

K28

У-Р

320/

МП УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

КАСЬЯНЕНКО. М. Л.

ОСНОВАНИЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ
И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ

320 / рукав



- 76

НБ НПУ

імені М.П. Драгоманова



100313123

1965 год.

МП УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

КАСЬЯНЕНКО М. Д.

ОСНОВАНИЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ
И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
педагогических наук.

320 (ручн)



1965 год.

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького направляет Вам для ознакомления автореферат диссертационной работы М. Д. Касьяненко на тему: «Основания геометрических построений и геометрические построения в пространстве».

Ваши отзывы и замечания по данной работе просим направить Ученому Совету Института (гор. Киев, бульвар Шевченка, 22/24).

Автореферат разослан « 17 » октября 1965 г.

Защита состоится « » декабря 1965 г.

Ученый секретарь Совета

Современная математика является одной из наиболее абстрактных наук. Поэтому для ее изучения необходим соответствующий уровень абстрактного и логического мышления.

Марксистско-ленинские взгляды на формирование абстрактного мышления вытекают из известного положения: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания реальной действительности, познания объективной истины».*

Преподавание математики и развитие абстрактного мышления учащихся — единый неразрывный процесс. Это положение должно быть взято в основу методики ее преподавания в начальной, восьмилетней и средней школе.

Опыт работы передовых учителей убеждает, что только там достигаются хорошие показатели в обучении математике, где перед изучением наиболее абстрактных разделов теории проводится подготовительная работа при помощи соответствующих упражнений. Только при таком подходе к обучению учитель всегда сможет найти для каждого учащегося и класса наиболее короткий путь к осмысленному овладению труднейшими разделами математики.

Вопрос соединения обучения с практикой для многих учителей математики является одной из наиболее сложных задач. Одни из них увлекаются решением и составлением задач с практическим содержанием, другие — практическими работами и т. п. Большое количество таких упражнений и задач может привести к снижению научного уровня преподавания.

Чтобы установить правильное соотношение между количеством практических и абстрактных задач при изучении того или иного вопроса по математике (ибо главное предпочтение должно даваться последним) следует учитывать: а) практиче-

* В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, стр. 146-147.

ский опыт каждого учащегося в данной области, б) уровень его абстрактного и логического мышления.

В процессе изучения первых глав геометрии при решении практических задач необходимо выделять их геометрическую сущность. Например, проведение практической работы «Провешивание прямых на местности» следует связать с задачей: «Построение прямой и ее точек на плоскости». Если же учащиеся имеют более высокий уровень абстрактного мышления, то можно ограничиваться решением абстрактных задач с обязательным указанием примеров их использования на практике. Например, после решения задачи «По данную сторону от прямой a даны точки A и B ; найти на прямой a точку M , для которой сумма отрезков $AM+MB$ принимает наименьшее значение» обязательно должны быть сформулированы задачи:

а) Две животноводческие фермы A и B расположены на правом берегу реки с прямолинейными берегами. Где на правом берегу нужно поставить насосную станцию, чтобы для прямолинейного соединения ее с фермами можно было затратить наименьшее количество труб?

б) По данную сторону от прямой a даны точки A и B . В каком направлении должен пройти луч света через точку A , чтобы он, отразившись от прямой a прошел через точку B ?

На уроке две последние задачи решать не обязательно, так как они решаются тем же способом.

Таков должен быть, на наш взгляд, подход к вопросу соединения теории и практики в преподавании математики.

Наконец, нужно учитывать, что учащиеся не получают прочных знаний на уроке математики, если им будут их передавать только простым сообщением. Они глубоко овладеют той или иной темой лишь в результате собственной деятельности и выполнения определенной системы действий. Это положение разработано в советской психологии О. М. Леонтьевым и экспериментально доказано П. Я. Гальпериним.

Геометрические построения, пронизывая весь курс геометрии, играют немаловажную роль в формировании понятий. Введение определений, доказательство теорем, решение задач на вычисление сопровождается всегда соответствующими построениями.

Рассмотрение теоретических и методических оснований

геометрических построений в пространстве дает возможность выделить основные этапы в формировании пространственных представлений учащихся, уточнить вопрос соединения геометрической теории с практикой, «подобрать» оптимальное количество учебного материала по теории геометрических построений.

В настоящее время выделилось два направления стереометрических построений: 1) формально-логическое, 2) построения на проекционном чертеже.*

Если учитывать уровень абстрактности задач на построение и степень их доступности для учащихся средней школы, то среди стереометрических задач следует выделить такие классы: 1) задачи, относящиеся к моделированию (геометрические основания моделирования); 2) построения на поверхностях тел с последующим выполнением плоских сечений (разметка и изготовление изделий); 3) стереометрические задачи на проекционном чертеже; 4) формально-логическое направление в решении задач; 5) доказательства существования фигур использованием геометрических свойств более элементарных.

Указанная классификация задач на построение вытекает из того, что в учащихся процесс формирования пространственных представлений проходит такие основные этапы: а) мышление конкретными телами, б) оперирование идеальными телами, наделенными только геометрическими свойствами, т. е. здесь учащиеся абстрагируются от практики, но в каждом идеальном теле, прежде всего, видят реальную вещь; в) наконец, мышление абстрактными понятиями при аксиоматическом (или аналитическом) изложении геометрии.**

Ознакомление с геометрическими построениями в пространстве (в пропедевтическом и систематическом курсе стереометрии) должно проходить только в указанной последовательности, так как задачи, относящиеся к первым трем классам,

*О. М. Астряб, О. С. Смогоржевський і ін., Методика розв'язування задач на побудову, «Радянська школа», 1960, стор. 14-15.

**Необходимость выделения этих этапов подтверждается не только нашими наблюдениями и экспериментами, но и экспериментами А. И. Пышкало (см. книгу «Геометрия в I—IV классах», изд. «Просвещение», 1965, стр. 6-9).

могут быть иллюстрированы эффективными «построениями» в пространстве. Последние два класса задач характеризуют высший уровень абстрагирования от практики. Кроме того, такой порядок изучения геометрических построений не будет простым повторением одних и тех же задач, а решением их на более глубокой теоретической основе.

В диссертации практические задачи по моделированию и элементам разметки изделий изложены в абстрактном виде (т. е. рассказывается лишь геометрическая сущность этих задач). В связи с этим пришлось воспользоваться формально-логическим методом изложения, чтобы затем по основным задачам, выражающим сущность той или иной конструктивной геометрии, можно было установить уровень абстрактности каждого класса задач.

Диссертация состоит из девяти глав.

В первой главе «Об основаниях конструктивных геометрий» изложены вопросы: а) понятие о конструктивной геометрии; б) инструменты построений; в) постулаты и условия, которым они должны удовлетворять; г) виды конструктивных геометрий и основные направления в их построении.

В работах А. Адлера, Н. Ф. Четверухина и др. конструктивная геометрия — это раздел геометрии, который теоретически исследует возможность решения задач на построение данными инструментами.

Учитывая, что термины «построить» и «провести» могут быть объединены в виде одного (им эквивалентного) «доказать существование», приходим к выводу, что конструктивная геометрия — это раздел геометрии, где доказываемое существование геометрических фигур используется с помощью свойств более простых.

Абстрагируясь от понятия инструмента, вводится понятие элементарной геометрической фигуры в данной конструктивной геометрии.

Элементарными геометрическими фигурами данной конструктивной геометрии называют первичные фигуры, к построению которых приводится решение любой задачи на построение.

Например, в геометрии циркуля и линейки элементарными фигурами являются точка, прямая и окружность.

Все построения делят на эффективные и формальные. Первые требуют выполнения реальных построений данными

инструментами (т. е. рассмотрения «построений» в некоторой интерпретации). Вторые выполняются мысленно, оперируя абстрактными геометрическими образами. Среди формальных построений выделено формально-логическое направление, где решение задач выполняется сведением к некоторым простейшим задачам (называемым основными). Основанием формально-логического метода изложения конструктивной геометрии, по сложившимся традициям, служит группа постулатов построений.

Постулат построений — это первоначальное предложение о конструктивности простейших геометрических фигур (элементарных) в данном пространстве и относящихся к данной конструктивной геометрии.

Заметим, что термин «постулат» еще употребляют в другом смысле, эквивалентном понятию аксиомы.

Инструменты построений делятся соответственно на реальные и абстрактные. Первыми выполняют эффективные построения в некоторой интерпретации, а вторыми — мысленные. Автор делит инструменты построений на основные и вспомогательные в каждой, отдельно взятой, конструктивной геометрии.

Основные инструменты построений — это те, которые определяют класс разрешаемых задач в данной конструктивной геометрии. Остальные инструменты — вспомогательные.

Вспомогательные инструменты имеют свойства: а) каждый из них не превышает мощности основного инструмента по классу разрешаемых задач, б) они дают возможность упростить решение задачи на построение. Последнее свойство может быть использовано в геометрографии.

Группа постулатов построений при формально-логическом изложении конструктивной геометрии должна быть непротиворечивой. Это значит, что сами постулаты и задачи, принадлежащие определяемому конструктивной геометрией классу задач, не должны противоречить один другому в смысле существования решений. В первой главе приводится пример доказательства непротиворечивости постулатов геометрии циркуля и линейки сведением к непротиворечивости арифметики.

Постулаты каждой конструктивной геометрии могут быть зависимыми. Постулат должен быть независимым только относительно тех, которые характеризуют построения данным одним инструментом (или относительно построений одной

элементарной фигуры). Например, в геометрии циркуля и линейки постулат, определяющий построения линейкой, зависит от остальных постулатов, так как все задачи, разрешаемые линейкой, могут быть решены одним циркулем.

Присоединение к группе постулатов данной конструктивной геометрии им зависящих равнозначно присоединению вспомогательных инструментов к данным основным.

Каждая конструктивная геометрия определяется инструментами построений, которые лежат в ее основе. Такой метод не всегда удобен, ибо иногда приходится придумывать названия абстрактным инструментам. Мы рекомендуем придерживаться такого принципа: если нет реальных инструментов, при помощи которых можно выполнять построения элементарных фигур в некоторой интерпретации, то конструктивную геометрию следует определять при помощи элементарных фигур (например, конструктивная геометрия циркуля и линейки может быть названа геометрией прямых и окружностей на плоскости).

Вопрос полноты группы постулатов остается в такой же форме как и для системы аксиом.

Во второй главе «Геометрические основания моделирования» рассмотрены вопросы: а) содержание и геометрические основания изготовления моделей пространственных фигур; б) моделирование при помощи плоскостей пространства и построений в них линейкой и циркулем; в) моделирование при помощи прямых пространства и измерителя; г) моделирование при помощи прямых, окружностей пространства и измерителя; д) моделирование при помощи плоскостей, конических и цилиндрических поверхностей, чертежных инструментов.

Сначала обосновывается геометрическая сущность изготовления моделей из «плоскостей» и «прямых», причем под «плоскостью» в этой главе подразумеваем пластинку толщиной m , а под «прямой» — цилиндр с поперечным сечением, равным m , где величиной m пренебрегаем.

Почему нами выделен этот класс задач? Во-первых, здесь решение задач имеет свою специфику. Во-вторых, этот класс задач является первой ступенью ознакомления учащихся с «построениями» в пространстве и наиболее тесно связан с практикой. Кроме того, в практике изготовления моделей из бумаги, картона, стекла и т. д. считается, что там используются лишь построения на плоскости.

Абстрактное изложение моделирования выполнено с целью обнажения геометрической сущности задач по изготовлению моделей и приборов.

Моделирование при помощи плоскостей пространства, циркуля и линейки в абстрактном виде приводится к таким основным задачам:

- а) построить плоскость (или ее часть) по элементам, которые ее определяют;
- б) если плоскость (или ее часть) построена, то в ней можно выполнять построения циркулем и линейкой;
- в) построить трехгранный угол по трем данным плоским углам, удовлетворяющим условию существования трехгранного угла.

Заметим, что в школьной практике изготовления моделей из бумаги, картона и стекла часто не учитывают третьей задачи.

Моделирование при помощи прямых пространства и измерителя приводится к таким основным задачам:

- а) прямая или ее отрезок построены, если построены точки, которые их определяют;
- б) если построены три прямые, две из которых пересекаются или параллельны, а третья пересекает плоскость, определяемую первыми двумя прямыми, то считается построенной четвертая прямая, которая пересекается с каждой;
- в) если построены точка, прямая и отрезок, длина которого не превышает расстояния данной точки от данной прямой, то на этой прямой построены точки, расстояния которых от данной точки равны этому отрезку;
- г) если построены три отрезка, удовлетворяющих условию существования треугольника, то этот треугольник построен.

Моделирование при помощи прямых, окружностей пространства и измерителя приводится к решению тех же задач, что и при помощи прямых и измерителя с прибавлением следующих:

- д) окружность (без центра) построена, если построен отрезок, равный ее длине;
- е) если построена точка, окружность и отрезок, длина которого не больше наибольшего расстояния и не меньше наименьшего расстояния точек окружности от данной точки, то на окружности построены точки, расстояния которых от данной точки будут равными данному отрезку.

Наконец, моделирование при помощи плоскостей, конических и цилиндрических поверхностей сводим к таким основным задачам:

а) цилиндрическая и коническая поверхности или их части построены, если построены их развертки на плоскость;

б) если две цилиндрические, две конические, цилиндрическая и коническая поверхности имеют равные плоские сечения, то построено тело, в котором это сечение будет линией взаимного пересечения данных поверхностей.

К каждому виду геометрического моделирования приводим примеры решения задач.

Анализируя указанные основные задачи для каждого класса задач по моделированию, приходим к выводу, что некоторые из них не простые. Это объясняется тем, что здесь взяты за основу практические задачи, а не геометрические.

В конце главы сделаны выводы об использовании указанных задач при изучении математики в восьмилетней и средней школе.

В третьей главе «Геометрические построения на поверхностях тел с последующим выполнением плоских сечений» освещены вопросы: а) построения чертежными инструментами на ограниченной части плоскости; б) геометрические построения на поверхности двугранного угла циркулем и линейкой; в) геометрические построения циркулем и линейкой на поверхности пластинки с перпендикулярным сечением третьей плоскостью; г) геометрические построения на поверхности призм и пирамид; д) некоторые замечания к построениям на поверхности шара и цилиндрической поверхности.

В этой главе рассмотрены задачи на построение, которые служат основой разметки изделий из различных материалов при последующем «построении» плоских сечений.

Построения на ограниченной части плоскости изложены в работе П. Цюльке. Нами доказывается теорема, что любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой во всей евклидовой плоскости, может быть решена этими инструментами выполнением построений в какой-угодно части этой плоскости (при доказательстве используются свойства гомотетии). Затем указываются классы разрешаемых задач на ограниченной части плоскости другими инструментами (однобортной и двухбортной линейкой и т. п.).

Решение геометрических задач на поверхности двугранно-

го угла, по существу, охватывает простейшие из них, которые могут быть отнесены к разметке плоских сечений тел, содержащих двугранный угол. Эти задачи предлагается решать с учащимися в виде практических работ (или в абстрактном виде) при изучении первых глав стереометрии (взаимного положения двух прямых, угла двух прямых, различных способов определения положения плоскости в пространстве и т. п.). В заключение доказывается, что любая задача на построение, разрешимая при помощи плоскостей пространства, циркуля и линейки может быть решена выполнением построений этими инструментами на поверхности двугранного угла.

Геометрические построения на поверхности пластинки (совокупности двух параллельных плоскостей и точек между ними) с перпендикулярным сечением третьей плоскостью являются также основанием разметки плоских сечений. Эти задачи рекомендуются учащимся при изучении свойств параллельных плоскостей, угла двух плоскостей, построении многогранников и т. п.

Геометрические построения на поверхностях призм и пирамид относятся к разметке различных плоских сечений этих тел и получаемых фигур.

При рассмотрении построений на цилиндрической поверхности указывается, что построение плоских сечений тела нужно сводить к задаче построения сечения плоскостью, перпендикулярной отрезку АВ и проходящей через его середину, где точки А и В принадлежат поверхности.

В четвертой главе «Стереометрические задачи на проекционном чертеже (в параллельной проекции)» автор знакомит с направлением, разработанным проф. Четверухиным Н. Ф., но при этом выделяет основные методы решения задач на проекционном чертеже, указывая класс решаемых задач тем или другим методом.

В § 1 «Вопросы возможности решения стереометрических задач на проекционном чертеже» показывается, что задача будет определенной, если: а) в условии задачи задано необходимое и достаточное количество элементов фигуры для ее построения в пространстве; б) изображение заданных элементов однозначно определено. Если разделить задачи на позиционные и метрические, то второе условие для позиционных задач требует полноты изображения, для метрических задач — полноты и метрической определенности изображений. Для

решения стереометрической задачи на проекционном чертеже сначала выполняют мысленные (формальные) построения в пространстве при помощи плоскостей, циркуля и линейки, а затем все это переносят на чертеж, учитывая свойства проекций. При изображении фигур на уроке геометрии следует сочетать одно и другое (т. е. мысленные построения с эффективными). Для определения определенности изображений используется теорема Польке-Шварца и подсчет параметража.

В § 2 рассмотрены способы решения простейших позиционных задач (построение точки пересечения прямой и плоскости, линии пересечения двух плоскостей, сечения призмы и др.), рекомендуемых для учащихся.

В § 3 предлагаются примеры решения элементарных метрических задач для показа случаев определенности и неопределенности задач на построение.

В § 4 изложен метод родства при решении задач на проекционном чертеже; в § 5 — метод гомотетии, ибо гомотетические фигуры в пространстве будут иметь своими изображениями в параллельной проекции плоские гомотетические фигуры; в § 6 решены примеры на построение симметричных фигур; в § 7 — метод параллельного переноса для изображения призм, описанных около шара, так как параллельный перенос в пространстве изобразится на плоскости также параллельным переносом.

В § 8 и 9 рассматриваем вращение и скользящее вращение в пространстве и используем его при решении задач, в которых нужно найти истинную величину плоских фигур. Скользящим вращением называем произведение параллельного переноса и вращения. Последнее преобразование используется при решении задач на родство двух проекций фигуры, одна из которых является фронтальной, а другая — профильной (в частном случае).

В § 10 решены примеры задач на построение инверсных точек и линий. В § 11 рассматриваем задачи на проекционном чертеже, в которых нужно найти истинную величину отрезка, угла, плоской фигуры, методом совмещения плоских фигур пространства с плоскостью чертежа. В § 12 указывается, что при решении задач на проекционном чертеже можно использовать геометрические места точек, но как метод их выделять нельзя (в параллельной проекции пространственные фигуры

будут иметь своими проекциями плоские фигуры с искаженными размерами).

Рекомендуется ознакомить учащихся с методом совмещения плоских фигур пространства с плоскостью чертежа, так как он учит их выделять плоские фигуры различного положения в данных пространственных. Остальные методы могут быть использованы в школьном курсе геометрии только для изображения пространственных фигур (шара, вписанных и описанных около него фигур).

В пятой главе «Стереометрические задачи на проекционном чертеже (в центральной проекции)» излагаются вопросы: а) об одном обобщении теоремы Польке-Шварца на перспективу; б) изображение фигур в перспективе; в) метод гомотопии при решении задач на построение.

Для решения вопроса об определенности изображений в перспективе используется обобщение теоремы Польке-Шварца, сделанное Н. М. Бескиным, но поданное автором в более простой формулировке. Здесь оно представлено и доказано в таком виде: «Произвольная четырехугольная пирамида $МАВСД$ с диагоналями основания и точкой $К$ на боковом ребре $МА$ может быть изображена в виде произвольного невырождающегося полного, аффинно-соответственного данному, пятиугольника $М'А'В'С'Д'$ с произвольно расположенной точкой $К'$ на стороне $М'А'$ ».

Эта теорема указывает фигуры, изображения которых в перспективе (с точностью до аффинного преобразования) будут полными и метрически определенными.

Во втором пункте предлагаются примеры изображений фигур в перспективе (многоугольников, цилиндра, шара) (11). Наконец, выделяется метод гомотопии в построении сечений пирамиды и конуса. Если не пользоваться термином «гомотопия», то можно выделить способ внутреннего проектирования, следов, последовательного перехода от одной грани пирамиды к смежной.

При построении иллюстрационных изображений к задачам на вычисление и доказательство удобнее пользоваться перспективой, близкой к параллельной проекции. В этом случае увеличивается количество произвольных элементов при построении чертежа, что сокращает затраты времени на уроке геометрии при решении задач.

В шестой главе «Общие принципы выполнения стереоскопических изображений и их использование» рассмотрены вопросы: а) свойства стереоскопических проекций; б) способы построения стереоскопических изображений.

Для формирования пространственных представлений в геометрии пользуются также стереоскопическими изображениями фигуры (стереопарами). Для получения стереоэффекта стереопару можно рассматривать без специальных очков, если поставить перед собой какой-либо предмет (дощечку, палочку или ладонь руки) так, чтобы он закрывал левый чертеж для правого глаза и правый чертеж для левого глаза.

Сначала доказываем элементарные свойства стереопар для использования их в изображении фигур с точностью до перспективного соответствия.

Теорема 1. Если линия точек зрения пересекается с плоскостью чертежа в некоторой точке O , то соответственные точки фигур стереопары лежат на прямых, которые проходят через эту точку O .

Следствия: а) Стереоскопические проекции плоских фигур гомологичны с собственным центром O , если линия точек зрения проходит через эту точку O .

б) Соответственные прямые стереоскопической проекции, которые являются образами данной прямой, не параллельной плоскости чертежа, всегда пересекаются.

в) Соответственные прямые стереоскопической проекции, которые являются образами прямой, параллельной плоскости чертежа, параллельны.

Теорема 2. Если линия точек зрения параллельна плоскости чертежа, то прямые, соединяющие соответственные точки фигур стереопары, параллельны.

Эта теорема и ее следствия являются частным случаем первой.

Во втором пункте главы показаны два способа построения второго чертежа стереопары, если дан один из них, с точностью до перспективного соответствия.

Нами выбраны простейшие свойства стереоскопических проекций, доступные учащимся IX класса. Их можно рассмотреть в виде задач или на заседании математического кружка. Учащийся средней школы должен быть обязательно ознакомлен со стереоскопическими изображениями. Это будет один

из шагов в формировании понятия идеального тела, имеющего только геометрические свойства.

В седьмой главе «Формально-логическое направление в решении задач на построение» дается, по существу, математическая теория геометрических построений, которая является обобщением предыдущих глав. Автором построена конструктивная геометрия линейки и измерителя на плоскости; прямых и измерителя в пространстве; плоскостей пространства и прямоугольного трехгранного угла.

В первом параграфе «Общие принципы решения задач на построение» дается характеристика формальных и эффективных построений с точки зрения общей схемы (анализа, построения, доказательства и исследования). Задачу можно считать решенной формально, если в ней сделан только анализ, доказательство и исследование, а эффективное построение не выполнено.

Таким путем легко объяснить учащимся понятие формального (мысленного) построения на плоскости и в пространстве.

Во втором параграфе изложены построения при помощи прямых пространства. Решение задач здесь сводим к таким основным задачам:

а) прямая построена, если построены две ее различные точки;

б) если построены две пересекающиеся прямые, то построена их точка пересечения;

в) если построены три прямые, две из которых пересекаются или параллельны, а третья пересекается с плоскостью, определяемой первыми двумя прямыми, то считается построенной прямая, пересекающаяся с каждой данной прямой.

Заметим, что включение последней задачи в число основных, увеличивает класс разрешаемых задач до класса задач, разрешаемых при помощи плоскостей пространства.

В третьем параграфе «Геометрические построения при помощи плоскостей пространства» решение задач сводится к известным в литературе. В четвертом параграфе «Геометрические построения при помощи плоскостей пространства и сфер» решение задач сводим к таким:

а) плоскость построена, если построены элементы, которые ее определяют в пространстве;

б) сфера построена, если построен ее центр и отрезок, равный радиусу;

в) если построены две пересекающиеся плоскости, плоскость и сфера, две сферы, то построены их линии пересечения.

В пятом параграфе излагаются построения при помощи плоскостей пространства, циркуля и линейки, известные в школьном курсе геометрии. Здесь только показываем, что линейка является вспомогательным инструментом.

В шестом параграфе «Геометрические построения при помощи прямых пространства и измерителя» сначала рассматриваются построения на плоскости при помощи однобортной линейки и измерителя; доказывается теорема, что класс задач, разрешаемых линейкой и измерителем, одинаков по мощности с классом задач, разрешаемых циркулем и линейкой. Затем строится конструктивная геометрия прямых пространства и измерителя. Одновременно устанавливается класс разрешаемых задач.

В седьмом параграфе рассмотрены построения при помощи плоскостей и прямоугольного трехгранного угла, которые сводим к двум основным задачам, положенным в основу построений при помощи одних плоскостей, прибавляя третью:

в) построить прямоугольный трехгранный угол по данной плоскости грани, прямой, принадлежащей второй грани и точке, принадлежащей третьей грани.

После рассмотрения примеров задач доказываем теорему, что все построения, выполняемые прямоугольным трехгранным углом в пространстве, могут быть осуществлены при помощи плоскостей и плоского прямого угла, а, следовательно, решены задачи, которые в аналитическом виде приводятся к решению уравнений первой и второй степени.

Ознакомление с построениями при помощи плоскостей, сфер и других фигур в пространстве дает хороший эффект в формировании пространственных представлений учащихся.

В восьмом параграфе дан краткий обзор методов решения задач на построение при помощи плоскостей пространства, циркуля и линейки, которые входят в программу по геометрии средней школы. При решении задач методом геометрических мест выделяются два их вида: а) задачи, где при их решении используется одно или два геометрических места, б) задачи, где используется три геометрических места точек.

В восьмой главе «Доказательства существования геометрических фигур использованием свойств более элементарных» изложены вопросы: а) связь геометрических построений с до-

казательством существования геометрических фигур; б) доказательства существования геометрических фигур использованием свойств прямых и окружностей в данной плоскости; в) доказательства существования геометрических фигур использованием свойств плоскостей пространства, прямых и окружностей, которые им принадлежат.

В этой главе показываем, что геометрические построения (с математической точки зрения) следует отнести к теории доказательств существования геометрических фигур использованием свойств элементарных фигур. Вместо понятия инструмента построений здесь вводится понятие элементарной фигуры с указанием ее геометрических свойств.

Во втором параграфе сформулированы постулаты существования прямых и окружностей для использования их в доказательствах. Они здесь выглядят так:

1. Все заданные в условии задачи геометрические фигуры (точки, линии) существуют в данной плоскости.
2. Прямая существует, если даны две ее различные точки.
3. Окружность существует, если дан ее центр и радиус.
4. Если существуют две пересекающиеся окружности, прямая и окружность, две прямые, то существуют их точки пересечения.
5. Любая, существующая в данной плоскости, точка может быть использована при решении задач на доказательство существования фигур.

Затем рассматривается пример доказательства существования фигуры для сравнения его с соответствующим ее «построением».

В третьем параграфе изложена теория доказательств существования фигур использованием свойств плоскостей, прямых и окружностей. Вносится предложение: ознакомить учащихся с доказательством существования геометрических фигур в абстрактном виде хотя бы одним-двумя примерами.

Девятая глава «Методика преподавания стереометрических построений» состоит из таких параграфов: 1) Общие вопросы методики стереометрических построений в курсе геометрии средней школы; 2) первые уроки ознакомления учащихся с геометрическими построениями в пространстве; 3) к вопросу изображения пространственных фигур в курсе геометрии; 4) к методике решения стереометрических задач на проекционном чертеже; 5) практические и лабораторные работы с

применением стереометрических построений; 6) к вопросу о формировании пространственных представлений учащихся и формальных построениях в средней школе; 7) доказательство теорем в стереометрии, связанных с построениями, относящимися к разметке изделий; 8) стереометрические построения и их место в профессиональной подготовке учителя математики.

В § 1 указывается, что в программе по стереометрии в средней школе вопросы моделирования, ознакомления с элементами разметки изделий, графические методы нахождения истинной величины отрезков и углов в пространственных фигурах недооцениваются. В современной методической литературе сложилось мнение, что эффективных построений в пространстве выполнять нельзя (кроме задач на проекционном чертеже). Разве не эффективными будут построения на поверхности деревянного бруса, из которого нужно выпилить то или иное изделие? Здесь же мы сначала карандашом (или мелом) выполняем построение линий, определяющих форму и размеры данного изделия, а затем «строим» плоские сечения (т. е. построение плоскостей). Поэтому рекомендуется внести в программу по стереометрии в VIII классе практические работы по разметке призм, пирамид и иных фигур на заготовках из дерева или других материалов. Эти практические работы закрепляют знания по теории геометрических построений на плоскости и указывают пути «построения» пространственных тел.

В процессе изучения темы «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» рекомендуем продемонстрировать: а) построение двух пересекающихся, параллельных и скрещивающихся прямых на поверхности тела, содержащего двугранный угол; б) построение сечений этого же тела плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми, тремя точками, прямой и точкой. При изучении свойств параллельных плоскостей необходимо продемонстрировать на поверхности пластинки: а) построение параллельных и скрещивающихся прямых, принадлежащих параллельным плоскостям; б) построение сечений этого тела плоскостью, заданной тремя точками. В процессе изучения свойств параллельной проекции можно показать построение проекции многоугольника, принадлежащего одному основанию пластинки, на плоскость второго основания (т. е. по существу разметку призмы).

Изучение темы «Простейшие задачи на построение в пространстве» удобно проводить обобщением построений, связанных с задачами по разметке изделий, на все пространство при одновременном ознакомлении учащихся с решением их на прсекционном чертеже. Доказательство существования призмы и пирамиды можно провести демонстрацией ее разметки на поверхности пластинки (одновременно нужно выполнять чертеж на классной доске и показывать соответствующую сборно-разборную модель).

Преподавание первых разделов стереометрии должно сопровождаться наглядными пособиями различных типов: проволочными, стеклянными, картонными, сборно-разборными и т. п.

Эксперименты показали, что в курсе геометрии восьмилетней и средней школы нужно ознакомить учащихся с элементарными стереометрическими построениями всех классов задач, причем сначала с моделированием, а затем с простейшими задачами по разметке изделий. Задачи на построение формальным методом должны являться высшим этапом решения задач на построение. С формально-логическим направлением решения задач на построение знакомить учащихся не обязательно (отдельные задачи можно вынести на занятия математического кружка).

В § 2 указаны виды стереометрических задач практического характера, рекомендуемые для решения в VIII и X классах перед непосредственным изучением стереометрических задач на проекционном чертеже; даны методические советы по проведению уроков. Здесь, по существу, изложен пропедевтический курс эффективных построений в пространстве на поверхностях тел.

В § 3 рассматривается вопрос изображения пространственных фигур до изучения темы «Основные свойства параллельных проекций». Рекомендуется главное внимание уделять наглядности изображений, т. е. строить изображения в центральной проекции, близкой к параллельной. После изучения свойств параллельной проекции указывается список основных задач на построение изображений фигур, которые решены в четвертой главе. Наконец, приведен пример анализа изображений с точки зрения их определенности.

В § 4 даны методические указания и разработки уроков по теме «Простейшие задачи на построение в пространстве». В

основу взяты практические задачи для выделения сущности геометрических построений в пространстве. Ознакомление с простейшими построениями проходит по принципу: построения на поверхности тела с демонстрацией готовой модели — построение чертежа — формальное построение, причем все это выполняется одновременно. К каждому уроку подобраны примеры и задачи.

В § 5 разработан список практических и лабораторных работ в пропедевтическом и систематическом курсе стереометрии, охватывающих моделирование и элементы разметки изделий, а также методика их проведения. Опыт показывает, что проведение 10-15 минутных практических работ по разметке изделий наиболее эффективен (имеются в виду лишь чисто графические работы). Кроме того, здесь дается описание лабораторных работ, объединенных уроков математики и ручного труда, самостоятельных работ учащимся, занятий математического кружка по моделированию, приведены примеры инструкций для проведения лабораторных работ.

В § 6 анализируются основные этапы развития пространственных представлений в учащихся в процессе изучения стереометрии и вопрос о роли формальных построений при решении задач на вычисление и доказательство. На примерах показывается роль обобщений при решении практических задач для введения понятия мысленного построения.

Например, к абстрактному решению задачи: «Через данную точку пространства, взятую вне данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной» можно подойти обобщением таких примеров из практики:

Пример 1. Дано тело, содержащее трехгранный угол $OXU Z$ (три плоскости, пересекающиеся в одной точке O). Столяру или слесарю нужно через точку M прямой OX «провести» плоское сечение, параллельное плоскости OYZ .

Пример 2. Дано тело, содержащее две пересекающиеся плоскости P и T (двугранный угол с ребром XU). Столяру или слесарю через точку M плоскости P нужно провести плоское сечение, параллельное плоскости T .

Пример 3. Дано тело, содержащее одну плоскость P . На поверхности тела (вне плоскости P) дана точка M . Нужно построить плоское сечение тела, параллельное плоскости P .

Если указать учащимся, что столяр или слесарь, для получения указанных сечений, должен сделать разметку, а за-

тем распиловку, то третий пример легко может быть обобщен на все пространство. Рассмотрение этих примеров на уроке занимает 5-8 минут, если они демонстрируются на плакате и при помощи моделей (стеклянной и сборно-разборной из куска дерева). Одной—двух таких задач вполне достаточно для иллюстрации основных задач на построение, принимаемых в школьном курсе геометрии без обоснования.

В конце параграфа дается перечень методов, которыми можно пользоваться для формирования пространственных представлений учащихся: а) стереометрические построения, б) изучение геометрических мест точек и прямых, в) наглядные пособия и т. д.

В § 7 на примерах показана методика использования моделей при доказательстве теорем, которые сопровождаются геометрическими построениями. Указаны основные наглядные пособия, указывающие пути образования простейших пространственных фигур. Наконец, выдвигается предложение, чтобы все теоремы и задачи на доказательство, где устанавливается существование тех или иных фигур в курсе стереометрии, демонстрировались такими построениями, которые близки к практике разметки и изготовления соответствующих изделий (в программе по стереометрии предусматривается доказательство существования призм, пирамид, некоторых правильных многогранников).

Восьмой параграф посвящен вопросам изучения стереометрических построений в курсе элементарной геометрии и математического практикума по моделированию на физико-математическом факультете педагогического института. Вносится предложение о включении более широкого круга вопросов по стереометрическим построениям в программу элементарной геометрии.

Теоретические вопросы геометрических построений в пространстве должны быть положены в основу лабораторных занятий по моделированию. Изготовление моделей нужно проводить по инструкциям, охватывающим как математическую так и техническую стороны процесса их изготовления. На занятиях по моделированию нужно предъявлять высокие требования к расчетам и необходимым построениям.

Методические выводы по диссертации являются обобщением проведенной экспериментальной работы в школах № 1, № 2, № 3, № 4 (гор. Кременец, Тернопольской области)

в Ракитнянской СШ Киевской обл., кроме того, при проведении педагогической практики в школах Тернопольской обл. в период с 1959 по 1965 год, при проведении лабораторных занятий математического практикума по моделированию, при чтении курса элементарной геометрии и методики ее преподавания в Кременецком пединституте.

Общие выводы и предложения: 1) Научной основой для проведения исследований по методике преподавания различных разделов математики являются психологические исследования в области умственного развития учащихся. Процесс обучения математике и развитие мышления детей следует рассматривать как единое и неразрывное целое. Чтобы установить последовательность в изучении того или иного раздела математики нужно исходить, в первую очередь, от уровня абстрактного и логического мышления учащихся.

Поэтому изучение стереометрических построений должно изучаться лишь в последовательности: а) моделирование, б) ознакомление с элементами разметки изделий и построением соответствующих плоских сечений, в) построения на проекционном чертеже, г) формальные построения и доказательства существования фигур.

Реализация такого порядка изучения построений может быть проведена одним из таких двух путей:

а) При нынешней программе по стереометрии нужно включить практические работы по моделированию и разметке плоских сечений простейших тел, а затем перейти до задач на проекционном чертеже. При этом, можно ограничиться лишь демонстрацией этих построений на поверхности двугранного угла или пластинки, что отнимает не более 3—5 минут времени на уроке.

Заметим, что здесь следует учитывать также практический опыт учащихся.

б) В начальной школе (в III—IV классах) необходимо ввести конструирование простейших геометрических фигур (пирамид, призм и их соединений), предлагаемых в играх различными видами «детских конструкторов». Здесь же должны быть работы с бумагой, с пластилином и т. д. В восьмилетней школе учащиеся должны быть ознакомлены с простейшими задачами, которые приводят к разметке сечений тел, правильных призм и пирамид. При систематическом изложении курса

стереометрии в IX—X классах можно ограничиться лишь практическими задачами (10).

2) Как показали эксперименты, в средней школе достаточно знакомить учащихся с эффективными построениями на поверхностях только двух тел: а) содержащего двугранный угол, б) состоящего из двух параллельных плоскостей. Более сложные задачи могут быть вынесены на занятия математического кружка.

3) При решении задач на построение с практическим содержанием или проведении практических работ в процессе преподавания геометрии нужно обязательно выделять их геометрическую сущность, т. е. параллельно формулировать задачи в абстрактном виде. Если же учащиеся имеют достаточный уровень абстрактного мышления, то абстрактные задачи необходимо иллюстрировать примерами их применения на практике.

4) При введении стереометрических понятий, доказательстве теорем, решении задач нельзя ограничиваться демонстрацией лишь одного вида моделей. Должно быть сочетание проволочных, стеклянных, картонных моделей и чертежей. Учащиеся должны быть ознакомлены со стереоскопическими чертежами хотя бы нескольких фигур для получения понятия о воображаемом геометрическом теле.

5) Иллюстрационные чертежи к задачам и теоремам в стереометрии следует выполнять в центральной проекции, близкой к параллельной проекции, т. е. узаконить то, что, существу, делается сейчас на практике учителями математики (11).

6) Сравнительный анализ знаний учащихся в классах, где проводился эксперимент, и классах, где занятия проводились традиционным методом, показал, что первые получают лучшую подготовку в формировании пространственных представлений и более глубокие знания.

7) В теоретической части диссертации сделаны некоторые выводы в области методов построения конструктивных геометрий; введено понятие основных и вспомогательных инструментов построений; выделены способы решения стереометрических задач на проекционном чертеже; построены некоторые конструктивные геометрии формально-логическим методом (глава VII); выделены основные вопросы теории перспективы и стереоскопических изображений, доступные учащимся (11).

и т. д. Все эти вопросы будут полезными для учителей математики и студентов физико-математических факультетов педвузов.

По диссертации опубликованы работы:

1. «Виготовлення моделей круглих тіл в шкільній майстерні», методический сборник Тернопольского областного института ПКУ, гор. Тернополь, 1960, 1, 25 п. л.

2. «Теоретичні основи виготовлення моделей просторових фігур», Научные записки Кременецкого пединститута, город Тернополь, 1961, 1 п. л.

3. «Про основи конструктивних геометрій». 4. «Геометричні побудови за допомогою площин простору і прямокутного тригранного кута», Научные записки Кременецкого пединститута, г. Тернополь, 1962, О, 75 п. л.

5. «Про основи геометричних побудов та геометричні побудови в просторі». 6. «Перші уроки вивчення стереометрії» (в соавторстве с учителями М. О. Лысенко и Б. Я. Лытневим), тезисы докладов на отчетно-научной конференции Кременецкого пединститута, г. Кременец, 1962 год.

7. «Лабораторні та практичні роботи в курсі стереометрії середньої школи», метод. сборник, выпуск III, «Рад. школа», 1963, 1, 3 п. л.

8. «Про узагальнення теореми Польке-Шварца на перспективу».

9. «Геометричні побудови і доведення існування геометричних фігур», доклади (тезисы) на конференції за 1963 год, гор. Кременец, О, 3 п. л.

10. «Методичні поради до вивчення перших розділів стереометрії в Х класі», издано Тернопольским областным институтом ПКУ, гор. Тернополь, 1964 г., 3, 75 п. л.

11. «Зображення фігур в перспективі та їх використання в педагогічному процесі», доклади на отчетно-научной конференции, гор. Кременец, 1965 г., О, 4 п. л.

БХ. 06965. Заказ 2588. Тираж 150. Подп. к печати 9/Х, 1965 г.

Формат 60х30 Печат. лист 1.5.

г. Кременец, ул. Словацкого 6. Кременецкая типография
Тернопольского областного управления по печати.