16. *Munoz Y. J., El-Hani C.* The Student With a Thousand Faces: From the Ethics in Video Games to Becoming a Citizen. Cultural Studies of Science Education, 2012. Vol. 7, Issue 4. Pp. 909-943. DOI: 10.1007/s11422-012-9444-9. URL: http://link.springer.com/article/10.1007/s11422-012-9444-9 (Data zvernennia 15.02.2019).
17. Games, Learning & Society Conference. WikipediA – The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Games,_Learning_%26_Society_Conference (Data zvernennia 15.02.2019).

Воевода А. Л., Пудова С. С., Михайленко Л. Ф. Применение концепции “Game Based Learning”в образовательном процессе

Аннотация. Статья посвящена вопросу использования учебных компьютерных игр в учебных заведениях Украины. Рассмотрены основные положения концепции Game Based Learning (GBL) – обучение, основанное на игре, – и преимущества “серьезных” компьютерных игр. Проанализирован зарубежный опыт внедрения концепции GBL в учебный процесс образовательных учреждениях разных стран. Выделены базовые принципы теории игрового обучения Gee’s Video Game Learning Theory, которая была разработана американским ученым Джеймсом Полом Джи. Проанализированы преимущества использования компьютерных программ учебного назначения.

Рассмострено возможности применения концепции GBL в Украине. Определены проблемные аспекты использования компьютерных игр как инструмента человеческой деятельности и средства обучения. Определены пути дальнейшей теоретической и практической разработки исследования по использованию компьютерных игр в процессе обучения учащихся математике.

***Ключевые слова:** game-based learning, теория игрового обучения, компьютерные игры, видеоигры, “serious games” (серьезные игры).*

Voievoda A. L., Pudova S. S, Mykhailenko L. F. Use of the concept of Game Based Learning in the educational process.

The article is devoted to the issue of the use of educational computer games in educational institutions of Ukraine. The main provisions of the Game-Based Learning (GBL) concept and the benefits of serious computer games are considered. The foreign experience of implementation of the concept of GBL in the educational institutions of different countries has analyzed.

The possibilities of using the concept of GBL in Ukraine are considered. Problematic aspects of using computer games as a tool of human activity and means of training are determined. The ways of further theoretical and practical development of the study of the use of computer games in the process of teaching mathematics students are outlined.

***Keywords:** game-based learning, game learning theory, computer games, video games, serious games.*

УДК 372.851

Кузьмич В. І., Кузьмич Л. В.

ПОБУДОВА ПРЯМОЛІНІЙНО ТА ПЛОСКО РОЗМІЩЕНИХ МНОЖИН, ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

У статті розглядаються поняття прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору. Ці поняття розглядаються на основі поняття кута між трьома точками метричного простору. При вивченні метричних просторів головний наголос робиться на питання метризації та повноти цих просторів. У переважній більшості підручників та посібників практично відсутні задачі, що розкривають геометричні властивості довільного метричного простору. У даній роботі зроблена спроба увести такі задачі для понять прямолінійного та плоского розміщення точок довільного *метричного простору. Наведені умови прямолінійного та плоского розміщення точок, розглянуті приклади такого розміщення у конкретних метричних просторах. Зокрема, ці поняття розглянуті у просторі неперервних на відрізку функцій та у просторі інтегрованих на відрізку функцій. При цьому, автори спираються на поняття кута, як упорядкованої трійки точок метричного простору. Такий підхід дає можливість узагальнення цих понять, та збільшує можливість +-їх застосування. Зокрема, результати роботи можуть бути розповсюджені на поняття перпендикулярного та паралельного розміщення точок довільного метричного простору.*

Ключові слова: *точка, простір, метрика, пряма, площина, кут, визначник, тетраедр.*

Поняття метричного простору є базовим при вивченні курсів математичного аналізу функцій багатьох змінних, функціонального аналізу, теорії функцій дійсної змінної та багатьох інших розділів вищої математики. Його вивчення розпочинається з аксіом відстані $\rho(x;y)$ між двома довільними точками x,y простору [1, с. 41]. Далі розглядаються приклади конкретних класичних метричних просторів, таких як n-вимірний евклідів простір R^n, простір неперервних на відрізку $[a;b]$ дійснихфункцій $C_{[a;b]}$, простір обмежених послідовностей m, простір інтегровних на відрізку $[a;b]$ дійснихфункцій C_L і таке інше. Після вирішення питання про метричність конкретного простору, як правило, розглядаються питання збіжності послідовностей його точок, та повнотипростору. Питання взаємного розміщення точок довільного метричного простору, на наш погляд, у навчальній літературі висвітлено недостатньо. Зокрема, мало використовується частинний випадок нерівності трикутника для довільних трьох точок x,y,z метричного простору (третя аксіома відстані): $\rho(x;y) \le \rho(x;z) + \rho(z;y)$, коли нерівність перетворюється у рівність. Цей випадок можна використати для встановлення прямолінійності розміщення точок метричного простору. Подібні питання розглядав В. Ф. Каган, який, фактично, побудував аксіоматику прямої лінії [2, розділ XIX] і [3, с. 527].

Поняття кута у метричному просторі вводиться досить складно, з використанням поняття повноти простору, при цьому мається на увазі його числове значення [4, с. 35-36]. Це дещо обмежує його широке використання, зокрема, його важко застосувати до скінчених або зчислених просторів. Поняття кута (його числової характеристики) можна ввести використовуючи звичайну формулу косинусів, як це пропонував О. Д. Александров [4, с. 36]. У цьому випадку значно полегшується вивчення прямолінійності розміщення точок метричного простору. При такому підході можна ввести поняття плоского розміщення точок метричного простору, яке буде аналогом площини у евклідовому просторі, але його можна буде застосувати до скінченої або зчисленної множини точок простору. Співвідношення між прямолінійним і плоским розміщенням точок метричного простору, у цьому випадку, буде дещо іншим ніж у евклідовому просторі, і буде допускати елементи неевклідової геометрії.

Поняття прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору відносяться до відносно нового розділу геометрії – метричної геометрії. Розвиток цієї гілки геометрії бере початок з робіт А. Келі, К. Менгера, та був продовжений у роботах Л. М. Блюменталя, Г. Буземана, О. Д. Александрова. Досить ґрунтовно і вичерпно поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору досліджене В. Ф. Каганом у його роботі [2, розділ XIX]. Останнім часом робляться спроби побудувати основні геометричні структури (прямолінійне та плоске розміщення точок метричного простору, перпендикулярність їх розміщення і таке інше), та вивчити співвідношення між ними [5-8].

Мета статті – робота має на меті представити цілий клас задач з геометризації метричного простору, що полягають у побудові прямолінійних та плоских структур у конкретному метричному просторі, з використанням метрики цього простору. Ці задачі дають можливість встановлювати додаткові (геометричні) властивості окремих множин елементів метричного простору, та співвідношення між цими множинами.

Спочатку наведемоосновні означення та відомості, що будуть використовуватись нижче.

Через (X,ρ) будемо позначати метричний простір X з метрикою ρ [1, с. 41]. Усі точки простору будемо вважати різними, тобто, будемо розглядати лише додатні значення відстані $\rho(x;y)$ між двома довільними точками x і y простору X .

Прикладом метричного простору є простір $C_{[a;b]}$ – неперервних на відрізку $[a;b]$ дійсних функцій [1, с. 43]. У цьому просторі метрика задається за правилом: $\rho(f;g)=max_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|$.

У метричному просторі C_L інтегровних на відрізку $[a;b]$ дійсних функцій відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ знаходиться за формулою [9, с. 105]: $\rho(f;g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

Сукупність трьох точок x , y , z простору будемо називати трикутником, і позначати $\Delta(x,y,z)$. При цьому, самі точки будемо називати вершинами, а пари точок (x,y), (x,z), (y,z) – сторонами трикутника.

Означення 1. *Нехай* x , y , z *– довільні (різні) точки простору* (X,ρ). *Упорядковану трійку* (x,y,z) *цих точок будемо називати кутом з вершиною в точці* y *, і позначати:* $\angle(x,y,z)$. *Пари точок* (x,y) *і* (y,z), *при цьому, будемо називати сторонами кута* (див. [5, с. 28]).

Означення 2. *Нехай* x , y , z *– довільні (різні) точки простору* (X,ρ). *Характеристикою кута* $\angle(x,y,z)$, *або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число* $\varphi(x,y,z)$, *що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z)}{2\rho(x,y)\rho(y,z)} \qquad (1)$$

(див. [5, с. 29] і [4, с. 36]).

Метричний простір (X,ρ), у якому введено поняття кута за Означенням 1, і його характеристику за Означенням 2, будемо називати метричним простором з кутовою характеристикою, і позначати Π .

Означення 3. *Будемо казати, що точки* x , y , z *простору* Π *прямолінійно розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки* y *) виконується рівність*

$$\varphi^2(x,y,z)=1 \qquad (2)$$

(див. [5, с. 29]).

Означення 4. *Будемо казати, що множина точок простору* Π *прямолінійно розміщена, якщо будь які три точки цієї множини прямолінійно розміщені* (див. [3, с. 527]).

Рівність (2) рівносильна рівності $\varphi(x,y,z)=\pm1$, причому, при виконанні рівності $\varphi(x,y,z)=-1$, природно казати, що точка y "лежить між" точками x і z (або є внутрішньою для них), а кут $\angle(x,y,z)$ називати "розгорнутим". При виконанні рівності $\varphi(x,y,z)=1$, природно казати, що точка y "лежить поза" точками x і z (або є крайньою для них), а кут $\angle(x,y,z)$ називати "нульовим".

З рівності (1) легко отримати, що рівність $\varphi(x,y,z) = -1$ еквівалентна рівності $\rho(x,z) = \rho(x,y) + \rho(y,z)$, а рівність $\varphi(x,y,z) = 1$ еквівалентна сукупності двох рівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(y,z);\\ \rho(y,z) = \rho(x,z) + \rho(x,y).\end{array}\right.$$

Надалі,для зручності, для точок x_i, x_j, x_k простору Π будемо користуватись наступними позначеннями: $\rho\left(x_i, x_j\right) = \rho_{ij}$,

$$\frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} = \varphi_{ijk}(i,j,k = 1,2,3,\dots).$$

Наведемо приклад прямолінійної розміщеності нескінченої множини точок у метричному просторі $C_{[0;1]}$.

Приклад 1. Розглянемо множину функцій $y = kx$ на відрізку [0;1], як підмножину простору $C_{[0;1]}$ неперервних на відрізку [0;1]функцій.

Покажемо, що будь-які три різні функції (точки простору) $y_1 = k_1 x$,$y_2 = k_2 x$, $y_3 = k_3 x$ цієї множини розміщені прямолінійно. За Означенням 4 це буде означати прямолінійне розміщення усієї множини.

Нехай, для визначеності, виконуються нерівності $k_1 < k_2 < k_3$. При цьому припущенні знайдемо відстані між точками y_1, y_2, y_3 за метрикою простору $C_{[0;1]}$. Матимемо: $\rho_{12} = k_2 - k_1$, $\rho_{13} = k_3 - k_1$, $\rho_{23} = k_3 - k_2$. Оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$, то це означає, що точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно. З довільності вибору цих точок і випливає прямолінійність розміщення усієї множини функцій $y = kx$ у просторі $C_{[0;1]}$.

Тепер розглянемо узагальнення поняття прямолінійного розміщення точок простору Π . Це узагальнення було введено автором у роботах [6, с. 11-12] і [7, с. 42].

Означення 5. *Будемо казати, що точки x_1, x_2, x_3, x_4 простору Π плоско розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки x_1) виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{213} & \varphi_{214} \\ \varphi_{213} & 1 & \varphi_{314} \\ \varphi_{214} & \varphi_{314} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0 \qquad (3)$$

Аналітично, у геометрії Евкліда, рівність (3) означає рівність нулю об’єму тетраедра, вершини якого знаходяться у точках x_1, x_2, x_3, x_4(див.[10, с. 61]).

Для точок довільної підмножини простору Π природно дати наступне означення їх плоского розміщення.

Означення 6. *Будемо казати, що множина точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені* (див. [6, с. 12] і [7, с. 43]).

У просторі Π співвідношення між прямолінійним та плоским розміщенням точок більш складніші ніж у геометрії Евкліда, де ці співвідношення встановлені аксіомами. На наш погляд, досить наглядним є наступний приклад відмінності між аксіоматичним методом геометризації метричного простору та запропонованим у даній роботі.

Приклад 2. Розглянемо у просторі $C_{[0;1]}$ функції: $y_1 = x + 1$, $y_2 - x$, $y_3 = x - 2$, $y_4 = -x$.

Знайдемо відстані між цими функціями за метрикою простору :

$\rho_{12} = 1$, $\rho_{13} = 3$, $\rho_{14} = 3$, $\rho_{23} = 2$,$\rho_{24} = 2$,$\rho_{34} = 2$.

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$\varphi_{123} = -1$, $\varphi_{124} = -1$, $\varphi_{324} = 0{,}5$.

З першої рівності, за Означенням 3, слідує, що точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно, а друга рівність вказує що і точки y_1, y_2, y_4 теж прямолінійно розміщені. У геометрії Евкліда це означає, що усі чотири точки прямолінійно розміщені, причому,з рівностей $\rho_{13} = \rho_{14} = 3$ слідує, що точки y_3 і y_4 співпадають [2, с. 260]. Однак, третя рівність протирічить цьому.

Тепер підставимознайдені значення кутових характеристик у ліву частину рівності (3).

Отримаємо рівність: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0{,}5 \\ -1 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}5 \neq 0$.

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то за Означенням 6 точки y_1, y_2, y_3, y_4 не є плоско розміщеними. Це, певним чином, пояснює неоднозначність прямолінійного розміщення цих точок у просторі $C_{[0;1]}$.

На відмінність співвідношень між прямолінійним і плоским розміщенням точок у евклідовому просторі та у просторі Π вказує і наступний приклад.

Приклад 3. Розглянемо метричний простір R_0^2 впорядкованих груп з двох дійсних чисел $a(a_1, a_2)$, відстань між елементами $a(a_1, a_2)$ і $b(b_1, b_2)$якого визначається за формулою:$\rho(x, y) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$.

У просторі R_0^2 візьмемо чотири точки:

$a(1,0)$, $b(0,1)$, $c(-1,0)$, $d(0,-1)$.

Знайдемо відстані між цими точками за метрикою простору:

$\rho(a,b) = 1$, $\rho(a,c) = 2$, $\rho(a,d) = 1$, $\rho(b,c) = 1$, $\rho(b,d) = 2$, $\rho(c,d) = 1$.

Із отриманих значень випливає, що будь які три з цих точок прямолінійно розміщені. Дійсно, за формулою (1) знайдемо усі кутові характеристики:

$\varphi(b,a,c) = 1$, $\varphi(b,a,d) = -1$, $\varphi(c,a,d) = 1$, $\varphi(a,b,c) = -1$, $\varphi(a,b,d) = 1$, $\varphi(c,b,d) = 1$, $\varphi(a,c,b) = 1$, $\varphi(a,c,d) = 1$, $\varphi(b,c,d) = -1$, $\varphi(a,d,b) = 1$, $\varphi(a,d,c) = -1$, $\varphi(b,d,c) = 1$.

В усіх випадках виконується рівність (2), отже, за означеннями 3 і 4, точки a, b, c, d прямолінійно розміщені.

Покажемо, що ці точки не є плоско розміщеними у просторі R_0^2. Для цього, достатньо показати, що хоча б для однієї з точок a, b, c, d не виконується рівність (3), оскільки у цьому випадку об'єм тетраедра з вершинами у точках a, b, c, d не буде дорівнювати нулю. Взявши за вершину кутів, наприклад, точку a , підставимо значення кутових характеристик: $\varphi(b,a,c) = 1$, $\varphi(b,a,d) = -1$, $\varphi(c,a,d) = 1$ у ліву частину рівності (3). Матимемо: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Отже, навіть прямолінійне розміщення точок у просторі Π не забезпечує їх плоского розміщення у цьому просторі.

Наведемо приклад плоского розміщення точоку просторі $C_{[0;1]}$.

Приклад 4. У просторі $C_{[0;1]}$ візьмемо чотири точки:

$y_1 = x$,$y_2 = 0$, $y_3 = x - 1$, $y_4 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\left(x - 0,5\right)}$.

Знайдемо відстані між цими точками:

$\rho_{12} = 1$, $\rho_{13} = 1$, $\rho_{14} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\rho_{23} = 1$,$\rho_{24} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,$\rho_{34} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$\varphi_{142} = \varphi_{143} = \varphi_{243} = -0,5$.

Тепер, підставивши ці значення у ліву частину формули (2), будемо мати:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$.

Отже, за Означенням 5, точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщені.

З іншого боку, легко помітити, що ніякі три з цих точок не розміщені прямолінійно (немає відстані, що дорівнює сумі двох інших). У геометрії Евкліда точка y_4 є центром рівностороннього трикутника з вершинами у точках y_1, y_2, y_3.

Точки з Прикладу 4 поводять себе у просторі $П$ так само як і у просторі Евкліда. Однак, зміна метрики простору суттєво може вплинути на його геометричні властивості. Щоб впевнитись у цьому, розглянемо функції з Прикладу 4 у просторі C_L, на відрізку $[0;1]$.

Приклад 5. За метрикою простору C_L, на відрізку $[0;1]$, відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4 з Прикладу 4 будуть:

$\rho_{12} = 0,5$, $\rho_{13} = 1$, $\rho_{14} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\rho_{23} = 0,5$, $\rho_{24} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\rho_{34} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

З отриманих значень відстаней випливає, що точки y_1, y_2, y_3, як і точки y_1, y_3, y_4, розміщені прямолінійно у просторі C_L, на відрізку $[0;1]$.

Знайдемо значення кутових характеристик, наприклад, для точки y_1, вибравши її в якості вершини кутів. Будемо мати:

$\varphi_{213} = 1$, $\varphi_{214} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_{314} = 1$.

Ці рівності вказують на те, що точки y_1, y_2, y_3, y_4 не розміщені прямолінійно, оскільки для значення: $\varphi_{214} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ не виконується умова (2) і тому точки y_1, y_2, y_4 не розміщені прямолінійно.

Тепер перевіримо виконання умови (3) для отриманих значень кутових характеристик. Будемо мати:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{3} - \frac{7}{4} \neq 0.$$

Таким чином, точки y_1, y_2, y_3, y_4 не можуть бути плоско розміщеними у просторі C_L (об'єм тетраедра з вершинами у цих точках не дорівнює нулю).

Як і у випадку прямолінійного розміщення точок у просторі $П$,спостерігається також неоднозначність плоского розміщення точок у цьому просторі. На це вказує наступний приклад, розглянутий у роботі [8, с. 10-11, Приклад 6].

Приклад 6. Розглянемо у просторі $C_{[0;1]}$ точки: $y_1 = x + 1$,$y_2 = x$, $y_3 = (1 - \sqrt{2})x + 1$, $y_4 = (\sqrt{2} - 1)(x - 1)$, і $y_5 = (2 - \sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Точки y_1, y_2, y_3, y_4,а також точки y_1, y_2, y_3, y_5, є плоско розміщенимиу просторі $C_{[0;1]}$.

Для двох розглянутих множин точок три точки: y_1, y_2, y_3 є спільними. У геометрії Евкліда цього достатньо для того, щоб усі п’ять точок:y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 належали одній площині. Однак, у роботі [8] показано, що точки y_2, y_3, y_4, y_5, як і точки y_1, y_3, y_4, y_5, не є плоско розміщенимиу просторі $C_{[0;1]}$.

Висновкита перспективи подальших досліджень у даному напрямку. За результатами даної роботи, до задач, що традиційно розглядаються при вивченні метричних просторів, можна долучити цілий клас задач на геометричні властивості класичних метричних просторів. Зокрема, доцільно виділяти класи прямолінійно та плоско розміщених підмножин серед множин функцій, що вивчаються у шкільному курсі математики: лінійних, степеневих, показникових, логарифмічних, тригонометричних і таке інше. При цьому, більшу увагу потрібно приділити просторам неперервних та інтегровних на відрізку функцій.

Подальші дослідження слід, на нашу думку, продовжити у напрямку встановлення для множин точок метричного простору понять аналогічних класичним поняттям паралельності та перпендикулярності, а також вивченню співвідношень між ними. Це дасть можливість застосувати отримані результати до побудови основних геометричних об’єктів – плоских фігур та просторових тіл у метричних просторах.

Результати роботи можна використовувати у вищих закладах освіти, на практичних заняттях з вивчення властивостей метричних просторів, у позакласній роботі з учнями загальноосвітніх навчальних закладах, а також при підвищенні кваліфікації вчителів математики.

Використана література:

1. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. М. Колмогоров, С. В. Фомін. – Київ : Вища школа, 1974. – 455 с.
2. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Ч. 2 / В. Ф. Каган. – Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1956. – 344 с.
3. *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии / В. Ф. Каган. – Москва : Издательство Московского университета, 1963. – 571 с.
4. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей / А. Д. Александров. – Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 388 с.
5. *Кузьмич В. І.* Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору / В. І. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки, № 13, 2016. – С. 26-32.
6. *Кузьмич В. І.* Кутова характеристика у метричному просторі [Електронний ресурс] / Кузьмич Валерій Іванович – Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31 – June 5, 2017, Odessa, Ukraine. – С. 11-12. – Режим доступу : https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf .
7. *Кузьмич В. І.* Побудова плоских образів у довільному метричному просторі / В. І. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки, № 11, 2017. – С. 40-46.
8. *Кузьмич В. І.* Плоско розміщені множини точок у метричному просторі / Валерій Кузьмич // Вісник Львівського університету. Серія: механіко-математична, випуск 83, 2017. – С. 58-71.
9. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. – Ч. 3 / М. О. Давидов. – Київ : Вища школа, 1979. – 383 с.
10. *Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В.* Аналоги формули Юнгіуса об’єму тетраедра / В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2012. – 249, № 36. – С. 55-64.

References:

1. *Kolmohorov A. M., Fomin S. V.* Elementy teorii funktsii i funktsionalnoho analizu / A. M. Kolmohorov, S. V. Fomin. – Kyiv : Vyshcha shkola, 1974. – 455 s.
2. *Kagan V. F.* Osnovaniya geometrii. Ch. 2 / V. F. Kagan. – Moskva-Leningrad : Gostehizdat, 1956. – 344 s.
3. *Kagan V. F.* Ocherki po geometrii / V. F. Kagan. – Moskva : Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1963. – 571 s.
4. *Aleksandrov A. D.* Vnutrennyaya geometriya vypuklyh poverhnostej / A. D. Aleksandrov. – Moskva-Leningrad : Gostehizdat, 1948. – 388 s.
5. *Kuzmych V. I.* Poniattia kuta pry vyvchenni vlastyvostei metrychnoho prostoru / V. I. Kuzmych // Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky, № 13, 2016. – S. 26-32.
6. *Kuzmych V. I.* Kutova kharakterystyka u metrychnomu prostori [Elektronnyi resurs] / Kuzmych Valerii Ivanovych – Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31 – June 5, 2017, Odessa, Ukraine. – S. 11-12. – Rezhym dostupu : https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf .
7. *Kuzmych V. I.* Pobudova ploskykh obraziv u dovilnomu metrychnomu prostori / V. I. Kuzmych // Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky, № 11, 2017. – S. 40-46.
8. *Kuzmych V. I.* Plosko rozmishcheni mnozhyny tochok u metrychnomu prostori / Valerii Kuzmych // Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriia: mekhaniko-matematychna, vypusk 83, 2017. – S. 58-71.
9. *Davydov M. O.* Kurs matematychnoho analizu. – Ch. 3 / M. O. Davydov. – Kyiv : Vyshcha shkola, 1979. – 383 s.
10. *Kuzmych V. I., Kuzmych Yu. V.* Analohy formuly Yunhiusa obiemu tetraedra / V. I. Kuzmych, Yu. V. Kuzmych // Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky. – 2012. – 249, № 36. – S. 55-64.

Кузьмич В. И., Кузьмич Л. В. Построение прямолинейно и плоско расположенных множеств, при изучении метрических пространств.

В статье рассматриваются понятия прямолинейного и плоского размещения точек метрического пространства. В подавляющем большинстве учебников и пособий практически отсутствуют задачи, раскрывающие геометрические свойства произвольного метрического пространства. В данной работе сделана попытка ввести такие задачи для понятий прямолинейного и плоского расположения точек метрического пространства. Приведены условия прямолинейного и плоского размещения точек, рассмотрены примеры такого размещения в конкретных метрических пространствах. При этом, авторы опираются на понятие угла, как упорядоченной тройки точек метрического пространства. Такой подход дает возможность обобщения понятий прямолинейного и плоского размещения точек и увеличивает возможность их применения.

В работе на шести примерах продемонстрированы свойства прямолинейного и плоского расположения точек в двух конкретных метрических пространствах.Показано, что метрика пространства значительно влияет на геометрические свойства этого пространства. Приведены примеры показывающие, что понятия прямолинейного и плоского расположения точек метрического пространства допускают элементы неэвклидовой геометрии в этом пространстве. В работе приведён пример функций, которые прямолинейно расположены в пространстве, однако не являются плоско расположенными в этом пространстве. В работе построен пример двух множеств функций, каждое из которыхплоско расположено, эти множества имеют три общих точки, однако объединение этих множеств не является плоско расположенным.

Результаты работы можно использовать в высших учебных заведениях на практических занятиях по изучению свойств метрических пространств, во внеклассной работе с учащимися общеобразовательных учебных заведениях, а также при повышении квалификации учителей математики.

Ключевые слова: *точка, пространство, метрика, прямая, плоскость, угол, определитель, тетраэдр.*

Kuz'mich V. I., Kuzmych L. V. Construction of straight-line and flat sets, when studying metric spaces.

The article discusses the notion of straight-line and flat placement of points of a metric space. In the overwhelming majority of textbooks and manuals, there are practically no tasks revealing the geometric properties of an arbitrary metric space. In this paper, an attempt has been made to introduce such tasks for the notions of straightness and flat placement of points. The conditions for straight-line and flat placement of points are given, examples of such placements in specific metric spaces are considered. In this case, the authors rely on the concept of angle, as an ordered triple of points of a metric space. Such an approach makes it possible to generalize this concepts, and increases the possibility of their application.

In the work on six examples, the properties of straight-line and flat location of points in two concrete metric spaces are demonstrated. It is shown that the metric of space significantly affects the geometric properties of this space.Examples are given showing that the concepts of straight-line and flat location of points of a metric space admit elements of non-Euclidean geometry in this space.The paper presents an example of functions which are straight-line placement in space, but are not flat placement in this space.An example of two sets of functions is built in the paper, each of which is flat placement, these sets have three common points, but the union of these sets is not flat placement.

The results of the work can be used in higher educational institutions in practical classes on the study of the properties of metric spaces, in extracurricular work with students of general educational institutions, as well as during advanced training of teachers of mathematics.

Keywords: *point, space, metric, straight line, plane, angle, determinant, tetrahedron.*

УДК 37.016:514

Ленчук І. Г., Працьовитий М. В.

МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ З КУТАМИ У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Розглядається задача елементарної "нарисної" геометрії, що має дидактичну цінність для конструктивної складової шкільної стереометрії, наводиться три способи її розв'язання і доводиться теорема, корисна при розв'язуванні подібного роду задач. Пропонуються методичні рекомендації та поради.

Ключові слова: *двогранний кут, лінійний кут двогранного кута, кут між прямою і площиною, прикладна геометрична задача, лінія рівня, лінія найбільшого нахилу, правило-орієнтир, графічний та графоаналітичний методи розв'язування задач.*

Розвиток просторової уяви, конструктивно-образного мислення, візуалізації алгоритмічних міркувань – одне із завдань шкільного курсу геометрії. До основних об'єктів елементарної стереометрії відносяться многогранники та тіла обертання, які конструктивно-синтетичними засобами вивчаються в шкільному курсі математики. При цьому в теорії продуктивними є поняття двогранного кута та кута між прямою і площиною. У класичному, випробуваному часом, підручнику стереометрії (майже у тридцять років), означення кута між прямою і площиною та кута між двома площинами вводяться ***конструктивно*** ([3], пп. 32, 33, 37), що дозволяє в найбільш загальному вигляді, строго за кроками алгоритмізувати базові позиційно-метричні задачі "на кути" у просторі (рис. 1, 2). Це надто важливо для наочно-образного розуміння суті розглядуваного питання. Нижче ми пропонуємо задачу, корисну в згаданому аспекті, три способи розв'язування її й обгрунтовуємо теорему, на якій можуть базуватись міркування та розв'язки.