t из $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ может стать равной функции $k_1(\tau)$, а остальные функции $\sqrt{\lambda_r(\tau)}$ при $r = 1, 2, \ldots, n$. не могут стать равными функциям $k_h(\tau)$ при $h = 2, 3, \ldots, N$.

2) Случай „нерезонанса", когда ни одна из функций $\sqrt{\lambda_r(\tau)}$ не может стать равной функциям $k_h(\tau)$ при любом значении аргумента t из интервала $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ и всевозможных значениях индексов r, h.

Для „резонансного" случая имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3

Если матрицы $a(\tau,\varepsilon)$, $p(\tau,\varepsilon)$, $q^{(r)}(\tau,\varepsilon,)$, $b(\tau,\varepsilon)$, $k^{(t)}(\tau,\varepsilon)$, вектор-функции $\overline{A}^h(\tau,\varepsilon)$, скалярные функции $k_h(\tau)$ имеют неограниченное число производных по τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$, запаздывание $\Delta_r(\tau)$ и $\nu_r(\tau)$ имеют также неограниченное число производных по τ в этом же интервале и удовлетворяют условиям (13), то формальное асимптотическое частное решение системы (12) можно представить выражением вида

$$x = \left\{ \left[\mu_1(\tau) + \pi(\tau, \varepsilon) \right] \zeta + P(\tau, \varepsilon) \right\} e^{i\theta_1} + \sum_{h=2}^{N} H^h(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_h}, \quad (15)$$

где ζ определяется формальным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left[D(\tau, \varepsilon) + i(\Omega(\tau, \varepsilon) - k_1(\tau)) \right] \zeta + Z(\tau, \varepsilon), \quad (16)$$

скалярные функции $k_1(\tau)$, $D(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$, $Z(\tau, \varepsilon)$ и вектор-функции $\pi(\tau, \varepsilon)$, $P(\tau, \varepsilon)$, $H^h(\tau, \varepsilon)$ соответственно имеют вид

$$k_1(\tau) = \frac{d\theta_1}{dt}, \qquad D(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s D_s(\tau)$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_s(\tau) \tag{17}$$

$$Z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Z_s(\tau)$$

и

$$\pi(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \pi_s(\tau)$$

$$P(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s P_s(\tau)$$

$$H^h(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H_s^h(\tau) \tag{18}$$

для всех $h=2, 3, \ldots N$,

$\mu_1(\tau)$—собственный вектор матрицы $b_0(\tau)$ по отношению к матрице $a_0(\tau)$, соответствующий собственному числу $\lambda_1(\tau)$.

Для „нерезонансного" случая доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4

Если выполняются все условия предыдущей теоремы, то формальное асимптотическое частное решение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (12) в „нерезонансном" случае можно представить выражением вида

$$x = \mu_1(\tau)\tilde{\zeta} + \sum_{h=1}^{N} \tilde{H}^h(\tau,\varepsilon) e^{i\theta_h}, \tag{19}$$

где $\tilde{\zeta}$ определяется формальным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dt} = \left[\tilde{D}(\tau, \varepsilon) + i\tilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)\right]\tilde{\zeta}, \tag{20}$$

скалярные функции $\tilde{D}(\tau,\varepsilon)$, $\tilde{\Omega}(\tau,\varepsilon)$ и вектор-функции $\tilde{H}^h(\tau, \varepsilon)$ соответственно имеют вид

$$\tilde{D}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{D}_s(\tau), \qquad \tilde{\Omega}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{\Omega}_s(\tau),$$

$$\tilde{H}^h(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{H}_s^h(\tau), \tag{21}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, N)$$

$\mu_1(\tau)$—собственный вектор матрицы $b_0(\tau)$ по отношению к матрице $a_0(\tau)$, соответствующий собственному числу $\lambda_1(\tau)$.

Построение асимптотических рядов не вызывает принципиальных трудностей, однако ввиду быстрого усложнения формул практически можно найти только несколько первых членов рядов в разложениях (17), (18), (21).

Практическая применимость этого метода определяется не свойствами сходимости рядов (17), (18), (21) при $s \to \infty$, а их асимптотическими свойствами для данного фиксированного s и $\varepsilon \to 0$.

В третьей главе дается обоснование изложенного метода нахождения асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. В этой главе находим оценку погрешности m-го приближения исследуемой системы с запаздыванием (12) лишь в случае „резонанса". Оценка погрешности в „нерезонансном" случае устанавливается аналогично.

В этой главе для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (12) устанавливается ряд вспомогательных лемм, формулировки которых здесь не приводим.

Для „резонансного“ случая доказана следующая

ТЕОРЕМА 5

Если выполнены условия теоремы 3 и при $t=0$ удовлетворяется соотношение

$$x^0-x_m^0=0, \qquad \dot{x}^0-\dot{x}_m^0=0$$

где x^0, $\dot{x}^0$, x_m^0, $\dot{x}_m^0$—значение векторов x, $\dot{x}$, x_m, $\dot{x}_m$ при $t=0$, причем x_m —решение, получаемое из разложений (17), (18), ограничившись в них лишь m частными суммами, то числу $L>0$ можно сопоставить такие постоянные c_m и ε, что имеют место неравенства

$$|x-x_m| \leqslant c_m \varepsilon^m$$

$$|\dot{x}-\dot{x}_m| \leqslant c_m \varepsilon^m$$

В четвертой главе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\ddot{y}_s(t)+\sum_{k=1}^{n} a_{sk} y_k(t)=\varepsilon \sum_{k=1}^{n}\Big[q_{sk}(\omega t)\dot{y}_k(t)+$$

$$+b_{sk}(\omega t)\dot{y}_k(t-\Delta(\omega t))+p_{sk}(\omega t)y_k(t)+ \tag{23}$$

$$+r_{sk}(\omega t)y_k(t-\Delta_1(\omega t))\Big], \qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

где a_{sk}—постоянные, $q_{sk}(\omega t)$, $b_{sk}(\omega t)$, $p_{sk}(\omega t)$, $r_{sk}(\omega t)$—периодические непрерывные функции t с периодом

$\frac{2\pi}{\omega}$ или постоянные, ε—малый параметр. Запаздывания $\Delta(\omega t)$, $\Delta_1(\omega t)$ также являются периодическими непрерывными функциями t с тем же периодом или постоянные. Находится интервал изменения ω, в котором система (23) имеет неустойчивые решения.

Основные результаты диссертационной работы напечатаны в статьях [6]—[11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.**—Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

2. **Фещенко С. Ф.**—Асимптотичне представлення інтегралів лінійного диференціального рівняння другого порядку з повільно зміненими коефіцієнтами, ДАН УРСР, 2 1947.

3. **Фещенко С. Ф.**—Про асимптотичне представлення інтегралів спеціальної системи диференціальних рівнянь, що мають параметр ДАН УРСР, 2, 1947.

4 **Фещенко С. Ф. і Шкіль М. І.**—Про асимптотичний роз'вязок спеціальної системи звичайних диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, 5, 1958.

5. **Пугачев В. С.** - Об асимптотических представлениях интегралов систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем. сб , новая серия, 10, 57: I, 1944.

6. **Менько Я. П., Фещенко С. Ф.** – О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами с запаздывающим аргументом, Труды Первой республиканской математической конференции молодых исследователей, в I, Киев, 1965

7 **Менько Я. П., Фещенко С. Ф.** - Про асимптотичний розв'язок системи лінійных диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом, Матеріали Другої наукової конференції молодих математиків України, 1965.

8. **Фещенко С. Ф., Менько Я. П.**—Асимптотичний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом, Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педінституту ім О. М Горького за 1964 р. (фізико-математичні науки), К., 1965.

9. **Менько Я. П.**—Про розв'язок деяких задач квазігармонічних систем із запізнюючим аргументом, там же.

10. **Менько Я. П** — Метод определения интервалов неустойчивости квазигармонических систем с запаздывающим аргументом, УМЖ, 2, 1966.

11. **Менько Я. П** — Об одном методе определения интервалов неустойчивости систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1965.

12. *Tondl A., Metoda k urceni' intervaly nestability quasiharmonickych systemu, Aplikace matematiku, 4, 1959.*

Николаевская областная типография имени В. И. Ленина
Заказ 4082. Тираж 150 Подписано к печати 3. 6. 66 г. БЛ-04078
Объем 1 п. л.