

К52

P-P

444/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.Горького

На правах рукописи

Л.М.КЛЯЦКАЯ

ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ
АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

004. Алгебра и теория чисел

444 (рукоп.)



А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

76

НБ НПУ

імені М.П. Драгоманова



100313186

К и е в - 1969

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.Горького

На правах рукописи

517

Л.М.КЛЯЦКАЯ

ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ
АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

004. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К и е в - 1969

Диссертация выполнена на кафедре математики Киевского
государственного педагогического института имени А.М.Горького.
Научный руководитель - член-корреспондент АН УССР,

доктор физико-математических наук,
профессор С.Н.Черников.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.С.Чарин,
кандидат физико-математических наук,
младший научный сотрудник
И.Д.Иванюта.

Ведущее предприятие - Уральский /Свердловский/ государственный
университет имени А.М.Горького.

Автореферат разослан _____ 1969 г.

Защита диссертации состоится _____ 19__ г.

на заседании Ученого совета физико-математического факультета
Киевского государственного педагогического института /Киев, 30,
Бульвар Шевченко, 22/24/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

Изучение строения групп по заданным свойствам подгрупп /при заданных ограничениях для подгрупп/ определяет одно из основных направлений в теории групп. В этом направлении получен ряд фундаментальных результатов, обогативших теорию групп открытием и описанием многих конкретных видов групп. Достаточно отметить здесь исследования О.Ю.Шмидта, в которых изучалось строение конечных нильпотентных групп, все истинные подгруппы которых нильпотентны, и исследования советских алгебраистов /С.Н.Черникова, А.И.Мальцева, М.И.Каргаполова, В.С.Чарина и др./, посвященные локально разрешимым и локально нильпотентным группам. В качестве одного из существенных подгрупповых ограничений, игравших важную роль во многих исследованиях, относящихся к рассматриваемому направлению, давно уже выделилось идущее от Ф.Холла [1] ограничение, связанное с дополняемостью подгрупп. В частности, Ф.Холл [1], а затем Н.В.Черникова [2] изучали строение групп, в которых все подгруппы дополняемы. С.Н.Черниковым [3] поставлена общая задача изучения строения групп, с той или иной системой дополняемых подгрупп, послужившая толчком к многочисленным исследованиям в этом направлении. В этих исследованиях системами дополняемых подгрупп служили системы всех абелевых подгрупп, всех инвариантных подгрупп, всех неинвариантных подгрупп, всех циклических подгрупп, всех нециклических подгрупп и т.д. В упомянутой выше работе С.Н.Черникова [3] изучено, в частности, строение абелевых групп, в которых дополняемы все сервантные подгруппы. В связи с этим результатом возник вопрос об ослаблении условия дополняемости всех сервантных подгрупп до условия дополняемости только сервантных подгрупп конечного ранга. Однако, такое условие оказалось слишком слабым,

так как оно не налагает ограничений на периодические абелевы группы: нетрудно убедиться, что в периодических абелевых группах дополняема каждая сервантная подгруппа конечного ранга. Замечая, что в примарных абелевых группах произвольная сервантная подгруппа любого конечного ранга является максимальной подгруппой этого же ранга /но не наоборот/, рассматриваемое условие дополняемости всех сервантных подгрупп конечного ранга можно заменить условием дополняемости всех максимальных подгрупп конечного ранга. Для группы без кручения эти условия равносильны.

Таким образом, естественно изучать абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы любого конечного ранга и, пожалуй, даже - абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы одного и того же фиксированного ранга. Этот вопрос /поставленный С.Н.Черниковым/ и послужил отправным пунктом исследований, результаты которых излагаются в настоящей диссертации. Для абелевых групп бесконечного ранга представляется естественным рассматривать дополняемость подгрупп бесконечного ранга, максимальных в некотором смысле. Изучению абелевых групп с отмеченными здесь системами дополняемых подгрупп, посвящены две первых главы диссертации. Для того, чтобы сформулировать основное из относящихся в нем определений, определение L_2 - замкнутой подгруппы, целесообразно ввести следующие обозначения.

Обозначения: для любой абелевой группы X

$s(X)$ - ранг группы X ,

$\Omega_p(X)$ - подгруппа, порожденная всеми элементами группы X , порядок которых равен простому числу p ,

$T(X)$ - максимальная периодическая подгруппа группы X ,
 $s_2(X) = s(X/T(X))$ - свободный ранг группы X .

О п р е д е л е н и е 1. /Определение L_2 - замкнутой подгруппы/. Пусть 2 - какое-нибудь натуральное число или ∞ . В случае, когда $s(A) < 2$, L_2 - замкнутая подгруппа B абелевой группы A всегда совпадает с A . Если A - p -примарная абелева группа с $s(A) \geq 2$, то подгруппа $B \subseteq A$ L_2 - замкнута тогда и только тогда, когда $s(B) = 2$ и для любой подгруппы C , удовлетворяющей соотношениям: $B \subseteq C$, $\Omega_p(B) = \Omega_p(C)$, имеет место равенство $B = C$. Подгруппа B периодической абелевой группы A L_2 - замкнута, если все ее силовские p -подгруппы L_2 - замкнуты в соответствующих силовских p -подгруппах группы A . Если, наконец, A - смешанная абелева группа с $s(A) \geq 2$, то подгруппа B является L_2 - замкнутой тогда и только тогда, когда $s(B) = 2$, подгруппа $T(B)$ L_2 - замкнута в подгруппе $T(A)$ при $\kappa = s(T(B))$ и для любой подгруппы C , удовлетворяющей соотношениям:

$B \subseteq C$, $T(B) = T(C)$, $T(C/B) = C/B$,
 имеет место равенство $B = C$.

Подгруппа B абелевой группы A называется L - з а м -
 к н у т о й, если B L_2 - замкнута для какого-нибудь 2 .

Заметим, что из этого определения вытекает, что в абелевой группе с примарной периодической частью всякая сервантная подгруппа L - замкнута.

Понятие L_2 - замкнутой подгруппы является некоторым обобщением понятия максимальной подгруппы конечного ранга 2 . В диссертации установлено /теорема 2.1/, что для любого конечного 2 эти понятия равносильны.

О п р е д е л е н и е 2. Абелева группа G называется CL_z - группой / z - фиксированное натуральное число или ∞ /, если все ее L_z - замкнутые подгруппы дополняемы. Абелева группа G называется CL - группой, если все ее L - замкнутые подгруппы дополняемы.

Отметим, что при $z=1$ определение CL_z - группы совпадает с определением абелевой группы, имеющей свойство α / из статьи [4] и что все результаты этой статьи, касающиеся групп со свойством α /, могут быть получены из соответствующих /более общих/ результатов диссертации.

Абелевы CL_z - группы изучены в главах I, II диссертации. В задачу диссертанта, предложенную ему научным руководителем С.Н.Черниковым, входило также перенесение полученных в этих главах результатов на неабелевы группы на основе следующего определения /этому вопросу посвящена глава III/.

О п р е д е л е н и е 3. Группа G называется CL - группой, если любая L - замкнутая подгруппа произвольной максимальной абелевой подгруппы группы G дополняема в G и хотя бы одна максимальная абелева подгруппа инвариантна в G .

Класс групп, обладающих инвариантной максимальной абелевой подгруппой достаточно широк. Как установлено в диссертации, ему принадлежат в частности все группы, являющиеся расширениями абелевой группы при помощи группы, обладающей возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, а значит, все ZA - группы и все двуступенно разрешимые группы.

В главе I диссертации решается вопрос о строении

абелевых CL_z - групп, где z - произвольное натуральное число. Основные результаты этой главы содержатся в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1. Абелева p - примарная группа G ранга большего z тогда и только тогда является CL_z - группой, когда она либо полная группа, либо группа, имеющая прямое разложение.

$$G = \sum_{\alpha \in M} \{A_\alpha\}, \quad p^{n-1}A_\alpha \neq 0, \quad p^{n+1}A_\alpha = 0 \quad (\alpha \in M)$$

где n - некоторое натуральное число, не зависящее от α . Периодическая абелева группа ранга большего z тогда и только тогда является CL_z - группой, когда ее силовские подгруппы, ранг которых больше z , являются CL_z - группами. /Теоремы I.1 и I.2 диссертации/.

Т е о р е м а 2. Непериодическая абелева группа G ранга большего z тогда и только тогда является CL_z - группой, когда она имеет прямое разложение

$$G = R + B + P,$$

в котором R - полная группа без кручения, B - сепарабельная однотипная группа без кручения, P - периодическая группа, произвольная силовская подгруппа которой либо полная, либо является группой ранга, не превосходящего числа

$$n = \begin{cases} \frac{|z - s_0(G)| + z - s_0(G)}{2} & , \text{ если } s_0(G) < z, \\ 0 & , \text{ если } s_0(G) \geq z. \end{cases}$$

/Теорема I.6 диссертации/.

Из этой теоремы следует, что изучение строения непериодических абелевых CL_z - групп ранга большего z сводится к

изучению редуцированных сепарабельных однотипных абелевых групп без кручения. В диссертации такие группы охарактеризованы / см. теоремы I.3-I.5 диссертации/ как некоторые сервантные подгруппы полных прямых сумм групп без кручения ранга I.

В главе II диссертации описывается строение абелевых CL_{∞} - групп бесконечного ранга. Описание периодических CL_{∞} - групп бесконечного ранга дает

Т е о р е м а 3. /Теорема 2.2. диссертации/. Абелева p - примарная группа G бесконечного ранга тогда и только тогда является CL_{∞} - группой, когда она либо полная группа, либо группа, имеющая прямое разложение

$$G = \sum_{\alpha \in M} \{A_{\alpha}\}, \quad p^{k-1}A_{\alpha} \neq 0, \quad p^{k+1}A_{\alpha} = 0 \quad (\alpha \in M),$$

где k - некоторое натуральное число, не зависящее от α .

Периодическая абелева группа тогда и только тогда является

CL_{∞} - группой, когда все ее силовские подгруппы являются CL_{∞} - группами.

С л е д с т в и е. В p - примарной группе G множество сервантных подгрупп тогда и только тогда совпадает со множеством ее L - замкнутых подгрупп, когда группа G имеет строение, указанное в теореме I.

Следующая теорема дает описание строения непериодических абелевых CL_{∞} - групп бесконечного ранга.

Т е о р е м а 4. /Теорема 2.5 диссертации/. непериодическая абелева группа бесконечного ранга тогда и только тогда является CL_{∞} - группой, когда она имеет прямое разложение

$$G = P + R + B_1 + \dots + B_n,$$

в котором P - периодическая группа, полная при $s_*(G) = \infty$, и с полными силовскими подгруппами бесконечного ранга при $s_*(G) < \infty$, R - полная группа без кручения и B_1, \dots, B_n - попарно изоморфные между собой группы ранга I без кручения.

С л е д с т в и е. Абелева группа без кручения бесконечного ранга тогда и только тогда является CL_∞ - группой, когда в ней дополняемы все сервантные подгруппы.

Из приведенных результатов первых двух глав диссертации вытекает, что группа G тогда и только тогда является абелевой CL - группой, когда G - группа одного из типов:

$$а/ \quad G = \sum_{\alpha \in M} \{A_\alpha\}, \quad p^{k-1}A_\alpha \neq 0, \quad p^{k+1}A_\alpha = 0 \quad (\alpha \in M)$$

где числа p, k не зависят от α и число p - простое.

б/ G - периодическая абелева группа, силовские p -подгруппы которой являются либо полными группами, либо группами типа а/;

$$в/ \quad G = R + B_1 + \dots + B_n,$$

где R - полная абелева группа, B_1, \dots, B_n - попарно изоморфные между собой группы ранга I без кручения.

Из этого описания вытекает, что класс абелевых CL - групп совпадает с классом абелевых групп с дополняемыми слабо сервантными подгруппами, изученным Рангасвами [5]. Это совпадение вызывается близостью понятий L - замкнутой подгруппы и слабо сервантной подгруппы. В частности, L - замкнутая подгруппа абелевой группы является слабо сервантной / но не наоборот/, причем, для абелевых групп с примарной периодической частью два отмеченных понятия равносильны.

неабелевым CL - группам посвящена глава III диссертации.

Нижеследующие установленные в ней теоремы дают полное описание неабелевых CL - групп.

Т е о р е м а 5. /Теорема 3.2 Диссертации/. Группа тогда и только тогда является периодической CL - группой, когда она имеет разложение

$$G = A \lambda B,$$

где

- 1/ A и B - периодические абелевы CL - группы;
- 2/ $A = \prod_{\alpha \in M} A_\alpha$, где A_α - примарная группа ранга I /примарная циклическая или квазициклическая группа/, инвариантная в группе G , и централизатор подгрупп A_α в группе G совпадает с централизатором ее нижнего слоя /для всех $\alpha \in M$ /;
- 3/ если подгруппа H из A инвариантна в G , то ее централизатор $C_G(H)$ сервантен в группе B ;
- 4/ силовская p - подгруппа $A_p \times B_p$ группы G / A_p и B_p - силовские p - подгруппы групп A и B соответственно/ является абелевой CL - группой для любого простого числа p .

С л е д с т в и е. CL - группа G тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она периодическая и порядки ее элементов не делятся на квадраты простых чисел.

Как следует из описания CL - групп, класс этих групп значительно шире класса вполне факторизуемых групп, однако,

в строении вполне факторизуемых и периодических CL - групп есть много общего: и те и другие представимы в виде полупрямого произведения двух своих абелевых подгрупп, и в тех и в других группах инвариантный множитель разлагается в прямое произведение групп ранга I, инвариантных во всей группе.

Т е о р е м а 6. /Теорема 3.3. диссертации/. Неабелева группа G тогда и только тогда является непериодической CL - группой, когда она относится к одному из следующих типов групп:

$$1/ \quad G = P \times (N \rtimes \{B\}),$$

где P - периодическая полная абелева группа, не содержащая элементов второго порядка;

N - непериодическая абелева CL - группа, не содержащая элементов второго порядка,

$$B^2 = 1,$$

$$B^{-1}XB = X^{-1} \quad \text{для всех } X \in N,$$

$$2/ \quad G = P \times (R \rtimes C),$$

где P - периодическая полная абелева группа,

$R = \prod_{\alpha \in M} R_{\alpha}$, R_{α} - группа, изоморфная аддитивной группе всех рациональных чисел и инвариантная в группе G для всех $\alpha \in M$.

C - свободная абелева группа конечного ранга, любой элемент которой индуцирует в каждой подгруппе R_{α} либо тождественный автоморфизм, либо автоморфизм бесконечного порядка.

С л е д с т в и е. Если CL - группа обладает возрастающим центральным рядом, то она абелева, Неабелевы

группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, исчерпываются группами, указанными в теореме 5 и пункте а/ теоремы 6.

Результаты диссертации докладывались на IX Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме /Гомель, 1968 г./, на семинаре по теории групп Института математики АН УССР, на IУ Республиканской конференции молодых математиков Украины /Киев, 1968 г./ и содержатся в работах [6-10] .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hall Ph., Complemented groups,
J. London. Math. Soc., 12(1937), 201-204.

2. Черникова Н.В. Группы с дополняемыми подгруппами.
Матем. сб. 39 /1956/, 273-292.

3. Черников С.Н. Группы с системами дополняемых подгрупп.
Матем. сб. 35 /1954/, 93-128.

4. Hsiang Wu-chung, Hsiang Wu-yi,
Those abelian groups characterized by their
completely decomposable subgroups of finite rank,
Pacif. J. Math., 11(1961), 547-558.

5. Rangaswamy K. M., Near subgroups of
abelian groups, *J. Madras. Univ.*, B 33(1963), 129-135.

6. Кляцкая Л.М. Абелевы группы с некоторыми системами
дополняемых подгрупп. IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум
/Тезисы научных сообщений./, г.Гомель /1968/, 91-92.

7. Кляцька Л.М. Абелеві групи, в яких доповнюються всі максимальні підгрупи скінченного рангу. ДАН УРСР, сер.А, № 9 /1968/, 803-806.

8. Кляцька Л.М. Абелеві групи нескінченного рангу, в яких доповнюються деякі підгрупи нескінченного рангу. ДАН УРСР, сер.А, № 7 /1969/, 825-827.

9. Кляцька Л.М. Про абелеві CL_2 -групи АН УРСР. Інститут математики. Четверта наукова конференція молодих математиків України. Київ, 1968, 15.

10. Зайцев Д.И., Кляцкая Л.М. Неабелевы CL - группы. ДАН СССР /в печати/.

Заказ № 765 тираж 150 экз.
роtoppинт. Черкасский ПКТИ