Яценко Г.Ю.
Миколаївський Національний університет імені В.О. Сухомлинського

Стрелковський І.В.
Чорноморський суднобудівний завод

ФІЛОСОФСЬКІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ: СУТНІСТЬ АКСІОМАТИЧНОГО МЕТОДУ.

Стаття присвячена розгляду філософського аспекту математичної теорії, зокрема досліджується джерела походження й сутність аксіоматичного методу, розвиток якого розглядається з позицій ідеалістичного та матеріалістичного підходів. Провадиться розгляд основних етапів розвитку аксіоматизації: змістовної аксіоматизації, полуформальної аксіоматизації та формалізованої аксіоматизації.

Ключові слова: *аксіоматичний метод, число, теорія множин, дедуктивна теорія, постулат, аксіома, силогізм, філософія, математика.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Математика, числові закономірності завжди приваблювали філософів. Піфагорійська філософська школа спрямовувала свої пошуки першооснови всього сущого у поле числа. Цим пояснюється обґрунтування існування ідеалістичних речей на основі числової послідовності. Зокрема, поняття гармонії, краси пояснювалось через набір правильно підібраних чисел. Так, гармонія музичної симфонії була представлена послідовним рівним набором нот і тактів, що повторюються через виділені проміжки часу. Таким чином, філософія на ранніх етапах розвитку людства стає основою для осмислення всіх наукових доробок. Логічні правила, виділені Аристотелем, застосовуються першими математиками для обґрунтування доказів та теорій.

Загально логічні закони стають основою для подальшого розвитку математичної логіки. Більшість філософів від періоду античної класичної філософії до посткласичної філософії XX століття звертаються до математичних принципів розгляду наукових питань. Дана тенденція прослідковується й навпаки. Математика й філософія взаємно збагачують одна одну, надаючи підґрунтя до розгляду міждисциплінарних питань, особливо актуальних в сучасній науці.

Й. Фіхте [6] при формулюванні власного науковчення визначав філософію як науку про науку, тим самим стверджуючи принциповий міждисциплінарний характер будь-яких наукових філософських пошуків.

З розвитком виробничої діяльності людини особливо гостро повстає питання міждисциплінарного перетину філософії та математики, де перша наука надає загальні теорії розвитку, інструменти по опрацюванню та осмисленню отриманих результатів щодо їх подальшого впливу на розвиток людства, а друга – представляє фактичний матеріал до розгляду.

Метою даної статі **є** розглянути поняття аксіоматичного методу з позиції ідеалістичного та матеріалістичного підходів, через дослідження основних етапів розвитку аксіоматизації: змістовної аксіоматизації, полуформальної аксіоматизації та формалізованої аксіоматизації.

Аналіз основних досліджень по темі включає праці присвячені інтуїціонізму математичної теорії А. Гейтинга, аксіоматичному методу Ван Хао та Н. Бурмаки, витоки даного методу представлені в руслі „Начал" Евкліда. При звертанні до філософських питань математики провадився розгляд робіт Аристотеля, Й. Фіхте.

Виклад основного матеріалу. З історії розвитку людства філософія виступала підґрунтям до розвитку різних наук, зокрема, філософи класичного періоду розвитку Грецької філософії намагались пояснити будову світу, виходячи з математичних закономірностей.

Філософія стає основною ресурсною базою для розвитку методології математичної науки. Однією з найважливіших завдань людства у всі часи є проблема обліку. Наприклад, на найдавніших пам'ятниках зустрічаємо математичні та геометричні розрахунки щодо запасів зерна, поголів'я скота, виміру земельної ділянки, місткості сосудів. Отже, на світанку свого виникнення математика вирішує практичні потреби людей, надаючи їм апарат для розрахунків у вирішенні щоденних проблем. Не випадково найдавніші таблиці з математичними розрахунками зустрічаються саме там, де існування людини більше всього залежало від виробничої діяльності. Месопотамія, долини Нілу, Гангу та Хуанхе відрізнялись від інших місцевостей більшою родючістю ґрунту, але люди вимушені були співпрацювати з вдачею даних рік-годувальниць та докладно обраховувати час і межі їх розливу.

Триває полеміка щодо походження математичних знань, а саме математичні знання виникають з досвіду, чи є апріорними, тобто їх виникнення не залежить від існування практичної необхідності. Тобто маємо наявну боротьбу матеріалістичних та ідеалістичних поглядів на виникнення даної науки, при цьому ідеалістичний погляд засновується на позиціях інтуїціонізма, один з головних принципів якого полягає в тому, що математичні предмети безпосередньо осягаються думками й духом, тобто математичне пізнання не залежить від досвіду [4]. Звідси, можна припустити, що математична теорія не містить неправдиві твердження, оскільки тільки досвід дає змогу перевірити їх напевно.

Дані твердження входять в суперечність з суспільно визнаними історичними фактами. Так, вчені Давнього Шумеру вже у ІІІ-му ст. до н.е. вміли вирішувати завдання державно-господарчого значення, зокрема пов'язані з обрахунками площ земельних ділянок. Засоби, якими вирішувались завдання на той час, дозволяють припустити, що вони мали суто емпіричне походження. Давні вчені використовували практичні правила обчислення щоденних потреб, а саме, щоб обрахувати суму боргу чи податку, дізнатись чи вистачить запасів зерна до наступного врожаю. Проте великі практичні знання ще не були введені у систему, чіткі докази були відсутні, а більшість положень були просто помилковими. Наприклад, в процесі обрахунку площі земельних ділянок трикутної, або трапецидальної форми замість висоти фігури користувались її стороною, отримуючи завищені результати. Саме поняття висоти ще не було розвинуте. Проте, для форм земельних ділянок такі помилки не були критичними через низьку точність давніх вимірювальних приладів.

З розвитком та ускладненням виробничої діяльності людства, ускладнюються математичні розрахунки, зокрема, якісний стрибок математичного розвитку відбувся в епоху розвитку Грецької філософії, що ще раз наочно доводить нерозривність у становленні наук – філософії та математики, й використання останньою методологічного філософського апарату. Проте факт практичного розвитку людства, що вплинув на вдосконалення методів даної науки, також необхідно враховувати.

Перед давньогрецькими вченими, що синтезували всі наукові досягнення сусідніх культур, а саме Вавилону та Давнього Єгипту, повстав ряд розбіжностей у математичних теоріях. Так, у Вавилоні вважали, що площа кола складає три четвертих описаного навколо нього квадрату, тобто число $\pi = 3$. В Єгипті площа кола прирівнювалась до такого квадрату, у якого сторона складає 8/9 діаметра кола, що для числа π давало значення 3,16. Ані перше, ані друге значення даної величини не може бути спростоване практичним чином. Необхідність логічного підтвердження кількісних зв'язків стає очевидною. Створення логічно обґрунтованої математичної системи належить Піфагору, наукові розробки якого стають основою для заснування аксіоматичного методу.

Перші спроби побудови дедуктивної теорії математики були засновані на понятті числа. Успіхи на цьому шляху тлумачились ідеалістично: «Усе є число та все складається з чисел» [1, 27]. Числова закономірність, що складає основу світу стає основним принципом піфагорійського світосприйняття й універсальним методом наукових побудов. За Аристотелем у чисел піфагорійці знаходили багато спільних рис з тим, що відбувається, тобто число розглядається основою всіх речей у якості певної матерії. Проте піфагорійці зіштовхнулись з проблемою використання раціональних чисел: було доведено, що діагональ квадрату несумірна з його стороною у раціональних числах. Математика ще не була готова до введення ірраціональних чисел. Піфагорізм зайшов в глухий кут, проте науковий вихід був знайдений Евклідом: в основу математичної теорії було покладене не число, а геометричні об'єкти. Насправді, не можливо обрахувати $\sqrt{2}$, але кожний може побудувати квадрат по його стороні та провести в ньому діагональ, що є засобом обрахунку цього кореню. Вся антична математика розвивалась на основі геометричної інтерпретації. Найбільш плідним в цьому плані є книга Евкліда «Начала» [5], яка стала взірцем розвитку аксіоматичного методу, при цьому логічні побудови евклідової геометрії виступають основою для розвитку формальної логіки Аристотеля.

Аксіоматичний метод знаходиться в постійному розвитку, як вважають науковці – «немає нічого більш чужого аксіоматичному методу, ніж статична концепція науки» [2, 15]. Від «Начал» Евкліда до нашого часу можна виділити три основних етапи розвитку аксіоматизації: змістовна аксіоматизація, полуформальна аксіоматизація та формалізована аксіоматизація, при цьому розвиток кожного нового етапу не тільки не виключає попередні, а будується на їх основі. Форма формалізованих систем аксіоматизації застосовується при побудові основних теорій в математиці: в математичній логіці, теорії множин, в арифметиці натуральних та дійсних чисел. Але для більшості наукових теорій немає необхідності вводити такий високий рівень абстракції, коли можна обмежитись полуформальною чи змістовною аксіоматизацією.

Найбільш давньою вважається змістовна система аксіоматики. Згідно з нею аксіоми зображають основні властивості, відношення та зв'язки об'єктів з єдиної галузі об'єктів. Останні отримують прямі, безпосередньо пояснені завдання, що попереджують завдання списку аксіом теорії, яка розглядається. Засоби та шляхи виводу наслідків з аксіом не уточнюються, а передбачається, що в якості логічного засобу приймається звичайна формальна логіка, яка відсилає нас до Аристотеля.

Фундамент «Начал» Евкліда складають визначення, постулати та аксіоми. Визначення у Евкліда подаються по мірі розгляду математичних постулатів, починаючи з визначень точки та прямої, й закінчуючи визначеннями просторових фігур. За формальною очевидністю евклідових визначень прихована наукова робота по абстрагуванню математичних знань багатьох поколінь. Переважним чином дана робота базувалась на практичних знаннях людства. З іншого боку, кантівський агностицизм проголосив чистими від всякої приналежності до відчуттів простір та час, зокрема всі просторові уявлення.

Боротьба матеріалістів-практиків та ідеалістів-теоретиків щодо виникнення та джерел розвитку математичної теорії, поєднується у наукових розробках і досягненнях. В природі не існує прямої лінії, як такої, навіть найтонший промінь лазера має вимірювальну товщину, й є прямим тільки відносно. Але та ж пряма є необхідною абстракцією, якщо необхідно оцінити якість предмета, наприклад при побудові дома.

В першій книзі «Начал» Евкліда розглядається повний список всіх визначень, за якими безпосередньо розглядаються постулати, аксіоми, що виражають основні властивості просторових форм, описаних у визначеннях. Постулати Евкліда – це вимоги вважати принципово здійсненими п'ять видів побудов. В числі даних постулатів найбільш відомим є останній, п'ятий постулат, стверджуючий, що дві нескінченні прямі у площині не мають перетину в тому, й тільки в тому випадку, коли внутрішні кути по одну сторону січної в сумі складають прямий кут. У всіх інших випадках можна побудувати перетин двох прямих. Аксіоми Евкліда – це зображення властивостей будь-яких величин. Теореми доводяться через можливості побудови всіх фігур циркулем та лінійкою, тобто часто дана побудова виступає результатом доказу теореми. Отже, вся геометрія Евкліда побудована на основі постулатів, аксіом та силогізмів. «Начала» представляють собою взірець змістовно-аксіоматичної побудови математичної теорії. Але слід відмітити, що не будь-яка змістовна аксіоматика забезпечує своїм об'єктам засіб побудови, тому «Начала» Евкліда одночасно представляють собою взірець класичної конструктивної математичної теорії, проте останнє далеко не завжди забезпечується введенням аксіоматичної системи.

Змістовна аксіоматизація вважалась найбільш загальною формою аксіоматизації до XIX століття, коли була розкрита природа п'ятого постулату. Протягом багатьох століть вихідне положення Евкліда намагались звести до інших постулатів та аксіом. Помилковість таких нівелювань п'ятого постулату Евкліда булла доведена Лобачевським, Гаусом. Виявилось, що можливо побудувати геометрію замінивши п'ятий постулат яким-небудь новим. Нова геометрія, при цьому, не буде викликати протиріччя ні в якій своїй частині. Геометрія Лобачевського довгий час не використовувалась, поки Г. Клейн не побудував декілька моделей конкретної інтерпретації даної нової геометрії. За допомогою даних моделей він довів, що геометрія Лобачевського не має протиріч, так як і геометрія Евкліда. Більш того відсутність протиріч у даних геометріях була взаємною.

Крім свого безпосереднього результату побудована теорія дала основу глибшої абстракції математичної теорії, яка була покладена в основу розробки полуформального методу аксіоматизації. Відміна від попереднього методу полягає в тому, що більш не потрібно конкретно пояснювати об'єкти аксіоматизації. Вони визначаються непрямо за допомогою списку аксіом, що до них відносяться. Останні задаються у якості опису структур та зв'язків в які можуть вступати основні об'єкти. Побудована таким чином система аксіом може бути однаково застосована до різних груп об'єктів. В змістовній аксіоматизації також використовують формальну логіку для доведення теорем.

У зв'язку з цим збільшився рівень абстракції математичної теорії: вона стає загальною теорією, абстрагованою від конкретних об'єктів її застосування. Проте, її висновки є однаково вірними для будь-якої інтерпретації, що відповідає вихідній системі аксіом. Завдяки цьому наочно обґрунтовується факт використання методів одних математичних теорій в інших математичних теоріях. Критерієм такого запозичення стала подібність вихідних систем аксіом, що лежать в основі тієї чи іншої математичної теорії. Полуформальна аксіоматизація розповсюдилась на всі галузі математичної науки, а також послужила допомогою у вирішенні задач природничого та технічного характеру. Усі перелічені факти виступили основою для створення та розвитку самостійного вчення про аксіоматичний метод. Одним з завдань даного вчення є розгляд питання істинності систем аксіом. У змістовній аксіоматиці система аксіом вважається істиною, якщо вона відповідає власній моделі. На новому етапі довелось застосувати критерій несуперечності до самої системи аксіом, яка була покладена в основу побудови несуперечливих математичних теорій.

Система аксіом вважається сумісною, або несуперечливою, якщо з неї не можуть виникати ніякі два взаємовиключні твердження. Але з іншого боку, несумісність системи аксіом означає, що з її основних посилок можна вивести будь-яке твердження. Отже, така система аксіом не може відображати реальних співвідношень у будь-якій галузі матеріального світу, й не має ніякої цінності для науки через власну беззмістовність.

Іншою стороною даної задачі є питання про повноту системи аксіом. Найбільш виразно повнота систем аксіом виражена в „Основах геометрії" Д. Гілберта, як можливість отримати засобами даної системи відповідь на питання про істинність чи хибність довільного постулату, сформованого в рамках її термінів. Дане визначення вважали правильним, допоки К. Гедель не довів дві теореми про принципову неповноту формальної системи. В першій теоремі стверджується, що якщо арифметична формальна система несуперечлива, то вона неповна. Другою теоремою стверджується, що для такої арифметичної системи не існує доказів її несуперечності, проведеного формалізуючими засобами даної системи. З цього витікає, що вся математика не може бути розміщена в рамках однієї єдиної дедуктивної системи. Крім того, єдиним засобом доказовості несуперечності будь-якої теорії є метод моделей. Цей метод зводить питання щодо несуперечності однієї теорії до питання несуперечності іншої теорії. Таким чином вдалось довести, що якщо математична теорія аксіоматизована, то її несуперечність зводиться до питання щодо несуперечності вчення про число. Останнє намагались обґрунтувати через несуперечність теорії множин, але досить скоро теорія множин опинилась в ряду парадоксів, пов'язаних з гіпотезою континуума та аксіомою вибору. Намагання вирішити дані проблеми таким чином, щоб не виникало подібних парадоксальних висновків стимулювали розвиток формалізованого аксіоматичного методу: несуперечність системи аксіом повинна бути доведена шляхом безпосереднього отримання протиріччя з цієї системи аксіом, або шляхом доведення нездійсненності моделі.

На шляху доказовості був досягнутий той результат, що парадокси теорії множин не породжують ніяких парадоксів в теорії чисел. У зв'язку з цим визначають: „Основи арифметики заслуговують більшої довіри, ніж основи теорії множин. Великий інтерес мало би обґрунтування теорії множин в арифметиці, або в розширенні арифметики до системи нескінченних ординальних чисел" [3, 328–329].

Таким чином аксіоматичний метод дозволяє найбільш чітко виявити структуру математичних теорій, й на основі цього вирішити складні проблеми при безпосередньому оперуванні об'єктами, а головне зв'язує в єдине ціле такі теорії, які видаються відособленими одна від одної.

Висновок і перспективи дослідження у цьому напрямі. Розвиток математичної науки був скоординований практичною необхідністю виробництва, що суттєвим чином впливало на еволюцію суспільних відношень. З іншого боку, філософська основа математики сформувала теоретичне підґрунтя даної науки, вплинула на розвиток філософсько-математичних світоглядних наукових основ. Саме можливість поєднання ідеалістичного абстрагування та матеріалістичного розв'язання конкретних завдань втілена у формах аксіоматичного методу. Філософія з часів виникнення математичної дисципліни виступала підґрунтям до розгляду основних наукових проблем, рушійною силою у створенні математично спрямованого світогляду. На сучасному етапі вона долучається до розв'язання міждисциплінарних наукових проблем.

Література:

1. *Аристотель*. Метафизика / Аристотель. — М. : изд-во Эксмо, 2006. — 608 с.
2. *Бурбаки Н.* Архитектура математики / Бурмаки Н. – М. : Знание, 1972. – 250с.
3. *Ван Хао* Процесс и существование в математике / Ван Хао. – М. : Мир, 1965. – 450 с.
4. *Гейтинг А.* Обзор исследований по вопросам математики / Гейтинг А. – М. : ОНТИ-НКТП, 1936. – 120 с.
5. Начала Евклида / [Перевод с греческого и комментарии Мордухай-Болтовского Д. Д. , Веселовского И. Н., Выгодского М. Я.]. – М. - Л. : ГТТИ, 1951. – 450 с.
6. *Фихте Й.*Факты сознания. Назначение человека. Наукоучение / Фихте Й. – М. : АСТ, 2000. – 784 с.

Annotation

Iatsenko Anna, Strelkowskij Igor Philosophical aspects of mathematics: essence of axiomatic method. *The article is devoted to the philosophical aspect of mathematical theory. The sources and essence of the axiomatic method are examined; the development of the axiomatic method is considered from idealistic and materialistic positions. The article contains the main stages of axiomatization development: the maintenanced axiomatization, semiformal axiomatization, formalized axiomatization.*

Key words: *axiomatic method, number, set theory, deductive theory, postulate, axiom, syllogism, philosophy, mathematic.*