М.І. Жалдак,

Г.О. Михалін.

Елементи стохастики. Збірник задач і вправ

Посібник для вчителів

Київ

2007

М.І. Жалдак, Г.О. Михалін.

Елементи стохастики. Збірник задач і вправ

Посібник для вчителів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Елементи стохастики. Збірник задач і вправ: Посібник для вчителів. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін.

Наведено основні теоретичні відомості та ілюстративні приклади і рисунки, зразки розв'язування задач і задачі для самостійного розв'язання. Для побудови графічних зображень, обчислення значень виразів, визначених інтегралів, аналізу статистичних даних, визначення числових характеристик розподілів ймовірностей, в тому числі статистичних, передбачається використання відповідних комп'ютерних програм, зокрема Gran1.

Призначено для вчителів математики та учнів старших класів середніх навчальних закладів, студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів, а також студентів технічних, економічних та інших спеціальностей.

Рецензенти:

Доктор педагогічних наук, професор Клочко В.І.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.

Доктор педагогічних наук, професор Співаковський О.В.

Комп'ютерний набір: Франчук Н.П.

Передмова

Даний збірник задач призначено для працюючих і майбутніх вчителів математики, а також для учнів старшої школи. Значна частина задач присвячена формуванню ймовірнісно-статистичного мислення, яке неможливе без розуміння сутності основних понять теорії ймовірностей: стохастичний експеримент і простір елементарних подій, випадкова подія та її ймовірність, ймовірнісний простір та його будова, випадкова величина та розподіл ймовірностей на множині її значень, числові характеристики такого розподілу ймовірностей тощо. Основну увагу приділено побудові ймовірнісного простору, тобто ймовірнісної моделі стохастичного експерименту. Задачі технічного характеру, пов'язані з обчисленням певних характеристик, передбачається розв'язувати за допомогою відповідних комп'ютерних засобів математики (КЗМ), наприклад, за допомогою ППЗ GRAN1.

Навчальний матеріал збірника задач поділено на параграфи. Структура кожного параграфа така: спочатку наведено основні теоретичні відомості та ілюстративні приклади і рисунки, потім – зразки розв'язування задач, і далі – задачі для самостійного розв'язування. Значна частина задач є оригінальними. Ідеї інших задач запозичено із різних збірників задач і вправ з теорії ймовірностей та математичної статистики. Задачі кожного параграфа мають свою нумерацію, починаючи з номера 1.

У відповідях наведено номер параграфа і після нього номери задач цього параграфа.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ.

1. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій

Експерименти, точні результати яких передбачити неможливо, називають *стохастичними* або *випадковими.* Кожному стохастичному експерименту відповідає певна множина Ω його можливих наслідків. Ця множина Ω називається *множиною* або *простором елементарних подій*, а її елементи називають *елементарними подіями*. При цьому в кожному *випробуванні* (проведенні експерименту) має місце один єдиний наслідок – відбувається одна єдина елементарна подія із множини Ω всіх елементарних подій. Іншими словами, в результаті випробування із множини Ω немов би навмання вибирається один єдиний елемент E – відбувається елементарна подія E.

Приклад 1.1. На гранях шестигранного грального кубика нанесено цифри від 1 до 6. Експеримент полягає в підкиданні кубика і фіксації грані, якою кубик впаде догори. Множина Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором елементарних подій. Поява на верхній грані кубика однієї з цифр від 1 до 6 означає, що відбувається відповідна елементарна подія.

Приклад 1.2. Підкидається кубик, як і в прикладі 1.1, але фіксується лише парна чи непарна цифра на грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω = {”парна”, “непарна”} є множиною двох можливих наслідків експерименту, тобто простором із двох елементарних подій.

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте часто трапляються випадки, коли множина Ω нескінченна.

Приклад 1.3. В круглу мішень радіуса 1, яку можна вважати множиною точок (x, y) таких, що $x^2+y^2\le 1$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Множина елементарних подій $\Omega=\{(x, y): x^2+y^2\le 1\}$ характеризує можливі результати експерименту: точки (x, y), в які може влучити куля, визначають відповідні елементарні події в даному експерименті.

Поняття елементарної події та простору елементарних подій належать до основних понять теорії ймовірностей і не означаються через простіші поняття, аналогічно до того, як в теорії множин до основних понять належать поняття елемента множини та множини, в геометрії – поняття точки та площини, в теорії алгоритмів – поняття алгоритму і т. д.

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Грані шестигранного кубика пофарбовано різними кольорами: одна грань біла, ще одна грань червона, інші чотири грані зелені. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω = {”біла”, “червона”, “зелена”} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором із трьох елементарних подій.

Вправа 2. З підкиданням кубика можна пов'язати і інші простори елементарних подій з одним, двома, трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма можливими наслідками випробовування. Якщо поділити множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$ на деяку кількість підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $1 \le k \le 6$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \ne j$, тобто дві різні множини H_i та H_j не містять спільних елементів, а об'єднання усіх множин H_i, $i \in \overline{1, k}$, вичерпує дану множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$, та вважати єдино можливими наслідками випробування попадання в такі підмножини H_i, тоді простір Ω елементарних подій міститиме k елементарних подій $E_1, E_2, \ldots, E_k$ (k можливих наслідків випробовування, $1 \le k \le 6$).

Вправа 3. Один за одним підкидаються два гральні кубики і фіксується пара чисел: число очок, що випало на першому кубику, і число очок, що випало на другому кубику. Тоді простором елементарних подій є множина

$$\Omega = \{(i, j) : i \in \overline{1, 6};\ j \in \overline{1, 6}\}.$$

У цьому разі елементарні події можна інтерпретувати як усі можливі впорядковані пари цілих чисел (i, j), де $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 6$. Так, елементарна подія $(3, 5)$ полягає в тому, що на першому кубику випало три очка, а на другому – п'ять очок.

Якщо фіксувати як результат випробування сумарну кількість очок на двох кубиках, тоді простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$.

Вправа 4. Експеримент полягає в тому, що з відрізка $[t_1, t_2]$ навмання вибирається два числа. Тоді множину

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [t_1, t_2],\quad y \in [t_1, t_2]\},$$

що складається з усіх пар дійсних чисел (x, y) – елементів так званого *декартового добутку* $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$, можна розглядати як простір елементарних подій у даному випробуванні.

Вправа 5. Якщо результатом експерименту вважати траєкторію частинки в броунівському русі, що починається в певній точці, то простором елементарних подій буде нескінченна множина всіх можливих траєкторій руху частинки, які починаються в заданій точці.

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожен експеримент є випадковим.
2. Кожному експерименту відповідає певний простір елементарних подій.
3. Кожна множина Ω є простором елементарних подій для деякого експеримента.
4. Елементарні події можна позначати по різному.

5. Простори $\Omega_1=\{Г, Ц\}$ і $\Omega_2=\{1, 0\}$ відповідають різним експериментам.

6. З одним і тим самим експериментом можна пов’язати як скінченний, так і нескінченний простір елементарних подій.

7. Поняття елементарної події і простору елементарних подій є означуваними поняттями.

2. Для даного експерименту вказати множину Ω елементарних подій:

1. Підкидання монети двічі.
2. Підкидання монети тричі.
3. Підкидання шестигранного кубика двічі.
4. Підкидання шестигранного кубика тричі.
5. Підкидання шестигранного кубика m разів.
6. Розміщення трьох предметів, що не розрізняються (наприклад, однакові кульки), у трьох скриньках.
7. Фіксація віку окремої людини.
8. Фіксація часу приходу на зустріч кожної з двох осіб, які домовилися зустрітися на проміжку часу $[t_1;t_2]$.

3. Визначити, скільки різних просторів елементарних подій можна пов'язати з підкиданням шестигранного кубика.

4. Чи можна стверджувати, що з кожним з експериментів 2.1-2.8 пов’язаний єдиний простір елементарних подій?

5. Експеримент полягає у тому, що один учень відгадує двозначне натуральне число, задумане іншим учнем. Яким є простір Ω елементарних подій?

6. Розв’язати попередню задачу із додатковою умовою: цифри натурального числа є: 1) однаковими; 2) різними.

7. У скриньці лежать дві червоних кульки, дві чорних і три білих. Експеримент полягає у тому, що із скриньки навмання беруть одну кульку і фіксують її колір. Побудувати простір Ω елементарних подій. Чи обов’язково він має 7 елементів?

8. Чотири футбольних команди K_1, K_2, K_3 і K_4 утворили півфінальні пари (K_1, K_2) і (K_3, K_4). Експеримент полягає у тому, щоб вгадати фінальну пару команд. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

9. З чотирьох студентів K_1, K_2, K_3 і K_4 жеребкуванням утворюються пари для дебатів. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

10. Чи може бути простором елементарних подій множина $\Omega=\{0,1\}$ для експерименту, пов’язаного з відгадуванням, чи є навмання вибране натуральне число: 1) непарним; 2) кратним 3; 3) таким, що при діленні на 5 утворюється залишок 3.

11. Експеримент полягає у фіксації кількості братів і сестер у навмання вибраної людини. Яким є простір елементарних подій?

12. Експеримент полягає у виборі навмання пари чисел з відрізка $[18;120]$. Яким є простір елементарних подій?

13. Навмання вводиться 4-х розрядний PIN-код мобільного телефона. Яким є простір елементарних подій, якщо відомо, що: 1) цифри у коді можуть повторюватися; 2) цифри у коді не повторюються.

14. З 10 претендентів на вакантні посади навмання вибирають трьох. Яким є простір елементарних подій?

15. Для контролю якості 1000 виробів навмання вибирають 5 виробів. Яким є простір елементарних подій?

16. Зі 100 екзаменаційних теоретичних питань і 100 задач учень навмання вибирає 2 теоретичних питання і 3 задачі. Яким є простір елементарних подій?

17. Навмання називають два простих числа, що не перевищують 20. Яким є простір елементарних подій, якщо: 1) числа різні; 2) числа можуть бути однаковими.

18. Навмання вибирають точку з області визначення функції $f(x, y) = \ln(1-x) - \ln(1+y)$.

1. Зобразити простір елементарних подій.

2. Чи зміниться він, якщо розглянути функцію $f(x, y) = \ln\dfrac{1-x}{1+y}$?

19. Шістнадцять футбольних команд жеребкуванням ділять на чотири групи. Яким є простір елементарних подій?

20. З басейну, у якому є m мічених коропів і n немічених, послідовно дістають по одній рибині доти, поки не з'явиться мічений короп. Описати простір елементарних подій, коли: 1) спійману рибину не випускають у басейн; 2) спійману рибину випускають у басейн.

2. Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події

Нехай Ω – множина елементарних подій, що відповідає певному експерименту.

Деяку (не будь-яку) *підмножину A множини* Ω називають *подією* (або *випадковою подією*).

Елементарні події E такі, що $E \in A$, називаються *елементарними подіями, що сприяють події A*.

Кажуть, що в результаті *випробування подія A відбулася*, якщо в цьому випробуванні відбулася елементарна подія, така, що $E \in A$. Множини $A = \Omega$ (*вірогідна подія*) та $B = \varnothing$ (*неможлива подія*) завжди вважаються подіями (на відміну від інших підмножин множини Ω).

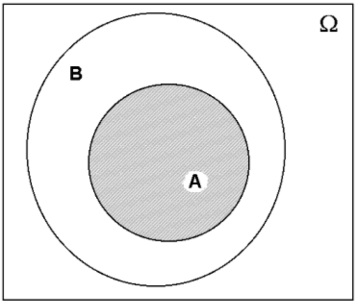
Приклад 2.1. Експеримент полягає у підкиданні монети один раз, $\Omega = \{Г, Ц\}$. Тоді подіями можуть бути підмножини множини Ω: $A = \{Г\}$, $B = \{Ц\}$, $C = \{Г, Ц\}$, $D = \varnothing$, які означають відповідно, що монета впаде догори гербом, цифрою, гербом або цифрою, ні гербом, ні цифрою. Елементарна подія $Г$ сприяє події $A = \{Г\}$ і події $C = \{Г, Ц\}$, але не сприяє події $B = \{Ц\}$ і події

$D=\varnothing$. Аналогічно елементарна подія $Ц$ сприяє події $B=\{Ц\}$ і $C=\{Г,Ц\}$, і не сприяє події $A=\{Г\}$ і події $D=\varnothing$.

Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. Говорять, що *подія A спричинює подію B* або *подія B спричинюється подією A*, коли з відбуванням події A відбувається і подія B (Рис. 2.1). В такому разі кожен елемент множини A є в той же час і елементом множини B, тобто $A\subset B$.

Події A і B називають *рівними*, або *рівносильними*, або *еквівалентними*, якщо $A\subset B$ і $B\subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу і спричинюється іншою. Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються.

Приклад 2.2. Якщо Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}, то подія A={“3”, “6”} спричинює подію B={“1”, “3”, “6”}, яка в свою чергу спричинює подію C={“1”, “2”, “3”, “6”}. Подія C еквівалентна події D, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, відмінне від 4 і 5.



A ⊂ B

Рис. 2.1.

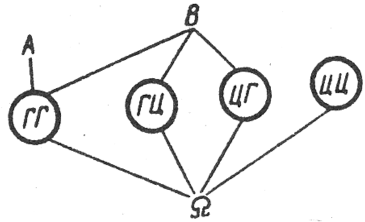


Рис. 2.2

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Експеримент полягає у підкиданні шестигранного кубика один раз, Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}. Нехай одна з випадкових подій A={“3”, “6” } полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, кратне 3. Елемент “3”$\in\Omega$ сприяє події A={“3”, “6”}, а елемент “2”$\in\Omega$ не сприяє цій події, оскільки “2”$\overline{\in}$ A={“3”, “6”}.

Вправа 2. Монету підкидають тричі. Нехай подія A полягає в тому, що принаймні двічі випаде герб. Множиною елементарних подій у даному експерименті можна вважати впорядкований набір результатів першого, другого й третього підкидань монети, тобто

$$\Omega=\{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}.$$

Тоді

$$A=\{ГГГ,\ ГГЦ,\ ГЦГ, ЦГГ\}.$$

Події A сприяють елементарні події $ГГГ$, $ГГЦ$, $ГЦГ$ і $ЦГГ$, а всі інші елементарні події не сприяють події A.

Вправа 3. На стіл (з бортами) навмання кидається більярдна куля. Нехай подія A полягає в тому, що куля опиниться в певній області у площині стола. Тут множина Ω нескінченна (кожній можливій точці зупинки кулі відповідає елементарна подія, яка полягає в тому, що куля зупиниться саме в цій точці). Так само нескінченна й підмножина A, що визначає розглядувану подію.

Вправа 4. Виконується постріл в круглу мішень одиничного радіуса, причому куля не може влучити за межі мішені. В даному разі $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Одна з подій $A = \Omega$ полягає в тому, що куля влучає в мішень. Кожен елемент множини Ω сприяє події A і не сприяє події $B = \varnothing$. Якщо множина $C = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 0{,}2\}$ – подія, то елемент (0; 0) сприяє події C, а елемент $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ не сприяє цій події.

Вправа 5. Двічі підкидають монету. Подія A, яка полягає в тому, що двічі випаде герб, спричинює появу події B, яка полягає в тому, що принаймні один раз випаде герб. Тут

$$A = \{ГГ\},$$

$$B = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$$

і таким чином $A \subset B$, тобто подія A спричинює подію B (Рис. 2.2).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Множина елементарних подій – це будь-яка множина.
2. Подія – це будь-яка підмножина множини Ω елементарних подій.
3. Елементарна подія є подією.
4. Кожен елемент множини елементарних подій сприяє певній події.
5. Кожна подія є вірогідною.
6. Існують неможливі події.
7. Існує елементарна подія, яка не сприяє жодній події.
8. Кожна подія спричинює себе і спричинюється собою.
9. Для будь-якої множини елементарних подій існують нерівні події.
10. Для будь-яких подій A і B принаймні одна з них спричинює іншу.

2. Вказати всі можливі події, якщо задано множину Ω елементарних подій:

1. Ω – множина наслідків експерименту, який полягає в підкиданні відразу двох монет (1 і 2 копійки). При цьому як наслідки розглядаються:

1) усі можливі пари появ герба і цифри на двох монетах, якщо першою вказується монета 1 копійка;

2) кількість появ герба на обох монетах.

2. Ω – множина наслідків експерименту – пострілу в мішень, на якій зазначені можливі кількості отриманих очків: 0, 1, 2, 3, 4, 5 у залежності від відстані точки влучення від центра мішені. При цьому розглядаються наступні наслідки – менше чи не менше 3-х очків отримується після пострілу.

3. Ω – множина наслідків експерименту, що полягає в підкиданні відразу двох гральних кубиків (червоного та білого кольору), на гранях кожного з яких нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються:

1) можливі пари $(i,\ j)$ очок, що випали,

2) можливі суми $i+j$ очок, що випали,

де i – цифра, що випала на верхній грані білого кубика, j – цифра, що випала на грані чорного кубика.

3. Довести, що для подій $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$ і $C\subset\Omega$ мають місце такі властивості.

1. $A\subset A,\ A\subset\Omega,\ \varnothing\subset A$.
2. Якщо $A\subset B$ і $B\subset C$, то $A\subset C$.
3. $A=A$.
4. Якщо $A=B$, то $B=A$.
5. Якщо $A=B$, а $B=C$, то $A=C$.

4. Навести приклади подій $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$, для яких:

1) *A* спричинює *B*, а *B* не спричинює *A*;

2) *A* спричинює *B* і *B* спричинює *A*;

3) *A* не спричинює *B* і *B* не спричинює *A*.

5. Довести, що кожен стохастичний експеримент визначає принаймні дві події.

6. Що можна сказати про експеримент, з яким пов'язано лише дві події?

7. Навести власний приклад стохастичного експеримента, відповідного простору елементарних подій і події *A* та вказати: 1) усі елементарні події, що сприяють *A*; 2) усі елементарні події, що не сприяють *A*.

8. Чи існує подія, що: 1) спричинює будь-яку подію; 2) спричинюється будь-якою подією?

9. Чи завжди існують події *A* і *B*, кожна з яких не спричинює іншу з них?

10. Скільки елементів має простір елементарних подій, якщо з цим простором можна пов'язати лише дві події?

11. Одночасно підкидають два гральних кубики і фіксують пару випавши очок. Подія *A* полягає у тому, що сума очок, що складають пари, дорівнює 9, а *B* – така сума дорівнює 10. Якій з цих двох подій сприяє більша кількість елементарних подій?

12. Сформулювати і розв'язати задачу, аналогічну до попередньої, коли підкидають три гральних кубики.

13. Нехай експеримент полягає у тому, що монету підкидають доти, доки не випаде герб. Подія *A* – герб випав не раніше, ніж при третьому підкиданні, *B* – герб випав не пізніше, ніж при другому підкиданні, *C* – при першому і другому підкиданні випала цифра, *D* – герб випав при підкиданні, номер якого є простим числом, що не перевищує числа 20.

1. Вказати можливий простір Ω елементарних подій.
2. Визначити, з яких елементарних подій складаються *A*, *B*, *C* і *D* та знайти співвідношення між ними.
3. Навести приклад вірогідної та неможливої події для даного стохастичного експерименту.

14. Нехай експеримент полягає у тому, що з відрізка $[18;100]$ навмання вибирають два числа x та y і фіксують точку (x, y).

1. Навести геометричне подання подій: 1) $x > y$; 2) $x = y$; 3) $x < y$; 4) $x \geq 60$; 5) $y \geq 55$; 6) $x \geq 60$, а $y \geq 55$; 7) $x \geq 60$, а $y \leq 30$.
2. Виконати попереднє завдання, за умови, що x та y цілі числа.

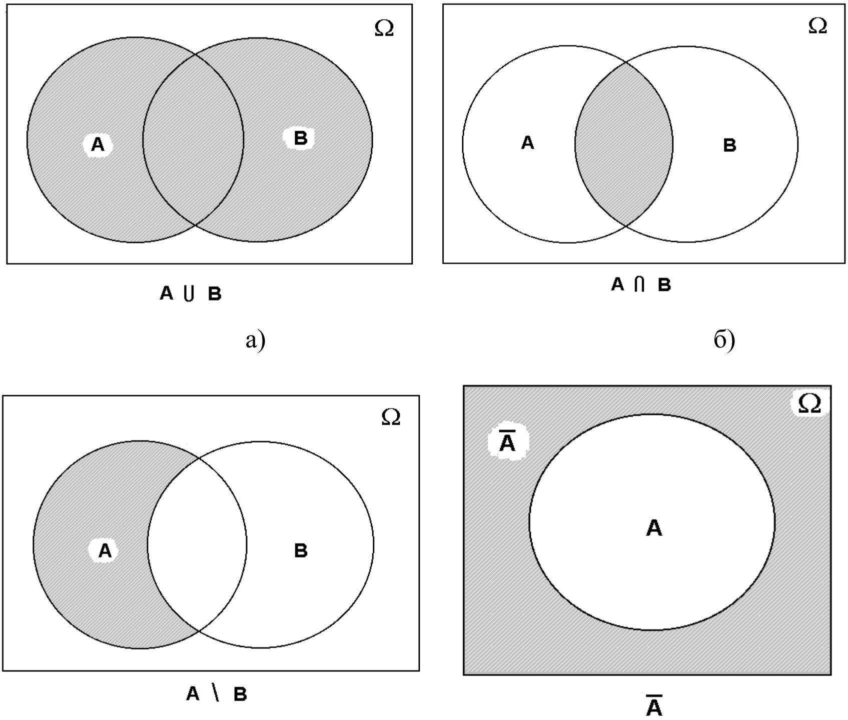
3. Операції над подіями

Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ – деякі події.

Сумою подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій *A* або *B*. Суму C події A і B позначають $C = A \bigcup B$ або $C = A + B$.

Аналогічно визначається *сума довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_k, $k \in K$. Зокрема, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ – *сума скінченної кількості n* подій A_k, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – *сума зчисленної кількості подій* A_k (тут номер події набуває значень з множини N натуральних чисел). Суму скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcup\limits_{k} A_k$, а також $\sum\limits_{k} A_k$.

Геометричне тлумачення суми подій *A* і *B* подане на Рис. 3.1а), де прямокутником зображено множину елементарних подій Ω, один з кругів – подія *A*, інший – подія *B*, заштрихована множина – подія *A*+*B*= $A \cup B$.



а) б) в) г)

Рис. 3.1

Приклад 3.1. Нехай Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз, A={“3”, “6”} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а B={“2”, “4”, “6”} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді $A+B=A\cup B$={“2”, “3”, “4”, “6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія B), або число, кратне 3 (відбувається подія A) (Рис. 3.2).

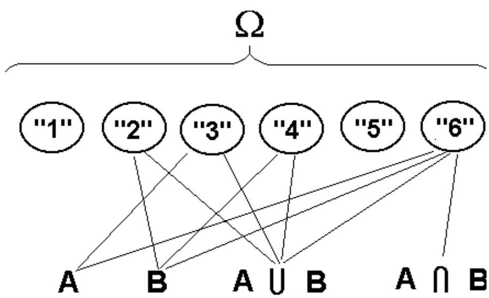


Рис. 3.2

Добутком подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B. Позначають $C = A \bigcap B$ або $C = A \cdot B$.

Аналогічно визначається *добуток довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події A_k, $k \in K$. Зокрема $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ – *добуток скінченної кількості n подій,* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ – *добуток зчисленної кількості подій.* Добуток скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcap_{k} A_k$, а також $\prod_{k} A_k$.

Геометричне тлумачення добутку подій A і B подане на Рис. 3.1б), де заштрихована множина точок – подія $A \cdot B = A \bigcap B$.

Приклад 3.2. Якщо A і B – події з прикладу 3.1, то $A \cdot B = A \bigcap B = \{“6”\}$ – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде число, кратне 3 (відбувається подія A) і парне (відбувається подія B) (Рис. 3.2).

Події A і B називають *несумісними,* якщо $A \cdot B = \varnothing$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні.

Приклад 3.3. Якщо для Ω із прикладу 3.1 $C = \{”1”, “3”, “5”\}$, а $D = \{”2”, “4”, “6”\}$, то C і D несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини C, так і до множини D.

Різницею подій A і B (A мінус B) називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B. Позначають $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

Геометричне тлумачення різниці подій $A \setminus B$ подано на Рис. 3.1 в), де заштрихована множина точок – подія $A \setminus B$.

Подією, протилежною до події А, називають різницю $\Omega \setminus A$, яку позначають $\overline{A}$.

Геометричне тлумачення протилежної події подано на Рис. 3.1г), де заштрихована множина точок – подія $\overline{A}$, протилежна до події A.

Приклад 3.4. Якщо $A = \{“3”, ”6”\}$ і $B = \{“2”, ”4”, ”6”\}$ (див. приклад 3.1), то $A \setminus B = \{“3”\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3, подія $B \setminus A = \{“2”, ”4”\}$ полягає у випаданні парного числа, не кратного 3. Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{“1”, ”2”, ”4”, ”5”\}$ – полягає у випаданні числа, не кратного 3, а $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{“1”, ”3”, ”5”\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Подія $\overline{\Omega} = \varnothing$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина можливих наслідків випробування. Зрозуміло, що $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Якщо $A_1, A_2, \ldots$ – нескінченна послідовність множин $A_i \subset \Omega$, то множину A^*, що складається з елементів, які належать нескінченній кількості множин цієї послідовності, називають *верхньою границею даної послідовності* і позначають $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i = A^*$.

Множину A_*, що складається з елементів, кожен з яких належить усім множинам послідовності A_i, $i \in N$, крім, можливо, скінченного числа їх, називають *нижньою границею даної послідовності* множин A_i і позначають $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i = A_*$.

Якщо $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i = \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i$, то говорять, що послідовність $A_1, A_2, \ldots$ має границю, яку позначають $\lim\limits_{i\to\infty} A_i$.

Коли множини $A_1, A_2, \ldots$, де $A_i \subset \Omega$, $i \in N$, довільні, то

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i. \tag{3.1}$$

Приклад 3.5. Нехай задано послідовність множин $A_i = (-\infty, (-1)^i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Надаючи n значень 1, 2, 3, ..., отримаємо

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \quad \bigcap_{i=2}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \quad \bigcap_{i=3}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \ \ldots,$$

тому $A_* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=n}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1]$.

Аналогічно

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \quad \bigcup_{i=2}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \quad \bigcup_{i=3}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \ \ldots,$$

тому $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, +1]$.

Оскільки $A_* \neq A^*$, то розглядувана послідовність множин $A_i = (-\infty, (-1)^i]$, $i \in N$, границі не має.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибране ціле додатне однозначне число ділиться на 3, а подія B – навмання вибране однозначне число є парним. Елементарна подія E_i – навмання вибране однозначне число є i, де $i = 1, 2, \ldots, 9$, $(E_i = "i")$.

Тоді

$$\Omega = ("1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9"),$$

$$A = ("3", "6", "9"),$$

$$B = (\text{"2"}, \text{"4"}, \text{"6"}, \text{"8"}).$$

Події $C = A + B$ відповідає множина

$$C = (\text{"2"}, \text{"3"}, \text{"4"}, \text{"6"}, \text{"8"}, \text{"9"}).$$

Кількість елементів у множині $C = A + B$ не обов'язково дорівнює сумарній кількості елементів у множинах A і B, оскільки спільні елементи враховуються лише один раз.

Зазначимо, що кожна множина (подія) є об'єднанням (сумою) одноелементних множин, кожна з яких містить одну елементарну подію, які визначають дану множину (подію). Так, у наведеному прикладі

$$A = \{E_3\} + \{E_6\} + \{E_9\}, \quad B = \{E_2\} + \{E_4\} + \{E_6\} + \{E_8\},$$

$$\Omega = \{E_1\} + \{E_2\} + \{E_3\} + \{E_4\} + \{E_5\} + \{E_6\} + \{E_7\} + \{E_8\} + \{E_9\}.$$

Вправа 2. Серед учнів 11 класу навмання вибирається група з п'яти учнів. Подія A полягає в тому, що в групі не більше трьох спортсменів, подія B – спортсменів не менше одного. Можливими наслідками цього експерименту щодо кількості спортсменів у групі очевидно є: E_0 – 0 спортсменів, E_1 – 1 спортсмен, E_2 – 2 спортсмени, ..., E_5 – 5 спортсменів. Тоді

$$\Omega = \{E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots, E_5\};$$

$$A = \{E_0, E_1, E_2, E_3\};$$

$$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}.$$

Подія $C = AB$ полягає в тому, що в групі з п'яти учнів спортсменів є не менше одного і не більше трьох, тобто

$$C = \{E_1, E_2, E_3\}.$$

Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що в групі з п'яти учнів спортсменів немає, а $B \setminus A$ – спортсменів не менше чотирьох (4 або 5).

Вправа 3. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами r_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, причому $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг з радіусом r_k. Події $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$ і $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$ зображені відповідно на Рис. 3.3, а, б.

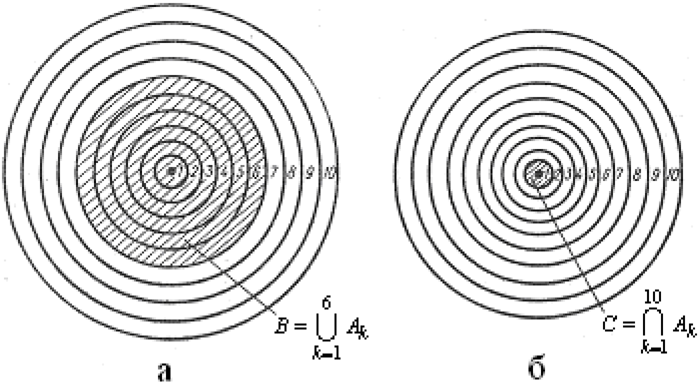


Рис. 3.3

Вправа 4. Нехай подія A полягає в тому, що при підкиданні шестигранного грального кубика на верхній грані випаде не менше, ніж три очка. Нехай можливими наслідками цього випробування є елементарні події $E_i =$"i", $i = 1,\dots,6$, які полягають в тому, що на верхній грані випаде i очок. Тоді

$$\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\};$$

$$A = \{"3", "4", "5", "6"\};$$

$$\overline{A} = \{"1", "2"\}.$$

Таким чином, тут подія $\overline{A}$ означає, що на верхній грані кубика випаде менше, ніж три очка.

Вправа 5. Довести другий дистрибутивний закон, тобто рівність $AB + C = (A+C)(B+C)$ Геометрично цей закон можна проілюструвати так, як показано на Рис. 3.4, а, б.

Сумістивши ці зображення, можна впевнитися, що множини $AB + C$ і $(A+C)$ $(B+C)$ співпадають.

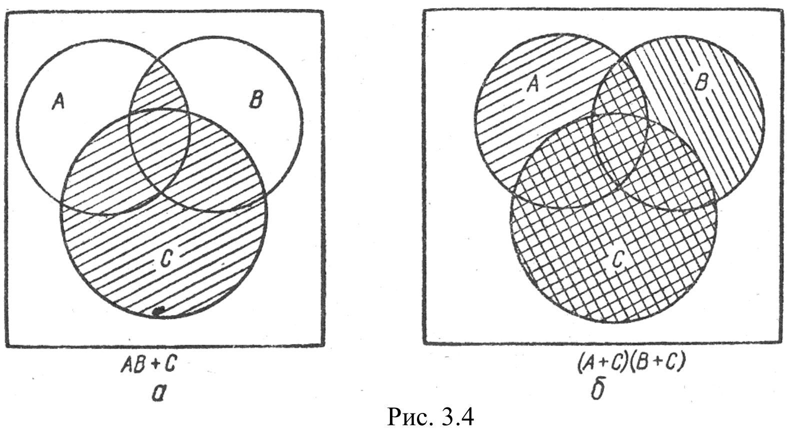


Рис. 3.4

Аналітичне доведення рівності $AB+C=(A+C)(B+C)$ може бути таким.

Нехай E – довільна елементарна подія і $E \in AB+C$. Тоді справджується принаймні одне з двох – або $E \in AB$, або $E \in C$. Якщо $E \in AB$, то $E \in A$ і $E \in B$. Проте тоді $E \in A+C$ і $E \in B+C$ (за означенням суми подій), тобто $E \in (A+C)\,(B+C)$. Якщо $E \in C$, то $E \in C+A$ і $E \in C+B$, тобто $E \in (A+C)\,(B+C)$.

Таким чином, довільний елемент множини $AB+C$ належить множині $(A+C)(B+C)$, тобто

$$(AB+C) \subset (A+C)\,(B+C).$$

Нехай, навпаки, $E \in (A+C)\,(B+C)$. Це означає, що $E \in A+C$ і $E \in B+C$. Якщо $E \in C$, то $E \in C+AB$. Якщо $E \,\overline{\in}\, C$, то $E \in A$ і $E \in B$, тобто $E \in AB$, а отже $E \in AB+C$.

Таким чином, довільний елемент множини $(A+C)\,(B+C)$ є елементом множини $AB+C$, тобто $(A+C)\,(B+C) \subset AB+C$. Звідси і з того, що $(AB+C) \subset (A+C)\,(B+C)$, слідує

$$AB+C=(A+C)\,(B+C).$$

Вправа 6. Довести, що $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, де $A_i \subset \Omega$, $i \in N$, задані події (підмножини простору Ω), а $A^* = \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i$.

Нехай $E \in A^*$, тоді E належить до нескінченної кількості множин A_i. Позначимо ці множини A_{i_k}, $k \in N$, де $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$. Оскільки для кожного $n \in N$ існує $i_k \geq n$, то $E \in A_{i_k} \subset \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, тобто $E \in \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i \quad \forall n \in N$, а тому $E \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, коли $E \in A^*$. Таким чином, $A^* \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$.

Навпаки, якщо $E \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, то $E \in \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i \quad \forall n \in N$. Припустимо, що E належить лише до скінченної кількості множин A_i. Тоді можна вказати найбільший номер n_0, для якого $E \in A_{n_0}$ і $E \notin A_i \ \ \forall\, i > n_0$, а тому $E \notin \bigcup\limits_{k=n_0+1}^{\infty} A$, що неможливо. Отже, E належить до нескінченної кількості множин A_i, а тому $E \in A^*$, коли

$E \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$. Таким чином, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \subset A^*$, а оскільки раніше доведено, що $A^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, то $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

Вправа 7. Нехай задано *зростаючу послідовність множин* A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тобто таку, що $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$.

Тоді

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1, \ \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i = A_2, \ \bigcap_{i=3}^{\infty} A_i = A_3, \ \ldots,$$

тому

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

З іншого боку

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=3}^{\infty} A_i \subset \ldots,$$

тому

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Отже $A_* = A^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Таким чином, якщо послідовність множин A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ зростає, тобто $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то така послідовність має границю

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Аналогічно, нехай задано *спадаючу послідовність множин* A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тобто таку, що $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$.

Тоді $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$, $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i = A_2$, $\bigcup_{i=3}^{\infty} A_i = A_3, \ \ldots,$

тому

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

З іншого боку

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \supset \bigcap_{i=3}^{\infty} A_i \supset \ldots, \text{ тому } A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Отже $A_* = A^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Таким чином, якщо послідовність множин A_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, спадає, тобто $A_i \supset A_{i+1}$, $i=1, 2, 3, \ldots$, то така послідовність має границю $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Зростаючі або спадні *послідовності* множин називають *монотонними*. Таким чином, границя монотонної послідовності множин завжди існує.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо відбувається подія A, то відбувається подія $A+B$.
2. Подія $A+B$ спричинює подію A.
3. Якщо відбувається подія $A\cdot B$, то відбувається і подія A.
4. Подія A спричинює $A\cdot B$.
5. Подія $A\cdot B$ спричинює подію A.
6. Якщо не відбувається подія $A \setminus B$, то відбувається подія B.
7. Якщо відбувається подія A, то відбувається і подія $A \setminus B$.
8. Якщо $C = A - B$, то $A = C + B$.
9. $(A+B)-B=A$; $(A-B)+B=A$.
10. $A+\overline{A}=\Omega$.
11. Неможлива подія – це добуток протилежних подій.
12. Якщо $A=\overline{B}$, то $\overline{A}=B$, тобто події $\overline{\overline{B}}$ і B рівносильні.
13. $A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$.
14. $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.
15. $\bigcap\limits_k A_k = \overline{\bigcup\limits_k \overline{A_k}}$.

16. Правильні наступні співвідношення:

1) $\overline{\sum\limits_i A_i} = \prod\limits_i \overline{A_i}$;
2) $(A+B)-B=A$;
3) $(A+B)-B=A\overline{B}$;
4) $(A-B)+B=A$;
5) $(A-B)+B=A+B$;
6) $(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$;
7) $\overline{\prod\limits_i A_i} = \sum\limits_i \overline{A_i}$;
8) $(A+B)C=AC+BC$;
9) $(A+B)-C=A+(B-C)$;
10) $ABC=AB(C+B)$;
11) $A+B=A+(B-AB)$;
12) $ABC \subset AB-BC=CA$;
13) $(AB+BC+CA)\subset(A+B+C)$;
14) $A\overline{B}C \subset A+B$;
15) $(\overline{A+B})C \subset \overline{A}C+\overline{B}C$;
16) $(\overline{A+B})C=\overline{A}\,\overline{B}C$;
17) $(A+B)C \subset C-(A+B)C$.

2. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $r_k : r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r_k. Що означають події:

1. $B = \sum_{k=1}^{6} A_k$;
2. $C = \prod_{k=1}^{10} A_k$;
3. $A_{k+1} \setminus A_k$, $k \in \overline{1,9}$;
4. $A_1 \setminus A_2$;
5. $\overline{A_k}$, $k \in \overline{1, 10}$.

3. Довести: 1) рівність $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$; 2) включення $A_* \subset A^*$; 3) рівність $\overline{A_*} = B^*$, де $A_* = \underline{\lim} A_i$, $B^* = \overline{\lim}\, \overline{A_i}$.

4. Довести, що з рівності $A + B = AB$ випливає рівність $A = B$.

5. Довести, що:

1) події A_1 і $A_2 \setminus (A_2 \bigcap A_1)$ несумісні і $A_1 \bigcup A_2 = A_1 \bigcup (A_2 \setminus (A_2 \bigcap A_1))$;

2) якщо A_1, A_2, ... – деяка послідовність подій, то події A_1, $A_2 \setminus (A_2 \bigcap A_1)$, $A_3 \setminus (A_3 \bigcap (A_1 \bigcup A_2))$, ... попарно несумісні і сума їх дорівнює сумі подій A_i ;

3) події $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \bigcup A_2), \ldots$ є попарно несумісними, і сума їх дорівнює сумі подій A_i .

6. Довести, що коли події $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ несумісні, то A спричинює $\overline{B}$ і B спричинює $\overline{A}$. Навести відповідну геометричну ілюстрацію.

7. Чи можна здійснювати операції над подіями A і B, коли вони пов'язані з різними просторами елементарних подій?

8. За допомогою операцій над подіями записати подію, яка полягає у тому, що відбувається подія $A \subset \Omega$ і при цьому не відбувається подія $B \subset \Omega$.

9. Яка умова сумісності подій $A + B$, $\overline{A} + B$, $A + \overline{B}$?

10. Довести, що коли A і B – події, що відповідають одному стохастичному експерименту, то $A + B = A + (B - AB)$, причому події A і $(B - AB)$ несумісні.

11. Нехай дано попарно різні події $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ і $C \subset \Omega$. Записати подію, яка полягає у тому, що:

1) відбувається тільки подія *A* з подій *A*, *B* і *C*;
2) відбувається принаймні одна з подій *A*, *B* і *C*;
3) відбувається лише події *A* і *B* з подій *A*, *B* і *C*;
4) відбувається принаймні дві події з подій *A*, *B* і *C*;
5) відбуваються рівно дві події з подій *A*, *B* і *C*;
6) відбуваються не більше двох подій з подій *A*, *B* і *C*;

7) не відбувається жодна з подій *A*, *B* і *C*.

12. Експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба, подія A_i – випадання герба при підкиданні, номер якого непарний і не менший за i.

1. Знайти: 1) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$; 2) $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$; 3) $\overline{A_i}$; 4) $A_1 \setminus A_2$; 5) $A_2 \setminus A_1$; 6) A_*; 7) A^*.

2. Визначити, чи є: 1) події A_i, $i \in N$, попарно несумісними; 2) послідовність A_i, $i \in N$, збіжною.

13. У партії з m виробів є n, $(0 < 2n < m)$, бракованих. Експеримент полягає у тому, що один за одним навмання вибирають (і не повертають) вироби до появи бракованого виробу. Подія *A* – вибрано більше, ніж $m-n$ виробів; *B* – бракований виріб з'явився не раніше, ніж у ($m-n$)-й спробі; *C* – бракований виріб не з'явився при будь-якій спробі.

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, які елементарні події сприяють відповідно подіям *A*, *B* і *C*.

3. Знайти: 1) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$; 2) $A+B$, $A+C$, $B+C$ і $A+B+C$; 3) $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$ і $A \cdot B \cdot C$; 4) $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$; 5) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$; 6) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; 7) $\overline{A+B+C}$; 8) $\overline{A \cdot B \cdot C}$; 9) $A \setminus (B+C)$, $B \setminus (A+C)$ і $C \setminus (A+B)$; 10) $A \setminus (B \cdot C)$, $B \setminus (A \cdot C)$ і $C \setminus (A \cdot B)$.

14. Навмання вибирається одне з чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Подія *A*= “навмання вибране число ділиться на три без залишку”. Подія *B*= “взяте навмання число парне”. Записати як множини події A, B, $A+B$, AB.

15. Підкидається гральний кубик, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Нехай *A*= “випала парна цифра”; *B*= “випала одна з цифр 1, 2”. Описати за допомогою елементарних подій події $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $A+B$, $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{AB}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$.

16. Перевіряються три пристрої. Подія *A*= “хоча б один з трьох пристроїв, що перевіряються, бракований”, *B*= “всі три перевірені пристрої якісні”. Побудувати простір Ω елементарних подій. Описати і події A, B за допомогою елементарних подій. Що означають події $A+B$ і AB?

17. Перевіряються чотири пристрої. Подія *A*= “хоча б один з чотирьох перевірених виробів є бракованим”. Подія *B*= “бракованих виробів не менше двох”. Побудувати простір Ω елементарних подій. Записати події A, B за допомогою елементарних подій. Що означають протилежні події $\overline{A}$ і $\overline{B}$?

18. 1. Коли можливі рівності: 1) $A+B=\overline{A}$; 2) $AB=\overline{A}$; 3) $A+B=AB$?

2. Знайти подію $X\subset\Omega$, якщо відомі події $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$ та правильна рівність

1) $(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+(\overline{X+A})+(\overline{X+\overline{A}})=B$; 2) $\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B$.

19. Судно має одне кермо, чотири котли та дві турбіни. Подія A означає справність керма, B_k ($k=1,2,3,4$) – справність k-го котла, а C_j ($j=1,2$) – справність j-ої турбіни. Подія D =“судно кероване”, що означає – справне кермо, хоча б один з котлів і хоча б одна з турбін. Виразити D і $\overline{D}$ через A, B_k, C_j.

20. Підкидаються два гральних кубики. Побудувати три різні простори елементарних подій. Нехай подія A – сума очок, що випали на обох кубиках, непарна. Подія B=“хоча б на одному з кубиків випала 1”. Описати події AB, $A+B$, $A\overline{B}$ для кожного з побудованих просторів елементарних подій.

21. Нехай $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $C\subset\Omega$ – попарно різні події. Знайти умови та вирази для подій, які визначаються тим, що відбувається:

1) тільки подія A; 2) тільки A і B; 3) всі три події; 4) принаймні одна з подій; 5) принаймні дві події; 6) одна і тільки одна; 7) дві і тільки дві; 8) жодна; 9) не більше двох.

22. Нехай A, B, C – випадкові події. З'ясувати зміст рівностей:

1) $ABC=A$; 2) $A+B+C=A$.

23. Спростити вирази:

1) $AC+C$; 2) $AC+BC+C$; 3) $(A+C)(B+C)$; 4) $(A+B)(A+\overline{B})$;

5) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$; 6) $A-(A-B)$.

7) $(A-B)(A-\overline{B})$; 8) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)\bigcup AB$;

9) $(A+B)(B+C)$; 10) $A+\overline{A}B+(\overline{A+B})$;

11) $A\overline{B}+AB+\overline{A}B$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, якщо $A_n=[\frac{1}{n};1)$;

13) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, якщо $B_n=[a;b-\frac{1}{n}]$.

24. Нехай $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $C\subset\Omega$ – довільні події. Довести рівності:

1) $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$; 2) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$;

3) $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$;

4) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$.

5) $A + B = A + (B \setminus AB)$; 6) $AB = B \setminus (B \setminus A) = A \setminus (A \setminus B)$;

7) $(A \setminus B)C = AC \setminus BC$; 8) $AC - B = AC - BC = AC - ABC$;

9) $\overline{A}B + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$; 10) $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$;

11) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 12) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$;

13) $AB + C = (A + C)(B + C)$; 14) $\overline{B \setminus AB} = \overline{B} + AB$;

15) $\Omega \setminus (A + B) = (\Omega \setminus A)(\Omega \setminus B)$; 16) $A + \overline{A}B + (\overline{A+B}) = \Omega$.

25. Нехай $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ – довільні події. Довести, що події A, $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A+B}$ попарно несумісні і сума їх є вірогідною подією.

26. Нехай $A \subset B$. Спростити вирази:

1) AB; 2) $A + B$; 3) ABC; 4) $A + B + C$.

27. Довести, що дані події вірогідні:

1) $(A + B)(A + \overline{B}) + (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$;

2) $(A + B)(\overline{A} + \overline{B}) + (A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

28. Довести, що подія $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$ неможлива.

29*. У певному будинку мешкають люди, одні з яких завжди говорять правду, а інші можуть сказати й неправду, проте ніколи не визнають, сказали вони неправду чи ні. Для визначення кількості таких мешканців проведено експеримент, який полягав у тому, що кожен мешканець повинен був відповісти "так" або "ні" на питання "Чи правдива Ви людина?". Перш ніж відповісти на це питання, кожен мешканець підкидав монету. Якщо випадав герб, то він повинен був сказати "так" (незалежно від того, ким він є насправді). Якщо ж випадала цифра, то мешканець повинен був правдиво відповісти на питання. При цьому, що випало: герб чи цифра, знав лише сам мешканець. Результатом експерименту є кількість відповідей "так" та кількість відповідей "ні".

1. Чи є кожна з відповідей "так" правдивою?

2. Чи є кожна з відповідей "ні" правдивою?

3. Чи дозволить проведений експеримент розв'язати задачу визначення кількості мешканців, які можуть сказати неправду?

4. Чи можна розв'язати поставлену задачу, аналізуючи подію A, яка полягає у тому, що у мешканців, які можуть сказати неправду, кількість випадань герба дорівнює кількості випадань цифри?

4. Простір подій.
Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – простір елементарних подій, що відповідає певному експерименту, а S – *деяка* (не будь-яка, див. п.1.6) *сукупність підмножин* Ω, що задовольняє умови:

1_s) $\Omega \in S$;

2_s) якщо $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;

3_s) якщо $A_k \in S$, $k \in N$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in S$.

Тоді кожну підмножину $A \subset \Omega$, що належить до сукупності S, називають *випадковою подією* або просто *подією*, а сукупність S називають *простором подій*, що відповідає даному простору Ω елементарних подій.

Таким чином, поняття події вводиться не само по собі, а лише у зв'язку з поняттям простору подій.

Приклад 4.1. Для будь-якої множини Ω елементарних подій покладемо $S=\{\varnothing, \Omega\}$. Тоді S задовольняє умови 1) - 3), тобто є простором подій (*найвужчим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями вважаються лише неможлива та вірогідна події. Зокрема, для експерименту однократного підкидання монети, коли $\Omega=\{Г, Ц\}$, простір S випадкових подій може складатися лише з неможливої події $\varnothing$, яка полягає в тому, що не випаде ні герб, ні цифра, та з вірогідної події Ω, яка полягає у тому, що випаде або герб, або цифра.

Зауважимо, що коли для множини $\Omega=\{Г, Ц\}$ покласти $S=\{\varnothing, \Omega, \{Г\}\}$, то ця сукупність підмножин простору Ω не задовольняє умову 2), а тому в цьому випадку S не може бути простором подій. Отже, не кожна сукупність S підмножин простору Ω елементарних подій може бути простором подій.

Приклад 4.2. Для будь-якого простору Ω елементарних подій покладемо $S=\{A: A\subset \Omega\}$, тобто елементами сукупності S вважатимемо будь-які підмножини простору Ω. Тоді S задовольняє умови 1) – 3), тобто є простором подій (*найширшим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями будуть будь-які підмножини простору Ω. Зокрема, якщо $\Omega=\{Г, Ц\}$ є простором елементарних подій, що відповідає однократному підкиданню монети, то простір S випадкових подій може складатися з подій $A=\varnothing$ – неможливої, $B=\{Г\}$– випадання герба, $C=\{Ц\}$ – випадання цифри та $D=\{Г, Ц\}$ – випадання або герба, або цифри.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – простір елементарних подій, що відповідає експерименту – однократному підкиданню шестигранного кубика. Покладемо S={$\varnothing$, Ω, {“6”}, {“1”, “2”, “3”, “4”, “5”}}. Тоді S задовольняє умови 1)–3), тобто розглядувана сукупність S підмножин множини Ω може бути простором подій, а елементи сукупності S – подіями.

Зауважимо, що сукупність S можна було визначити інакше: наприклад, S={$\varnothing$, Ω, {“1”}, {“2”, “3”, “4”, “5”, “6”}}, або визначити S як у прикладі 4.2: $S=\{A: A \subset \Omega\}$.

Отже, одному і тому ж простору Ω *елементарних подій може відповідати кілька просторів* S *випадкових подій*. *Множина*

$A \subset \Omega$ залежно від обраного простору S подій може бути подією, а може й не бути. Лише множини $\varnothing$ та Ω є подіями для будь-якого простору S випадкових подій.

Вправа 2. Нехай $\Omega=[-r; r]$ – простір елементарних подій, який характеризує результати експерименту: положення точки, в яку влучив снаряд, відносно цілі (якщо $x<0$ – недоліт на відстань $(-x)$; $x>0$ – переліт на відстань x; $x=0$ – влучення).

Розглянемо сукупність $\tilde{S}$ підмножин $A\subset[-r; r]$, кожна з яких є об'єднанням скінченної кількості проміжків $\langle \alpha_k ; \beta_k \rangle \subset \Omega$. При цьому кожен проміжок $\langle \alpha_k ; \beta_k \rangle$ може бути або відрізком $[\alpha_k ; \beta_k]$, або інтервалом (α_k , β_k), або піввідрізком $[\alpha_k , \beta_k)$, або півінтервалом $(\alpha_k ; \beta_k]$.

Тоді $\tilde{S}$ не є простором подій, оскільки не виконується умова 3). Проте, виявляється, що існує найменша сукупність $S \supset \tilde{S}$, яка вже може бути простором подій. Цей *простір подій* називають *породженим сукупністю скінченних об'єднань числових проміжків*. Зокрема S містить усілякі об'єднання $\bigcup\limits_k \langle \alpha_k ; \beta_k \rangle$, $\langle \alpha_k ; \beta_k \rangle \subset [-r ; r]$, а також перерізи та різниці таких об'єднань.

Зауважимо, що в останній вправі замість відрізка $[-r; r]$ можна взяти довільний проміжок.

Вправа 3. Нехай простір Ω елементарних подій скінченний або зчисленний, тобто $\Omega=\{x_1, x_2, ...\}$, а S-відповідний простір подій. Довести наступні твердження:

1. Об'єднання будь-якої кількості подій з простору S також є подією з цього простору.

2. Переріз будь-якої кількості подій з простору S також є подією з цього простору.

3. Для кожної елементарної події $x_i \in \Omega$ існує найвужча подія $A(x_i)$, що містить у собі x_i.

4. Якщо $i \neq j$, то або $A(x_i) = A(x_j)$, або $A(x_i) \bigcap A(x_j) = \varnothing$.

5. Існує не більше ніж зчисленна кількість попарно несумісних подій B_j, відмінних від неможливої, які в сумі дають простір Ω.

6. Будь-яка подія простору S, відмінна від неможливої, є сумою деяких подій B_j з твердження 5.

1. Якщо $A_i \in S$, то $A = \bigcup\limits_i A_i \subset \Omega = \{x_1, x_2, ...\}$, а тому $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ...\}$ – скінченна або зчисленна. Для кожної елементарної події x_{i_k} знайдемо подію $A_{i(k)}$, таку що $x_{i_k} \in A_{i(k)}$. Тоді кількість

таких подій скінченна або зчисленна і $A=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}=\bigcup_k A_{i(k)} \in S$ за властивістю 3_s з простору подій.

Твердження 1 доведено.

2. Якщо $A_i \in S$, то $A=\bigcap_i A_i = \overline{(\overline{\bigcap_i A_i})} = \overline{(\sum_i \overline{A_i})} \in S$ за властивістю 2_s і доведеним твердженням 1.

Твердження 2 доведено.

3. Для кожної $x_i \in \Omega$ позначимо $X_i = \{A \in S : x_i \in A\}$. Тоді $X_i \neq \varnothing$, оскільки містить у собі принаймні вірогідну подію Ω. Тому, враховуючи твердження 2, дістанемо подію $A(x_i) = \bigcap_{A \in X_i} A$ – найвужчу подію з S, що містить у собі x_i.

Твердження 3 доведено.

4. Нехай $i \neq j$. Тоді можливі два випадки:

1) $A(x_i) = A(x_j)$ і тоді твердження 4 доведено, або

2) $A(x_i) \neq A(x_j)$ і тоді треба довести, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) = \varnothing$.

Припустимо, що $x_i \in A(x_j)$. Тоді подія $A^*(x_i) = A(x_i) \bigcap A(x_j)$ є вужчою, ніж $A(x_i)$ і містить у собі x_i, а це неможливо.

Отже, $x_i \notin A(x_j)$ і аналогічно $x_j \notin A(x_i)$. Тому, якщо припустити, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) \neq \varnothing$, дістанемо, що подія $A(x_i) \setminus A(x_j) = A^{**}(x_i)$ є вужчою, ніж $A(x_i)$ і містить у собі x_i, а це неможливо.

Отже, у випадку 2) маємо, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) = \varnothing$. Твердження 4 доведено.

5. Кількість множин $A(x_i)$, $i \in \{1, 2, \dots\}$ скінченна або зчисленна. Якщо ми виберемо з них лише попарно різні, то дістанемо потрібну сукупність подій $B_j \neq \varnothing$, попарно несумісних, для яких $\sum_j B_j = \Omega$.

6. Візьмемо довільну подію $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots.\} \in S$. Тоді очевидно $A \subset \bigcup_k A(x_{i_k})$. З іншого боку, якщо $x \in \bigcup_k A(x_{i_k})$, то $\exists$ $k = k(x) : x \in A(x_{i_k})$.

Якщо припустити, що $x \notin A$, то подія $A^{***}(x_{i_k}) = A(x_{i_k}) \bigcap A$ є вужчою, ніж $A(x_{i_k})$ і містить x_{i_k}, що неможливо. Тому з умови $x \in \bigcup_k A(x_{i_k})$ випливає умова $x \in A$, тобто $A \subset \bigcup_k A(x_{i_k})$.

Твердження 6 доведено.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття простору подій означається за допомогою поняття події.
2. Поняття події означається за допомогою поняття простору подій.
3. Для кожного простору Ω елементарних подій існує єдиний простір випадкових подій.
4. Існує простір Ω елементарних подій, для якого існує лише один простір S випадкових подій.
5. Якщо простір Ω елементарних подій містить 2 елементи, то відповідний йому простір випадкових подій може містити 3 елементи.
6. Якщо Ω=[0; 1], а S містить елементи $\varnothing$, Ω і довільні скінченні або зчисленні підмножини $A \subset \Omega$ і ніяких інших, то S є простором подій.
7. Для множини $\Omega=\{Г, Ц\}$ відповідний йому простір S випадкових подій може містити лише 2 або 4 елементи.
8. Сукупність S довільних проміжків множини $\Omega=(-\infty; +\infty)$ та будь-яких їх скінченних або зчисленних об'єднань може бути простором подій.
9. Сукупність S довільних підмножин множини $\Omega=N$ натуральних чисел може бути простором подій.
10. Сукупність S будь-яких скінченних підмножин множини $\Omega=N$ може бути простором подій.
11. Кожна елементарна подія $E \in \Omega$ утворює подію $\{E\} \in S$.

2. Побудувати можливі простори S випадкових подій, що відповідають даним просторам Ω елементарних подій:

1. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні монети двічі. При цьому як наслідки розглядаються:

1) однією стороною вгору чи різними упала монета обидва рази?

2) кількість появ герба в обох підкиданнях;

3) усі можливі пари появ герба і цифри в обох підкиданнях.

2. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні шестигранного кубика, частина граней якого пофарбовані в білий колір, інша частина - у червоний, третя частина - у зелений. У кожній з частин є не менше однієї грані. При цьому як наслідки розглядаються :

1) колір грані, що виявилася верхньою;

2) зелений чи ні колір виявляється на верхній грані

3. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні двічі шестигранного кубика, на гранях якого нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються :

1) можливі суми $i+j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$

2) чи виконується нерівність $i \le j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,
де i – цифра, що випадає на верхній грані кубика при першому підкиданні, j – цифра, що випадає на верхній грані кубика при другому підкиданні.

3. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

1) один елемент, 2) два елементи, 3) три елементи.

4. 1. Довести, що коли простір елементарних подій Ω скінченний або зчисленний і для будь-якої елементарної події $E \in \Omega$ множина $\{E\}$ є подією, то простір подій S співпадає із сукупністю усіляких підмножин множини Ω.

2. Чи буде правильним попереднє твердження, коли $\Omega = [a;b]$.

5. 1. Чи можна стверджувати, що коли $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями, то подіями також є: 1) $\overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A} + \overline{B}$; 3) $\overline{A} \setminus \overline{B}$.

2. Чи можна з простором елементарних подій $\Omega = \{"Г","Ц"\}$ пов'язати простір подій, що міститиме: 1) лише одну подію; 2) лише дві події; 3) лише три події; 4) лише чотири події; 5) більше чотирьох подій, що попарно різні.

6. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Побудувати сукупність S підмножин простору Ω, яка не буде простором подій.

7. Для простору елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ побудувати простір подій S, відмінний від найвужчого і від найширшого.

8. Для простору елементарних подій $\Omega = [0;1]$ побудувати простір подій S, що містить чотири події. Скільки таких просторів можна побудувати?

9. Нехай A, B_1 і B_2 – події з простору S, причому $A = B_1 + B_2$. Довести, що існують несумісні події $B_1^* \subset B_1$ і $B_2^* \subset B_2$, для яких $A = B_1^* + B_2^*$.

10. Узагальнити задачу **9** на випадок, коли $A = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

11. Нехай простір елементарних подій містить n елементів. Скільки подій містить відповідний найширший простір подій S?

12. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ відповідає експерименту з підкиданням грального кубика. Перевірити, чи можливо, що при цьому:

1. Випадання i очок є подією для кожного $i \in \overline{1,5}$, проте випадання 6 очок не є подією.

2. Випадання i очок є подією для кожного $i \in \overline{1,4}$, проте випадання 5 очок та випадання 6 очок не є подіями.

3. Випадання менше 4-х очок та більше 4-х очок є подіями, проте випадання 4-х очок не є подією.

13*. Відомо, що $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями. Побудувати найвужчий простір подій S, для якого $A \in S$ і $B \in S$.

14*. Монету підкидають доти, поки два рази поспіль не випаде герб або цифра.

1. Визначити, яким є відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складається подія A, яка полягає у тому, що:

1) монету підкидали не більше, ніж шість разів;

2) монету підкидали парну кількість разів;

3) монету підкидали непарну кількість разів.

15. Довести, що простір подій S є замкненим відносно операцій суми, добутку та різниці подій, тобто коли $A_k \subset \Omega$, $k \in N$, є подіями, то подіями також є: 1) $A_1 + A_2$; 2) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $n \in N$; 3) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 4) $A_1 \cap A_2$; 5) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $n \in N$; 6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$; 7) $A_i \setminus A_j$, $i \in N$, $j \in N$.

16*. Нехай S_1 і S_2 – простори подій, що відповідають просторам елементарних подій Ω_1 і Ω_2, а $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ – декартів добуток множин A і B, причому за означенням $\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$. Перевірити, чи є множина $S = \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}$ простором подій, що відповідає простору елементарних подій $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

17*. Нехай простір Ω елементарних подій зчисленний, а простір S подій нескінченний.

1. Чи обов'язково простір S є зчисленним?

2. Чи обов'язково S є найширшим простором подій?

18*. Нехай простір елементарних подій Ω пов'язаний з підкиданням монети до першого випадання герба. Чи може відповідний простір подій S складатися з: 1)однієї події; 2) двох подій; 3) трьох подій; 4) n подій; 5) зчисленної кількості подій; 6) мати стільки подій, скільки точок у множині R дійсних чисел?

5. Статистична ймовірність події

Розглянемо деякий простір S випадкових подій, що відповідає простору Ω елементарних подій.

Нехай проведено серію із n випробувань (спостережень), в яких відбулися так звані спостережені елементарні події $E_{\text{сп } i} \in \Omega,\ \ i \in \overline{1,\ n}$. Візьмемо довільну подію $A \in S$. Тоді:

1) число $K_n(A)$, що дорівнює кількості тих спостережених елементарних подіі $E_{\text{сп } i}$, які належать до A (сприяють події A), називається *абсолютною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань;

2) число $P_n^*(A) = \dfrac{K_n(A)}{n}$ називається *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань.

Статистична ймовірність (або відносна частота) характеризує середню кількість відбувань певної події в одному (кожному з n) випробуванні.

Підкреслимо, що аргументами функцій K_n і P_n^* є деякі підмножини простору Ω, включаючи множини $\varnothing$ і Ω.

Приклад 5.1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S = \{\varnothing, \Omega, \{Г\}, \{Ц\}\}$ і подія $A_0 = \{Г\}$ – випадання герба при однократному підкиданні монети.

Припустимо, що проведено $n = 100$ підкидань монети, в результаті яких герб випадав 45 разів. Тоді $K_{100}(\{Г\})=45$, $K_{100}(\{Ц\})=100–45=55$, $K_n(\varnothing) = 0$, $K_n(\Omega) = 100$ – абсолютні частоти відповідних подій. Числа $P_{100}^*(\{Г\}) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$, $P_{100}^*(\{Ц\}) = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$, $P_{100}^*(\varnothing)=0$, $P_{100}^*(\Omega) = 1$ – це статистичні ймовірності (відносні частоти) відповідних подій у даній серії із $n = 100$ підкидань монети. Зокрема, $K_{100}(A_0) = 45$, $P_{100}^*(A_0) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$.

Зауважимо, що коли провести іншу серію із 100 підкидань монети, то дістанемо значення $P_n^*(A),\ A \in S$, які не обов’язково співпадатимуть з попередніми. Проте, якщо провести досить велику кількість досить довгих серій підкидань, то часто серед одержаних значень $P_n^*(A)$ можна виділити досить велику групу близьких між собою значень. Переважна більшість з них у певному розумінні групуються одне біля одного, а тому й біля певного фіксованого числа. Саме тому *статистична ймовірність* $P_n^*(A)$ при досить великих n *характеризує міру можливості відбування події* A *не тільки у кожному з* n *проведених випробувань, а й у тих, що можуть бути проведеними.*

Безпосередньо з означення випливають *основні властивості статистичної ймовірності:*

$1_р$. $P_n^*(A) \geq 0,$ тобто статистична ймовірність довільної події $A \in S$ невід'ємна;

$2_р$. $P_n^*\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P_n^*(A_k)$, коли $A_k \in S$ і $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (події A_k попарно несумісні), тобто статистична ймовірність скінченної або зчисленної суми попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій. Це так звана *властивість повної* (*або зчисленної*) *адитивності* статистичної ймовірності.

$3_р$. $P_n^*(\Omega) = 1,$ тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Властивості $1_р$-$3_р$ називають *основними або визначальними*. З них випливають усі інші властивості статистичної ймовірності.

Приклад 5.2. Довести, що $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$. Справді,

$$A \cdot \overline{A} = \varnothing \text{ і } A + \overline{A} = \Omega.$$

Тому за основними властивостями $2_р$ і $3_р$ маємо:

$$P_n^*(A + \overline{A}) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}) = P_n^*(\Omega) = 1.$$

Звідси

$$P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A).$$

Нехай простір $\Omega = \{E_1, ..., E_k\}$ скінченний і кожна множина $\{E_i\}$, $i \in \overline{1, k}$, є подією. Якщо для n випробувань виявлено, що статистичні ймовірності $P_n^*(\{E_i\})$ однакові (з певною точністю) для усіх $i \in \overline{1, k}$, то тоді кажуть, що *наслідки* (*результати*) *випробувань статистично рівноможливі*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S = \{\varnothing, \Omega\}$, а серія випробувань така ж, як і у прикладі 5.1. Тоді про абсолютні (чи відносні) частоти подій $A = \{Г\}$ і $B = \{Ц\}$ говорити не можна, оскільки таких подій немає в просторі подій S, а тому множини $A = \{Г\}$ і $B = \{Ц\}$ подіями не вважаються.

Отже, про абсолютні і відносні частоти в даній серії із n випробувань можна говорити лише для будь-якої події A, що належить даному простору S випадкових подій.

Вправа 2. Нехай підкидається шестигранний гральний кубик і простір елементарних подій $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$, простір S подій – сукупність будь-яких підмножин простору Ω, а подія $A_1 = \{"3", "6"\}$ – випадання при однократному підкиданні кубика числа, кратного 3. Припустимо, що проведено n=15 таких підкидань і спостерігалися такі результати:

$$E_{\text{сп }1}=\text{"5"},\quad E_{\text{сп }2}=\text{"6"},\quad E_{\text{сп }3}=\text{"6"},\quad E_{\text{сп }4}=\text{"6"},\quad E_{\text{сп }5}=\text{"4"},$$
$$E_{\text{сп }6}=\text{"3"},\quad E_{\text{сп }7}=\text{"5"},\quad E_{\text{сп }8}=\text{"2"},\quad E_{\text{сп }9}=\text{"6"},\quad E_{\text{сп }10}=\text{"4"},$$
$$E_{\text{сп }11}=\text{"5"},\quad E_{\text{сп }12}=\text{"6"},\quad E_{\text{сп }13}=\text{"3"},\quad E_{\text{сп }14}=\text{"3"},\quad E_{\text{сп }15}=\text{"5"}.$$

Тоді абсолютні частоти $K_{15}(E_i)$ елементарних подій $E_i=\text{"}i\text{"},\ i\in\overline{1,6}$, дорівнюють:

$$K_{15}(E_1)=K_{15}(\text{"1"})=0,\quad K_{15}(E_2)=K_{15}(\text{"2"})=1,\quad K_{15}(E_3)=K_{15}(\text{"3"})=3,$$
$$K_{15}(E_4)=K_{15}(\text{"4"})=2,\quad K_{15}(E_5)=K_{15}(\text{"5"})=4,\quad K_{15}(E_6)=K_{15}(\text{"6"})=5.$$

Тепер можна обчислити абсолютну частоту $K_{15}(A)$ для довільної події $A\in S$.

Зокрема, $K_{15}(A_1)=K_{15}(\{\text{"3"},\text{"6"}\})=K_{15}(\text{"3"})+K_{15}(\text{"6"})=3+5=8$ – абсолютна частота випадання числа, кратного 3, в даній серії із n=15 підкидань кубика.

Статистична ймовірність або відносна частота події A_1 – це число $P_{15}^*(A_1)=\dfrac{K_{15}(A_1)}{15}=\dfrac{8}{15}$. Аналогічно можна підрахувати статистичні ймовірності елементарних подій:

$$P_{15}^*(\text{"1"})=0,\quad P_{15}^*(\text{"2"})=\frac{1}{15},\quad P_{15}^*(\text{"3"})=\frac{3}{15},$$
$$P_{15}^*(\text{"4"})=\frac{2}{15},\quad P_{15}^*(\text{"5"})=\frac{4}{15},\quad P_{15}^*(\text{"6"})=\frac{5}{15}.$$

Вправа 3. Нехай простір елементарних подій $\Omega=[a;b]$, а простір подій S породжується сукупністю скінченних об'єднань проміжків, що є частинами $[a;b]$. Припустимо, що проведена серія із n випробувань, в результаті яких спостерігалися елементарні події $E_{\text{сп }i}\in[a;b]=\Omega,\ i\in\overline{1,n}$. Тоді цілком можливо, що для кожної елементарної події $E=x\in[a;b]$ її абсолютна частота $K_n(E)=K_n(x)$ дорівнює 0 або 1, а $P_n^*(E)=0$ в межах точності обчислень, якщо n – досить велике число. В подібних випадках для визначення $P_n^*(A)$ слід користуватися формулою $P_n^*(A)=\dfrac{K_n^*(A)}{n}$.

Вправа 4. Довести, що $P_n^*(\varnothing)=0$, тобто статистична ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

Справді, оскільки $\varnothing\cdot\varnothing=\varnothing$ і $\varnothing=\varnothing+\varnothing$, то за властивістю $2_{\text{р}}$ $P_n^*(\varnothing)=P_n^*(\varnothing)+P_n^*(\varnothing)$, і тому $P_n^*(\varnothing)=0$.

Вправа 5. Якщо $A\subset B$, то $P_n^*(B)=P_n^*(A)+P_n^*(B\setminus A)$, а тому $P_n^*(A)\le P_n^*(B)$. Зокрема, $P_n^*(A)\le 1$ для будь-якої події A.

Справді, якщо $A \subset B,$ то $B = A + (B \setminus A)$ і $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $1_р$ маємо:

$$P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A) \geq P_n^*(A).$$

Зокрема, якщо $B = \Omega$, то $A \subset \Omega$, і тому $P_n^*(A) \leq P_n^*(\Omega) = 1$ для будь-якої події A.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Число $K_n(A)$ появ події A може набувати будь-якого значення з проміжку $[0; n]$.

2. Відносна частота $P_n^*(A)$ події A може набувати будь-якого значення з проміжку $[0; 1]$.

3. Якщо $P_n^*(A) = 1$, то A – вірогідна подія.

4. Якщо $P_n^*(A) = 0,$ то A – неможлива подія.

5. Якщо $P_n^*(A + B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$, то A і B несумісні події.

6. Якщо $P_n^*(A) + P_n^*(B) = 1,$ то A і B протилежні події.

7. Якщо $P_n^*(A + B) \neq P_n^*(A) + P_n^*(B),$ то A і B сумісні події.

8. Якщо подія A спричинює подію $B,$ то $P_n^*(A) < P_n^*(B)$.

9. Якщо $P_n^*(A) < P_n^*(B)$, то подія A спричинює подію B.

10. Для будь-яких подій $A \in S$, $B \in S$ і $C \in S$:

$$P_n^*(A + B + C) = P_n^*(A) + P_n^*(B) + P_n^*(C) -$$
$$- P_n^*(AB) - P_n^*(AC) - P_n^*(BC) + P_n^*(ABC).$$

11. Якщо $A \subset B,$ то $P_n^*(B \setminus A) = P_n^*(B) - P_n^*(A).$

12. Для кожного стохастичного експерименту його наслідки статистично рівноможливі.

13. Якщо Ω – нескінченна множина, то наслідки відповідного стохастичного експерименту не є статистично рівно можливими.

14. Якщо усі наслідки стохастичного експерименту статистично рівноможливі, то $\Omega = \{E_1, ..., E_k\}$ і для будь-якої події $A \subset \Omega$, $A = \{E_{i_1}, ..., E_{i_m}\}$ правильна рівність $P_n^*(A) = \dfrac{m}{k}$.

2. Монету підкидали 10 разів. Якими можуть бути при цьому абсолютні і відносні частоти появ герба і цифри?

3. Шестигранний кубик, частину граней якого пофарбовано в білий колір, другу частину – у червоний колір, третю частину – у зелений колір, підкидали 5 разів. Якими при цьому можуть бути абсолютні і відносні частоти випадань на верхній грані кожного з трьох кольорів?

4. Шестигранний кубик, частину граней якого пофарбовано в білий колір, другу частину – у червоний колір, третю частину – у зелений колір, підкидали 1000 разів. При цьому як результати випробувань розглядали колір верхньої грані. Виявилося, що в 1000 випробуваннях білою гранню догори кубик падав 500 разів, червоною – 300, зеленою – 200. Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні ймовірності всіх подій кожного з просторів, виходячи з зазначених даних.

5. Шестигранний кубик підкидали 1000 разів, при цьому з'ясувалося, що 6 очок випадали 600 разів, 5 – 300 разів, 4 – 50 разів. Виходячи з наведених даних, побудувати всі можливі простори подій та визначити статистичні ймовірності всіх подій кожного з просторів.

6. Сформулювати і довести властивості абсолютної частоти аналогічно до властивостей статистичної ймовірності.

7. Довести (двома способами), що:

1. $0 \le P_n^*(A) \le 1$, тобто статистична ймовірність довільної події може набувати значення лише з відрізка $[0;1]$.

2. Для довільних подій $A \in S$, $B \in S$ мають місце рівності:

$$1)\ K_n(A+B) = K_n(A) + K_n(B) - K_n(AB);$$

$$2)\ P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

8. У таблиці 5.1 наведено результати серії випробувань, проведених Ж. Бюффоном та К. Пірсоном стосовно експерименту з підкиданням монети.

Табл. 5.1

	Кількість підкидань	Кількість випадань герба
Ж. Бюффон	4040	2048
К. Пірсон	12000	6019
К. Пірсон	24000	12012

1. Обчислити для кожної серії $P_n^*(Г)$ – відносну частоту випадання герба та $P_n^*(Ц)$ – відносну частоту випадання цифри.

2. Знайти середнє арифметичне відносних частот $P_{4040}^*(Г)$, $P_{12000}^*(Г)$ та $P_{24000}^*(Г)$.

3. З наведених серій утворити нову серію довжиною $n = 4040 + 12000 + 24000$ і обчислити для неї $P_n^*(Г)$.

4. Порівняти, що ближче до $\frac{1}{2}$: результат завдання 2, чи результат завдання 3.

9. Для експерименту з підкиданням монети провести серію випробувань довжиною $n = 50$ підкидань і обчислити $P_n^*(Г)$ та $P_n^*(Ц)$. Порівняти цей результат з результатами із задачі **8**.

10. Для експерименту з підкиданням грального кубика провести серію довжиною $n = 50$ підкидань.

1) Підрахувати $P_n^*(i), i \in \overline{1,6}$ – відносну частоту випадання “і” очок.

2) Скласти відповідну таблицю.

3) Утворити усі можливі події та підрахувати їх статистичні ймовірності.

11. Відносна частота влучення у мішень, визначена за серією із 150 пострілів, виявилася рівною 0,92. Скільки разів стрілець влучив у мішень?

12. Довести, що статистична ймовірність завжди є раціональним числом з проміжку $[0;1]$.

13. Довести основні властивості статистичної ймовірності.

14. Побудувати приклад події A, для якої $P_n^*(A) = 1$, проте A не є вірогідною подією.

15. Відомо, що $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями. Утворити ланцюги нерівностей, що пов’язують статистичні ймовірності цих подій, а також подій $A \bigcup B$, $\varnothing$, Ω, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \bigcup B}$, $\overline{A \bigcap B}$.

16. Заданий стохастичний експеримент проведено n разів (n – досить велике) і виявлено статистичну рівноможливість його результатів. Побудувати відповідний простір елементарних подій і знайти статистичну ймовірність даної події A, якщо:

1. Експеримент полягав у діставанні навмання монети зі скарбнички і фіксації її номіналу. Скарбничка містить певну кількість монет номіналом по дві і по десять копійок. Подія A – навмання взята монета мала номінал 10 копійок. Відомо, що монет номіналом дві копійки у скарбничці було втричі більше, ніж номіналом 10 копійок.
2. Експеримент полягав у діставанні навмання однієї за одною 2-х монет із гаманця і фіксації номіналів тільки тих пар монет, коли другою була монета 25 копійок. В гаманці містилися 3 монети по 25 копійок і 7 монет по 5 копійок. Подія A – перша монета була 25 копійок.
3. Експеримент полягав у тому, що колода у 52 карти ділилася навпіл і фіксувався зміст кожної половини. Подія A – у навмання розділеній навпіл колоді карт число чорних і червоних карт в обох частинах колоди було однаковим.
4. З колоди з 32-х карт навмання діставали 10 карт і фіксували колір кожної з 10 карт. Подія A – серед 10 навмання взятих карт було 8 одного кольору.
5. Експеримент полягав в тому, що з колоди із 32 карт навмання вибирали 4. Подія A – серед них була хоча б одна шестірка.
6. Експеримент полягав в тому, що навмання набирався п’ятизначний телефонний номер. Подія A – всі цифри у навмання набраному номері були різними.

7. Експеримент полягав у тому, що дитина переставляла кубики. На кубиках зображено літери “А”, “А”, “А”, “М”, “М”, “Т”, “Т”, “Е”, “И”, “К”. Подія A – на навмання складених кубиків утворилося слово “МАТЕМАТИКА”.

8. Кожна із літер О, Н, Е, С, Ц записана на одній з 5 карток. Експеримент полягав у діставанні навмання карток і розташовуванні їх одна за однією. Подія A – утворювалося слово «СОНЦЕ».

9. Експеримент полягав в тому, що окремі томи чотиритомного твору розташовували на полиці у випадковому порядку. Подія A – томи розташовані у правильному порядку справа наліво або зліва направо.

10. Експеримент полягав у тому, що 10 книг розставляли навмання. Подія A – 3 певні книжки були поставлені поруч.

11. Буквений замок містить на загальній осі п’ять дисків, кожен з яких поділено на шість секторів з нанесеними на них різними літерами. Замок відкривається тільки в тому випадку, якщо кожний диск займає одне певне положення відносно корпусу замка. Експеримент полягав у встановленні навмання набору з п’яти літер. Подія A – замок відкривався.

12. Експеримент полягає у тому, що навмання вказувався місяць та число деякого (не високосного) року. Подія A – вказаний день був неділею. Всього в цьому році 53 неділі, а відповідність чисел дням тижня невідома.

13. Числа 1, 2, 3, 4, 5, написані на п’яти картках. Експеримент полягав в тому, що навмання послідовно вибиралися три картки. Вибрані таким чином цифри розставлялися зліва направо. Подія A – отримане тризначне число було парним.

14. На 10 однакових картках написані цифри від 0 до 9. Експеримент полягав у діставанні навмання: 1) двох карток, 2) трьох карток. Подія A – утворене за допомогою цих карток:

1) Двозначне число ділилося на 18.

2) Тризначне число ділилося на 36.

15. На картках написані цілі числа від 1 до 15. Експеримент полягав у тому, що навмання діставали 2 картки. Подія A – сума чисел, написаних на цих картках, дорівнювала 10.

16. При запису прізвищ учасників деяких зборів, загальна кількість яких дорівнювала 360, з’ясувалось, що початковою літерою у 7 учасників була «А», у 2 – «Ю», у 5 – «Е», у 8 – «І», у 9 – «О», у 4 – «У», а в інших прізвище починалось з приголосних. Подія A – прізвище навмання вибраного учасника зборів починалося з голосної літери.

17. В урні 2 білих і 4 чорних кульки. Експеримент полягав у тому, що з урни одна за однією діставали усі кульки. Подія A – остання кулька чорна.

18. Експеримент полягав у підкиданні двох гральних кубиків. Подія A – на обох кубиках випало:

1) однакове число очок;

2) різне число очок.

19. В стародавній грі необхідно було для виграшу отримати при підкиданні трьох гральних кубиків суму очків, більшу 10. Експеримент полягав у підкиданні трьох гральних кубиків і фіксації суми очок, що випали. Подія A:

1) випало 11 очок;
2) випало 12 очок;
3) виграш.

20. В шаховому турнірі брали участь 20 гравців. Експеримент полягав в поділі гравців на 2 групи по 10 гравців. Подія A: 1) двоє найбільш сильних гравців попали в різні групи; 2) четверо найбільш сильних гравців попали по 2 в різні групи.

21. Експеримент полягав в тому, що m осіб сідали за круглий стіл, причому кількість стільців дорівнює m. Подія A – дві певних особи опинялися поруч.

22. В лотереї 100 білетів. Серед них один виграш в 50 грн., 3 виграші по 25 грн., 6 виграшів по 10 грн., 15 виграшів по 3 грн. Експеримент полягав в тому, що навмання вибирався один білет. Подія A: 1) виграш не менше 25 грн., 2) виграш не більше 25 грн.

23. В умовах попередньої задачі експеримент полягав у тому, що навмання купували 3 білети. Подія A – хоча б який-небудь виграш.

24. Було 5 білетів вартістю 1 грн., 3 білети – 3 грн., 2 білети – 5 грн. Експеримент полягав в тому, що навмання брали 3 білети. Подія A: 1) хоча б 2 білети мали однакову вартість; 2) всі 3 білети коштували 7 грн.

25. Лотерею, випущено на суму n гривень. Ціна одного білета r гривень. Цінні виграші припадали на m білетів. Експеримент полягав в купівлі білета. Подія A – білет виграшний.

26. Серед 10 білетів 2 виграшних. Експеримент полягав у тому, що навмання брали 5 білетів. Подія A – серед них були:

1) один виграшний;
2) два виграшних;
3) хоча б один виграшний.

27. Було $n+m$ білетів, серед яких n – виграшних. Експеримент полягав у купівлі k білетів. Подія A – серед k куплених білетів було s виграшних.

28. Загін, що нараховував 25 чоловік, бав участь у військовій грі. В загоні 5 розвідників та 4 зв'язкових. Експеримент полягав у тому, що вибирали навмання 4-х чоловік, яких потрібно відправити у розвідку. Подія A – в групу розвідки потрапляли 2 зв'язкових та 2 розвідники.

29. Експеримент полягав в тому, що в залі, який нараховує $n+k$ місць, випадковим чином займали місця n осіб. Подія A – були зайняті фіксовані $m \le n$ місць.

6. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, і задана деяка сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i = 1,2,\ldots$, то і $\bigcup_i A_i \in S$.

Будь-яку задану на S дійсну функцію $V(A)$, $A \in S$, що задовольняє вимоги:

1_v. $V(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_v. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$V\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i V(A_i),$$

називають *мірою, заданою на сукупності* S.

При цьому сукупність S називають *простором вимірних за мірою* V *множин*, кожну множину $A \in S$ називають *вимірною відносно міри* V, а значення $V(A)$ називають *мірою множини* A. Якщо ж $A \subset \Omega$, але $A \overline{\in} S$, то таку множину A називають *невимірною відносно міри* V.

Прикладами мір можуть бути об'єми просторових тіл і їх об'єднань, площі плоских фігур і їх об'єднань, довжини відрізків і їх об'єднань на прямій, кількості елементів у скінченних множинах і їх об'єднаннях, маси тіл та їх об'єднань тощо.

Якщо $V(\Omega) = 1$, тоді міру V називають *ймовірнісною мірою* або *ймовірністю, визначеною на сукупності* S *підмножин множини* Ω.

Таким чином, ймовірнісна міра (ймовірність) $P(A)$, визначена на сукупності S, повинна задовольняти вимоги (мати властивості):

1_p. $P(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_p. Якщо $A_i \in S$, $i = 1,2,\ldots$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

3_p. $P(\Omega) = 1$;

Якщо задано простір елементарних подій Ω, сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s–3_s, і на цій сукупності визначена числова функція $P(A)$, що задовольняє вимоги 1_p–3_p, тоді говорять, що задано *ймовірнісний простір* (Ω, S, P).

При цьому *елементи множини* Ω *називаються елементарними подіями, елементи сукупності* S *– подіями, а числа* $P(A)$, $A \in S$, *– ймовірностями подій* A.

Властивості $1_р$-$3_р$ функції $P(A)$, $A \in S$, називаються *основними* чи *визначальними*. З них випливають всі інші властивості ймовірності $P(A)$.

Властивість $2_р$ називають *властивістю повної адитивності функції* $P(A)$.

Будь-яку дійсну функцію $P(A)$, $A \in S$, *що задана на просторі подій* S *і задовольняє вимоги* $1_р$-$3_р$, називають *ймовірністю подій* $A \in S$.

Вимоги (властивості) 1_s-3_s, $1_р$-$3_р$ називають *системою аксіом теорії ймовірностей* (системою аксіом А.М. Колмогорова).

Легко бачити, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A \in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є імовірнісною мірою (оскільки задовольняє вимоги $1_р$-$3_р$).

У випадку, коли $\Omega = \{E_1, ..., E_k\}$, множина $\{E_i\}$ є подією для кожного $i \in \overline{1, k}$ і $P(\{E_i\}) = \dfrac{1}{4}$, $i \in \overline{1, k}$, кажуть, що *наслідки* відповідного стохастичного експерименту є *рівноможливими*.

Приклад 6.1. Нехай дуже велику кількість разів підкидали шестигранний гральний кубик і фіксували лише частоти випадання на верхній грані кубика цифри “6”, цифри “5” і цифр не більше “4”. Нехай при цьому з'ясувалося, що $P_n^*("6") = 0.60$, $P_n^*("5") = 0.30$, $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.10$.

Введемо позначення: $H_1 = \{"1","2","3","4"\}$, $H_2 = \{"5"\}$, $H_3 = \{"6"\}$. Очевидно $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$, $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$, тобто підмножини H_1, H_2, H_3 утворюють розбиття множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються.

Розглянемо таку сукупність S підмножин множини $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$:

$$S = \{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_1 + H_2,\ H_1 + H_3,\ H_2 + H_3,\ H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\} =$$
$$= \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"5","6"\}, \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega\}.$$

Очевидно, ця сукупність S задовольняє вимоги 1_s-3_s. В подібних випадках говорять, що сукупність S породжена системою підмножин H_1, H_2, H_3. Очевидно також, що $P_n^*(A)$ визначена на всіх елементах сукупності S:

$P_n^*(\varnothing) = 0;$	$P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.10;$
$P_n^*(\{"5"\}) = 0.30;$	$P_n^*(\{"6"\}) = 0.60;$
$P_n^*(\{"1","2","3","4","5"\}) = 0.40;$	$P_n^*(\{"1","2","3","4","6"\}) = 0.70;$
$P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.90;$	$P_n^*(\{"1","2","3","4","5","6"\}) = 1,$

і задовольняє вимоги $1_р$-$3_р$.

Тому в розглянутому випадку сукупність S є простором подій (вимірних за мірою $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω), а трійка (Ω, S, P_n^*) є ймовірнісним простором.

Разом з тим підмножини, наприклад, $\{"1","2"\}$, $\{"1","3","5"\}$, $\{"2","4","6"\}$, і деякі інші підмножини множини $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$ виявляються невимірними відносно розглянутої міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, і тому такі підмножини не включені до простору подій S, вони не вважаються подіями.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай Ω з попереднього прикладу 6.1 і нехай $H_1=\{"1","2","3"\}$, $H_2=\{"4"\}$, $H_3=\{"5"\}$, $H_4=\{"6"\}$. Тоді $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $H_1+H_2+H_3+H_4=\Omega$.

Розглянемо таку сукупність S_1 підмножин множини Ω:

$$S_1=\{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ H_1+H_2,\ H_1+H_3,\ H_1+H_4,\ H_2+H_3,\ H_2+H_4,\ H_3+H_4,$$
$$H_1+H_2+H_3,\ H_1+H_2+H_4,\ H_1+H_3+H_4,\ H_2+H_3+H_4,\ H_1+H_2+H_3+H_4=\Omega\}=$$
$$=\Big\{\ \varnothing,\ \{"1","2","3"\},\ \{"4"\},\ \{"5"\},\ \{"6"\},\ \{"1","2","3","4"\},\ \{"1","2","3","5"\},$$
$$\{"1","2","3","6"\},\ \{"4","5"\},\ \{"4","6"\},\ \{"5","6"\},\ \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\},\quad \{"1","2","3","5","6"\},\quad \{"4","5","6"\},$$
$$\{"1","2","3","4","5',"6"\}\ \Big\}.$$

Очевидно ця сукупність S_1 задовольняє вимоги 1_s-3_s. Разом з тим, якщо функція (ймовірнісна міра) $P_n^*(A)$ задана так, як у прикладі 6.1, то вона виявляється неузгодженою із сукупністю S_1, оскільки підмножини $\{"1","2","3"\}$, $\{"4"\}$, $\{"1","2","3","5"\}$, $\{"4","5"\}$, $\{"1","2","3","6"\}$, $\{"4","6"\}$, $\{"4","5","6"\}$ виявляються невимірними. Якщо при цьому є підстави вважати, що відносна частота попадання в множину $\{"4"\}$ дорівнює, наприклад, 0.06, а в множину $\{"1","2","3"\}$ – 0.04, то тоді одержуємо нову функцію $\tilde{P}_n^*(A)$, $A\in S_1$, визначену на всіх елементах S_1. Зокрема,

$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3"\})=0.04,\ \tilde{P}_n^*(\{"4"\})=0.06,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","5"\})=0.34,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"4","5"\})=0.36,\ \tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","6"\})=0.64,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"4","6"\})=0.66,\ \tilde{P}_n^*(\{"4","5","6"\})=0.96,$$

а на елементах сукупності $S\subset S_1$

$$\tilde{P}_n^*(A)=P_n^*(A),\ A\in S\ .$$

Таким чином ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(A)$ є продовженням ймовірнісної міри $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність $S_1\supset S$.

Разом з тим, якщо немає ніяких коректних міркувань щодо того, як слід продовжувати міру $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність S_1, тоді слід із сукупності S_1 вилучити всі підмножини множини Ω, невимірні відносно міри $P_n^*(A)$, для того, щоб мати можливість побудувати сукупність S вимірних відносно міри $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб побудувати ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$.

Вправа 2. Нехай Ω – скінченна множина точок x_i з відрізка $[0,1]$, причому $x_i = x_{i-1} + h$, $x_0 = 0$, $h = 10^{-1000000}$, $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ 10^{1000000}\}$. Тоді (як і у випадку неперервної множини Ω типу $\Omega = \langle a,b \rangle$), на практиці швидше за все недоцільно розглядати всі підмножини розглянутої скінченної множини Ω. У подібних випадках доцільно множину Ω поділити на деяку практично прийнятну кількість k підмножин H_i таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, і як події разом з $\varnothing$ розглядати лише всілякі об'єднання підмножин H_i. Визначивши статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$, для довільної події $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1,2,\dots,k\}$, будемо мати $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

При цьому сукупність S подій (підмножин множини Ω) містить неможливу подію $\varnothing$, усі події H_i, усі суми виду $H_i + H_j$ по дві події, $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,k}$, $i \neq j$, усі суми виду $H_i + H_j + H_l$ по три події, $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,k}$, $l \in \overline{1,k}$, $i \neq j \neq l$, усі суми по чотири події H_i, усі суми по п'ять подій H_i, і т.д., усі суми по $(k-1)$ подій H_i, суму всіх k подій H_i, тобто $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$. Очевидно, так побудована сукупність S підмножин множини Ω задовольняє вимоги 1_s-3_s, а так введена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ задовольняє вимоги 1_p-3_p. У такий спосіб побудовано ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$, причому простір подій S і ймовірнісна міра P_n^* виявляються узгодженими.

Множину Ω можна поділити, наприклад, на 10 підмножин H_i у такий спосіб:

$H_1 = \{x_i \mid 0 \le x_i < 0.1\}$, $H_2 = \{x_i \mid 0.1 \le x_i < 0.2\}$,

$H_3 = \{x_i \mid 0.2 \le x_i < 0.3\}$, $H_4 = \{x_i \mid 0.3 \le x_i < 0.4\}$,

$H_5 = \{x_i \mid 0.4 \le x_i < 0.5\}$, $H_6 = \{x_i \mid 0.5 \le x_i < 0.6\}$,

$H_7 = \{x_i \mid 0.6 \le x_i < 0.7\}$, $H_8 = \{x_i \mid 0.7 \le x_i < 0.8\}$,

$H_9 = \{x_i \mid 0.8 \le x_i < 0.9\}$, $H_{10} = \{x_i \mid 0.9 \le x_i \le 1.0\}$.

Отже, остаточно сказати, які саме підмножини A *множини* Ω *вважаються подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір* (Ω, S, P_n^*).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття міри множини узагальнює поняття кількості елементів у множині, довжини лінійної множини, площі плоскої фігури, об’єму тіла, маси тіла.

2. Міру можна задати на будь-якій сукупності множин.

3. Абсолютна частота $K_n(A)$ події A, $A \in S$, є мірою, заданою на S.

4. Кожна міра є ймовірнісною.

5. Статистична ймовірність є ймовірнісною мірою.

6. Кожна ймовірнісна міра є статистичною ймовірністю.

7. Для того, щоб задати ймовірнісну міру $P_n^*(A)$, $A \in S$, потрібно спочатку задати простір подій S.

8. Для того, щоб задати простір подій S, потрібно спочатку задати ймовірнісну міру на деяких підмножинах $A \subset \Omega$.

9. Якщо сукупність S підмножин $A \subset \Omega$ входить у простір подій S_1, тобто $S \subset S_1$, і на S_1 задана ймовірнісна міра $P(A)$, $A \in S_1$, то (Ω, S, P) ймовірнісний простір.

10. Якщо (Ω, S, P) – ймовірнісний простір, $S \subset S_1$, і S_1 задовольняє вимоги $1_s - 3_s$, то міру $P(A)$ можна продовжити із сукупності S на сукупність S_1: 1) безліччю способів; 2) єдиним чином.

11. Ймовірність події – це будь-яка невід’ємна функція, що визначена на просторі подій.

12. Якщо $P(A) \in [0;1]$ для будь-якої події $A \in S$, то $P(A)$ – ймовірність події $A \in S$.

13. Якщо подія A спричинює подію B, то ймовірність події A менша за ймовірність події B.

14. Якщо $C = A + B$, то $P(C) = P(A) + P(B)$.

15. Якщо функція $P(A)$, $A \in S$, задовольняє властивості повної адитивності, то вона є ймовірністю подій $A \in S$.

16. Усі події з простору подій S можуть мати однакову ймовірність.

17. Усі одноелементні події простору S можуть мати однакову ймовірність.

18. Існує подія $A \in S$, для якої $P(A) = 0$.

19. Існує простір S подій, в якому усі одноелементні події мають нульову ймовірність.

20. На кожному просторі подій можна визначити ймовірність, причому єдиним чином.

2. Нехай $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$, і відомі статистичні ймовірності $P_n^*(\{"5", "6"\}) = 0.70;$ $P_n^*(\{"1", "2", "3", "4"\}) = 0.30$. Чи буде трійка (Ω, S, P_n^*) ймовірнісним простором, якщо:

1) $S = \{\varnothing, \{"1", "2", "3", "4"\}, \{"5", "6"\}, \Omega\}$?

2) $S = \{\varnothing, \Omega\}$?

3) $S = \{\varnothing, \{"5", "6"\}, \Omega\}$?

4) $S = \{\varnothing, \{"1", "2"\}, \{"3", "4", "5", "6"\}, \Omega\}$?

5) $S = \{\{"1"\}, \{"2"\}\}$?

3. Довести, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A \in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є ймовірнісною мірою.

4. Довести такі властивості ймовірності:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$;
4. Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;
5. $0 \le P(A) \le 1$;
6. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

5. Для кожного із вказаних стохастичних експериментів виявлено рівноможливість його наслідків. Знайти ймовірність $P(A)$ заданої події A:

1. Однократне підкидання грального кубика та фіксація кількості очок на верхній грані. Подія A – випадання числа очок, що є простим числом.

2. Вибір навмання двох чисел x та y з відрізка $[-a; a]$. Подія A – точка $(x; y)$ лежить у крузі з центром у початку координат і радіусом r, $r \le a$.

3. Є 2 монети по 50 коп., 4 монети по 25 коп. і 10 монет по 10 коп. Навмання вибирається 5 монет і фіксується відповідна грошова сума. Подія A – грошова сума не перевищує 1 грн.

4. Цифри двозначного числа вибираються навмання. Подія A – обидві цифри однакові.

5. Утворення навмання фінальної пари команд із футбольних команд K_1, K_2, K_3 і K_4, що вийшли у півфінал і таких, що жодна з них не є вищою за класом від будь-якої іншої. Подія A:

1) команди K_1 і K_2 вийдуть у фінал;

2) команда K_1 вийде у фінал;

3) команда K_2 вийде у фінал;

4) команда K_3 вийде у фінал;

5) команда K_4 вийде у фінал.

6. Вибір жеребкуванням остаточного розподілу місць серед футбольних команд K_1, K_2, K_3 і K_4, що вийшли у півфінал за умови, що ці команди рівні за класом. Подія A:

1) команда K_1 стане чемпіоном;

2) команда K_2 стане чемпіоном, а команда K_1 – срібним призером;

3) команди K_3, K_2 і K_4 стануть відповідно чемпіоном, срібним призером і бронзовим призером;

4) як призери команди розташуються в порядку: K_4, K_1, K_3, K_2.

6. Банк надав кредит 500 позичальникам. У таблиці наведено кількість вкладників з відповідною сумою кредиту та його терміну.

Термін кредитування (місяці)	Сума кредиту K у тисячах грн.			
	$K < 20$	$20 \le K < 50$	$50 \le K < 80$	$K > 80$
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
48	0	31	99	37
60	0	0	110	50

Експеримент полягає у тому, що вибирається сума та термін кредиту (у відповідній клітинці в таблиці вказано абсолютну частоту такої пари).

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S, ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), вважаючи, що S містить всі підмножини множини Ω.

2. Знайти статистичну ймовірність події A, яка полягає в тому, що: 1) сума кредиту є не меншою за 50 тис. грн.; 2) термін кредиту є меншим за 3 роки; 3) видано кредит на суму, що менша за 50 тис. грн. і на термін, що не перевищує 2 роки.

7. Банк склав таблицю, що характеризує кількість вкладників за сумою їх вкладів та віком:

Вік вкладників у роках	Сума вкладу B у тисячах грн.			
	$B < 2$	$2 \le B < 5$	$5 \le B < 10$	$B \ge 10$
<30	5%	15%	5%	3%
від 30 до 50	8%	25%	10%	5%
>50	7%	10%	5%	2%

Експеримент полягає у тому, що навмання вибирається вкладник та фіксується його вік і сума вкладу (у відповідній клітинці таблиці вказано абсолютну частоту такої пари).

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір.

2. Знайти статистичну ймовірність: 1) події A, яка полягає у

тому, що сума вкладу є не меншою за 5 тис. грн.; 2) події B, яка полягає у тому, що вік вкладника не менший за 30 років; 3) події $A\bigcup B$; 4) події $A\bigcap B$.

3. Визначити, з яких елементарних подій складаються події A, B, $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A\bigcup B}$, $\overline{A\bigcap B}$, $\overline{A\setminus B}$, $\overline{B\setminus A}$.

8. На підприємстві працює 200 співробітників, розподіл яких за віком, освітою та стажем роботи на підприємстві наведено у вигляді таблиці:

Вік у роках	Не більше 5 років роботи на підприємстві		Більше 5 років роботи на підприємстві	
	Середня освіта	Вища освіта	Середня освіта	Вища освіта
<30	25	40	5	50
≥30	10	50	5	15

Експеримент полягає у тому, що навмання вибирається вік, освіта та стаж роботи співробітників на підприємстві.

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір, вважаючи, що S містить всі підмножини множини Ω.

2. Визначити, з яких елементарних подій складається: 1) подія A, яка полягає у тому, що вік працівника є не меншим за 30 років; 2) подія B, яка полягає у тому, що працівник має вищу освіту; 3) подія C, що полягає у тому, що працівник працює більше 5 років на даному підприємстві.

3. Знайти статистичні ймовірності подій:1) A; 2) B; 3) C; 4) $A\bigcup B$, 5) $A\bigcap C$; 6) $\overline{A}$; 7) $\overline{B}$; 8) $\overline{C}$; 9) $\overline{A\bigcup B}$.

9. Експеримент полягає у тому, що з 10 осіб, серед яких 6 чоловіків і 4 жінки, навмання вибирається 7 осіб.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір, якщо всі можливі наслідки експерименту відбувалися з однаковою частотою.

2. Визначити скільки елементарних подій сприяють події A, яка полягає у тому що серед 7-ми вибраних осіб є 3 жінки.

3. Знайти статистичні ймовірності подій A та $\overline{A}$.

10. Відомо, що статистичні ймовірності подій $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$ і $C\subset\Omega$ дорівнюють відповідно $P_n^*(A)=0{,}51$, $P_n^*(B)=0{,}45$, $P_n^*(C)=0{,}05$. Чи можна стверджувати, що ці події попарно несумісні?

11. Відомо, що статистичні ймовірності $P_n^*(A)=P_n^*(B)=\dfrac{1}{2}$. Чи можна стверджувати, що події A і B несумісні?

12. Відомо, що для подій $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$, $P_n^*(A)>0{,}7$ і $P_n^*(B)>0{,}5$. Довести, що $P_n^*(AB)>0{,}2$.

7. Умовна статистична ймовірність. Ймовірність добутку подій. Залежні і незалежні події. Події, незалежні в сукупності

Умовною статистичною ймовірністю події A за умови, що подія B мала місце, називають число

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}, \; P_n^*(B) \neq 0. \qquad (7.1)$$

При цьому $P_n^*(A) = P_n^*(A/\Omega)$ називають *безумовною статистичною ймовірністю події* A. У випадку $P_n^*(B) = 0$ вважають $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$.

Якщо в механічній інтерпретації $P_n^*(B)$ – це маса, що припадає на множину B, а $P_n^*(AB)$ – маса, що припадає на множину AB, то $P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ – частка від маси, що є у множині B, яка припадає на множину A.

З означення умовної статистичної ймовірності випливає, що

$$P_n^*(AB) = P_n^*(B)\, P_n^*(A/B) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B/A).$$

Приклад 7.1. Шестигранний гральний кубик підкидали дуже велику кількість n разів. При цьому виявилось, що статистична ймовірність (відносна частота) випадання на верхній грані кубика цифри “1” дорівнює 0.01, цифри “2” – 0.02, цифри “3” – 0.03, цифри “4” – 0.04, цифри “5” – 0.30, цифри “6” – 0.60.

Позначимо можливі наслідки (елементарні події) “i”, $i \in \overline{1,6}$, через E_i, $i \in \overline{1,6}$. Тоді простір елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Як події розглядатимемо будь які підмножини множини Ω, тобто розглянемо простір S подій, який містить події $\varnothing$ і Ω, всі одноелементні підмножини множини Ω, всі двоелементні, всі триелементні, всі чотириелементні, всі п’ятиелементні підмножини множини Ω. Нехай подія A полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає парна цифра, B – непарна цифра, C – одна із цифр “4”, ”5”, ”6”, D – одна із цифр “1”, ”2”, ”3”, ”4” (Рис.7.1). Враховуючи заданий *розподіл статистичних ймовірностей на множині елементарних подій*:

E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$P_n^*(E_i)$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.30	0.60

та формулу $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} P_n^*(E_i)$, для розглядуваних подій *A, B, C, D* дістанемо:

$$P_n^*(A) = 0.66, \quad P_n^*(B) = 0.34, \quad P_n^*(C) = 0.94, \quad P_n^*(D) = 0.10.$$

Оскільки $AB = \varnothing$, $AC = \{E_4, E_6\}$, $AD = \{E_2, E_4\}$, то за формулою (7.1) для умовних статистичних ймовірностей матимемо:

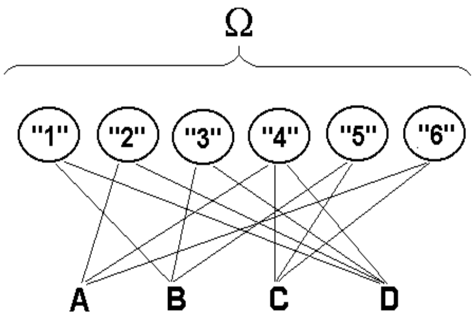


Рис. 7.1.

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_1,\,E_3,E_5\})}=\frac{0}{0.34}=0\,,$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0}{0.66}=0\,,$$

$$P_n^*(A/C)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(C)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_4,E_5,E_6\})}=\frac{0.64}{0.94}=0.68\,,$$

$$P_n^*(A/D)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(D)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_1,E_2,E_3,E_4\})}=\frac{0.06}{0.10}=0.6\,.$$

Статистична ймовірність добутку довільної скінченної кількості подій обчислюється за формулою:

$$\begin{gathered}P_n^*(A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m)=\\ =P_n^*(A_1)P_n^*(A_2/A_1)P_n^*(A_3/A_1A_2)\cdots P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1}).\end{gathered}\tag{7.2}$$

Події A *і* B *називаються незалежними* (щодо ймовірнісної міри P_n^*), якщо

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B)\,.$$

Події $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ *називаються незалежними в сукупності* (щодо ймовірнісної міри P_n^*), якщо

$$P_n^*(\prod_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}P_n^*(A_i)$$

для довільної множини $I\subset\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, $I\neq\varnothing$.

Коли замість ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, на тому самому просторі S подій задати іншу ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A\in S$, то події, що були незалежні (чи незалежні в сукупності) щодо ймовірнісної міри P_n^*, не обов'язково залишатимуться такими ж щодо ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$.

Приклад 7.2. Якщо події A і B несумісні, то вони залежні відносно міри P_n^*, для якої $P_n^*(A) > 0$ і $P_n^*(B) > 0$, оскільки $P_n^*(AB) = 0 \neq P_n^*(A) P_n^*(B)$.

Ці події незалежні відносно міри $\widetilde{P}_n$, для якої $\widetilde{P}_n^*(A) = 0$ або $\widetilde{P}_n^*(B) = 0$, оскільки $\widetilde{P}_n^*(AB) = 0 = \widetilde{P}_n^*(A) \cdot \widetilde{P}_n^*(B)$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. В урні є 49 кульок, які пронумеровані від 1 до 49. Дуже велику кількість n разів проводились такі випробування (тиражі спортлото) – навмання одна за однією без повернення в урну обирались шість кульок. При цьому виявилось, що статистична ймовірність появи будь якої із 49 кульок першою дорівнює $\frac{1}{49}$. Після того, як першу кульку вийнято, статистична ймовірність появи будь якої із решти 48 кульок дорівнює $\frac{1}{48}$ незалежно від номера першої кульки. Після того, як вийнято дві кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 47 кульок дорівнює $\frac{1}{47}$ незалежно від номерів двох вийнятих кульок. Після того, як вийнято три кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 46 кульок дорівнює $\frac{1}{46}$ незалежно від номерів трьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято чотири кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 45 кульок дорівнює $\frac{1}{45}$ незалежно від номерів чотирьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято 5 кульок, статистична ймовірність появи будь якої із решти 44 кульок дорівнює $\frac{1}{44}$ незалежно від номерів п'яти вийнятих кульок.

Потрібно обчислити статистичну ймовірність (відносну частоту) відбування події A, яка полягає в тому, що на кожній із шести навмання вибраних в одному випробуванні кульок був один із шести задуманих номерів.

Припустимо, що задумали номери $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що першою вийнято кульку з номером m_1, який є серед задуманих, тобто $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$. Зрозуміло, що ця подія спричинюється шістьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що першою вийнято кульку, номер якої дорівнює одному із задуманих, тобто дорівнює або i_1, або i_2, або i_3, або i_4, або i_5, або i_6.

За умовою задачі статистична ймовірність кожної із цих шести подій дорівнює $\frac{1}{49}$, а тому $P_n^*(A_1)=\frac{6}{49}$.

Позначимо через A_2 – подію, яка полягає в тому, що номер m_2 кульки, яку вийнято другою, є одним із шести задуманих номерів, тобто $m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$.

Якщо подія A_1 відбулася, тобто першою вийнято кульку з номером $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, то кулька з номером m_1 не може бути вийнята вдруге. Отже за умови, що подія A_1 відбулася, подія A_2 спричинюється п'ятьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що другою вийнято кульку, номер якої m_2 є одним із задуманих, але $m_2 \neq m_1$, тобто

$$m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\} \setminus \{m_1\}.$$

За умовою задачі умовна статистична ймовірність кожної з цих п'яти подій дорівнює $\frac{1}{48}$. Тому $P_n^*(A_2/A_1)=\frac{5}{48}$.

Аналогічно, якщо A_3, A_4, A_5, A_6 події, які полягають в тому, що відповідно третьою, четвертою, п'ятою, шостою вийнято кульку з номерами m_3, m_4, m_5, m_6, кожний з яких є одним із задуманих номерів і крім того не співпадає з номерами раніше вийнятих кульок, які теж належать до задуманих, то

$$P_n^*(A_3/A_1A_2)=\frac{4}{47}, \qquad P_n^*(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{3}{46},$$

$$P_n^*(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{2}{45}, \qquad P_n^*(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{1}{44}.$$

Очевидно, що подія A відбувається тоді, коли в одному й тому ж випробуванні (тиражі спортлото) відбуваються всі шість подій $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, тобто

$$A = A_1A_2A_3A_4A_5A_6.$$

Враховуючи формулу (7.2), одержимо

$$P_n^*(A)=P_n^*(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)=$$

$$=P_n^*(A_1)P_n^*(A_2/A_1)P_n^*(A_3/A_1A_2)P_n^*(A_4/A_1A_2A_3)\cdot$$

$$\cdot P_n^*(A_5/A_1A_2A_3A_4)P_n^*(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5)=$$

$$=\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44}\approx\frac{7}{100000000}.$$

Отже, в наведеній серії дуже великої кількості n випробувань 6 номерів із 49 можливих вдавалося вгадати в середньому 7 разів у 100 мільйонах спроб.

Вправа 2. Нехай $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ (Рис. 7.2). При цьому відомо, що

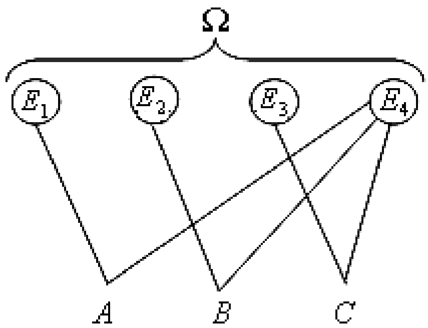


Рис. 7.2

$$P_n^*(\{E_1\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_2\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_3\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_4\})=\frac{1}{4}.$$

Нехай події A, B, C визначені так: $A=\{E_1,\ E_4\}$, $B=\{E_2,\ E_4\}$, $C=\{E_3,\ E_4\}$.

Тоді $P_n^*(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Оскільки $AB=\{E_4\}$, $AC=\{E_4\}$, $BC=\{E_4\}$, то

$$P_n^*(AB)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$P_n^*(AC)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$P_n^*(BC)=\frac{1}{4}=P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким чином події A, B, C попарно незалежні. При цьому подія A відбувалася в половині всіх n випробувань, а також в половині тих випробувань, коли відбувалася подія B, оскільки

$$P_n^*(A)=\frac{1}{2},\ P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

Те саме можна сказати про безумовні статистичні ймовірності $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$ та умовні статистичні ймовірності $P_n^*(B/A)$, $P_n^*(A/C)$, $P_n^*(C/A)$, $P_n^*(B/C)$, $P_n^*(C/B)$.

Разом з тим $ABC=\{E_4\}$, тому

$$P_n^*(ABC)=\frac{1}{4}\neq P_n^*(A)P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Той факт, що, наприклад, подія A залежить від добутку подій B і C, очевидний, оскільки у всіх тих випробуваннях, коли відбувалася подія BC (добуток подій B і C), відбувалася і подія A, тобто

$$P_n^*(A/BC)=1\left(=\frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)}=\frac{1/4}{1/4}\right).$$

Оскільки $P_n^*(A/BC)=1\neq P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, то подія A залежить від добутку подій B і C.

Отже, в розглядуваному випадку події A, B, C попарно незалежні, але залежні в сукупності.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ існує для будь-яких подій A та B.
2. Безумовну статистичну ймовірність можна вважати умовною.
3. Змінюючи простір елементарних подій Ω і простір подій S, умовну статистичну ймовірність $P_n^*(A/B)$ можна перетворити у безумовну.
4. Статистична ймовірність добутку подій дорівнює добутку статистичних ймовірностей цих подій.
5. Умовна статистична ймовірність потрібна для знаходження статистичної ймовірності добутку подій.
6. $P_n^*(AB)=1-P_n^*(\overline{A}+\overline{B})$.
7. Будь-які події A і B є незалежними, якщо $P_n^*(A)=0$ або $P_n^*(B)=0$.
8. Події A, B і C незалежні в сукупності, якщо вони попарно незалежні.
9. Твердження, обернене до 8, є правильним.
10. Якщо події незалежні відносно однієї ймовірнісної міри, то вони незалежні і відносно будь-якої іншої ймовірнісної міри.

2. Відомо, що подія A полягає у випаданні не менше ніж k очок при підкиданні грального кубика, причому $P_n^*("i")=\frac{1}{6}$, $i\in\overline{1,\ 6}$. Знайти $P_n^*(A/B)$, де подія B полягає у випаданні 4 очок, коли

1) $k=1$, 2) $k=2$, 3) $k=3$, 4) $k=4$, 5) $k=5$, 6) $k=6$.

3. Нехай $\Omega=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ – простір елементарних подій, що відповідає одночасному підкиданню двох монет номіналом 2 коп. і 10 коп., причому $P_n^*(E_k)=\frac{1}{4}$, $k\in\overline{1,\ 4}$. Подія A полягає у випаданні герба на першій монеті (2 коп.), подія B – випадання герба на другій монеті (10 коп.).

1. Чи є події A і B є незалежними?

2. Чи можна визначити ймовірнісну міру P_n^* так, щоб A і B стали залежними (незалежними) подіями?

3. Чи існує подія C така, що події A, B і C будуть незалежні в сукупності?

4. Довести формулу (7.2).

5. Довести, що події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$, тобто умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ події A, знайдена за умови, що подія B мала місце, співпадає з безумовною статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ події A.

6. Довести, що для того, щоб події A_1, A_2, …, A_k були незалежні в сукупності, потрібно, щоб кожна з них не залежала від будь-якої сукупності інших подій, тобто щоб мали місце рівності

$$P_n^*(A_i / \prod_{j \in I \setminus \{i\}} A_j) = P_n^*(A_i)\,,\; I \subset \{1,\, 2,\, \ldots,\, k\}\,,\; I \setminus \{i\} \neq \varnothing\,.$$

7. Знайти двома способами статистичну ймовірність вгадування потрібного номера квартири, якщо відомо, що цей номер лежить у межах від 1 до 48 і кратний 7. У першому способі ця статистична ймовірність безумовна, у другому – умовна. Відомо, що номери всіх квартир у великій серії випробувань з'являлися однаково часто.

8. Для експерименту з підкиданням грального кубика подія A полягає у випаданні певного числа очок, подія B – у випаданні 4, або 5, або 6 очок, подія C – у випаданні 5 очок.

1. Вважаючи, що $P_n^*("\,i\,") = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$, знайти двома способами: 1) $P_n^*(AB)$; 2) $P_n^*(AC)$; 3) $P_n^*(BC)$.

2. Чи є попарно незалежними події A, B і C?

9*. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) відповідає експерименту з підкиданням грального кубика, причому простір подій S – найширший, а $P_n^*(\{i\}) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$. Знайти усі можливі пари незалежних подій.

10. Довести, що:

1. Для будь-якого ймовірнісного простору можна вказати принаймні одну пару незалежних подій.

2. Події A і B незалежні, коли принаймні одна з них є вірогідною подією.

3. Події A і B незалежні (відносно міри P_n^*), коли принаймні одна з них має нульову статистичну ймовірність.

4. Якщо $P_n^*(A) \neq 0$ і $P_n^*(B) \neq 0$, причому події A і B несумісні, то вони є залежними відносно міри P_n^*.

5. Події A, B і C незалежні в сукупності (відносно міри P_n^*) тоді і тільки тоді, коли вони попарно незалежні і $P_n^*(ABC) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C)$.

6. Події A, B, C і D незалежні в сукупності (відносно міри P_n^*) тоді і тільки тоді, коли будь-які три з них є незалежними в сукупності і $P_n^*(ABCD) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C) \cdot P_n^*(D)$.

7*. Узагальнити твердження 10.5 і 10.6 на випадок довільної кількості подій.

11. Нехай події A_1, A_2, A_3 незалежні в сукупності, а сукупність подій B_1, B_2, B_3 утворюється шляхом заміни деяких (або усіх) подій A_1, A_2, A_3 на протилежні події. Довести, що події B_1, B_2, B_3: 1) попарно незалежні; 2) незалежні у сукупності.

12. Експеримент полягає у тому, що студент з 25 екзаменаційних питань навмання вибирає 3 питання (одне за одним).

Знайти статистичну ймовірність події A, яка полягає у тому, що студент знає відповіді на кожне з трьох вибраних питань, якщо він вивчив лише 20 з 25 питань вважаючи, що будь які із наявних питань з’являються з однаковою частотою незалежно від того, які питання вже вибрані.

13. Абонент не пам’ятає лише останньої цифри телефонного номера і тому набирає її навмання доти, поки не з’єднається з потрібним абонентом. При кожному новому наборі попередньо випробувані цифри не набираються, а кожна інша цифра має однакові шанси бути набраною.

1. Побудувати відповідний ймовірнісний простір.
2. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість наборів останньої цифри не перевищує 3-х.
3. Виконати завдання 1 та 2 за умови, що абонент пам’ятає, що остання цифра непарна.

14. Товариство, яке складається з 5 чоловіків і 10 жінок, велику кількість разів ділили на 5 груп по 3 людини і при цьому виявлено статистичну рівноможливість всіх можливих наслідків даного експерименту. Знайти статистичну ймовірність того, що в кожній групі було по одному чоловікові і по дві жінки.

15. Студент, знав відповіді на 15 білетів з 20, і проводив такий експеримент. Багато разів він навмання брав один білет, а потім другий. Причому будь які із наявних білетів з’являлися однаково часто. В якому випадку статистична ймовірність взяти вивчений білет виявилась більшою – коли студент брав перший білет, чи коли брав другий?

16. У трьох однакових урнах містяться білі і чорні кульки. У першій урні – 3 білих, 1 чорна, у другій – 6 білих, 4 чорних, у третій – 9 білих, 1 чорна. Експеримент полягав в тому, що навмання обиралася урна, а з неї навмання вибиралася кулька, фіксувався її колір, після чого кулька поверталася в урну. Цей експеримент проведено велику кількість разів і виявлено статистичну рівноможливість появи кожної урни і появи кожної кульки з вибраної урни.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що таким чином вибрана кулька була білою.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що біла кулька вийнята з другої урни.

17. Для заданих подій $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$:

1. Знайти умовну статистичну ймовірність $P_n^*(A/(A+B))$.

2. Як зміниться результат, коли події *A* і *B* несумісні?

3. З'ясувати, коли події *A* і (*A*+*B*) будуть незалежними.

18. Що можна сказати про залежність подій *A* і *B*, коли $P_n^*(A/B) + P_n^*(\overline{A}) = 1$?

19. Відомо, що $P_n^*(ABC) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C)$.

1. Чи є події *A*, *B* і *C* незалежні у сукупності?

2. Чи зміниться відповідь, коли події *A*, *B* і *C* ще й попарно незалежні?

20. Експеримент полягав у тому, що два стрільці одночасно стріляли в одну мішень і фіксували результат (влучення чи промах) кожного з них.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються події A_i – влучення *i*-го стрільця, $i \in \overline{1,2}$.

3. Довести, що кожна елементарна подія $E \in \Omega$ є подією, тобто $\{E\} \in S$, коли відомо, що подіями є A_i – влучення i-го стрільця, $i \in \overline{1,2}$.

4. Вважаючи відомими $P_n^*(A_1) = p_1$ і $P_n^*(A_2) = p_2$, а події A_i, $i \in \overline{1,2}$, незалежними відносно P_n^*, обчислити статистичну ймовірність:

1) влучення у мішень принаймні одного стрільця;

2) будь-якої елементарної події простору Ω;

5. Перевірити, чи є елементарні події простору Ω статистично рівноможливими.

21. Статистична ймовірність виготовлення першосортної деталі на першому верстаті дорівнює 0,7, а на другому – 0,8. На першому верстаті виготовлено дві деталі, а на другому – три.

1. Знайти статистичну ймовірність події *A*, яка полягає у тому, що усі виготовлені деталі є першосортними.

2. Описати відповідний стохастичний експеримент та простір Ω елементарних подій, для якого $A \subset \Omega$.

3. Визначити, з яких елементарних подій складається подія *A*.

4. Чи є елементарні події простору Ω рівноможливими?

22. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання взята деталь є першосортною, якщо 4% усіх деталей є бракованими, а 75% небракованих деталей є першосортними.

23. Статистичні ймовірності вибрати навмання будь-який з 4-х бракованих виробів однакові. На трьох виробах було по одному дефекту – або ушкоджена краска, або були вм'ятини, або були тріщини, а на четвертому виробі були всі три дефекти. Події A, B, C полягають відповідно у тому, що на навмання взятому виробі була ушкоджена краска, була вм'ятина, була тріщина. Чи є ці події:

1. Незалежними попарно.
2. Незалежними у сукупності.

24. У скриньці є 6 карток з літерами, що утворюють слово "карета" (на кожній картці – одна літера). Експеримент полягав у тому, що навмання по черзі виймали п'ять карток і розташовували їх одну за одною. При цьому статистичні ймовірності появи будь-якої, ще не витягнутої картки виявилася однаковою. Знайти статистичну ймовірність того, що в порядку появи літер утворювалося слово "катер".

25. Команда для участі у студентській олімпіаді з математики складалося з 12 студентів, 5 з яких відмінники. На перший тур жеребкуванням з команди обирали трьох осіб, причому статистична ймовірність бути обраним у кожного із ще не обраних студентів була однаковою. Знайти статистичну ймовірність того, що:

1) усі обрані студенти були відмінниками;
2) усі обрані студенти не були відмінниками;
3) серед обраних студентів був принаймні один відмінник;
4) серед обраних студентів принаймні один не був відмінником.

8. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса

Нехай простір Ω елементарних подій поділено на m підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_m$ таких, що $H_i \in S$, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $H_1 + H_2 + \ldots + H_m = \Omega$, і нехай подія $A \subset \Omega$ (Рис. 8.1). Події H_i називають *гіпотезами*, за яких може відбуватися подія A.

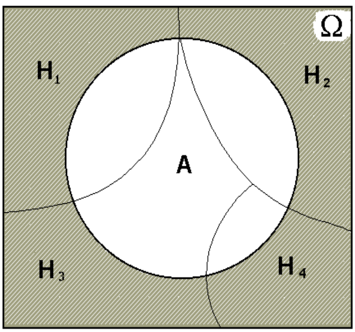


Рис. 8.1

Якщо відомі статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$ гіпотез H_i, а також умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ події A за кожною з гіпотез H_i, тоді статистичну ймовірність $P_n^*(A)$ події A можна обчислити за формулою:

$$P_n^*(A) = \sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i), \tag{8.1}$$

яка називається *формулою повної статистичної ймовірності*.

Приклад 8.1. Є дві урни, в яких є білі і чорні кульки. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирається урна, а з неї навмання вибирається кулька, яка потім повертається в урну. Із n випробувань m_1 разів була взята перша урна, при цьому в $k_1 < m_1$ цих випадків кулька була біла, і $m_2 = n - m_1$ разів була взята друга урна, при цьому в $k_2 < m_2$ випадків кулька була біла.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega = \{(1,б),(1,ч),(2,б),(2,ч)\}$, де елементарна подія $E_{kб} = (k,б)$ ($E_{kч} = (k,ч)$), $k \in \overline{1,2}$, означає, що з k-тої урни вийнято білу (чорну) кульку. Подія $H_k = \{(k,б),(k,ч)\}$ означає, що кульку вийнято з k-тої урни, $k \in \overline{1,2}$. За умовою задачі $P_n^*(H_1) = \dfrac{m_1}{n}$, $P_n^*(H_2) = \dfrac{m_2}{n}$. Очевидно $H_1 \cdot H_2 = \varnothing$ і $H_1 + H_2 = \Omega$.

Нехай подія $A = \{(1,б),(2,б)\}$ – поява білої кульки. За умовою задачі $P_n^*(A/H_1) = \dfrac{k_1}{m_1}$, $P_n^*(A/H_2) = \dfrac{k_2}{m_2}$ і в n випробуваннях подія A відбулася $k_1 + k_2$ разів.

Тому за формулою (8.1) статистична ймовірність (відносна частота) появи білої кульки в цих n випробуваннях дорівнює

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1) P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2) P_n^*(A/H_2) = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{k_1}{m_1} + \frac{m_2}{n} \cdot \frac{k_2}{m_2}.$$

Якщо в умовах, коли відомі $P_n^*(H_i)$ і $P_n^*(A/H_i)$, потрібно визначити, чому дорівнює $P_n^*(H_i/A)$, тобто відносну частоту відбування події H_i серед тих випробувань, коли відбувалася подія A, то використовують *формулу Байєса*:

$$P_n^*(H_i/A) = \frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)} = \frac{P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i)}.$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Одні і ті ж деталі вироблялися трьома виробниками і пакувалися окремо деталі першого виробника, окремо деталі другого і окремо деталі третього виробника. Для контролю продукції велику кількість n разів із трьох можливих пакунків навмання вибирався один і потім з нього навмання вибиралася одна деталь. При цьому виявилось, що відносна частота появи пакунків будь якого із трьох виробників дорівнює $\frac{1}{3}$. Серед тих випадків, коли було вибрано пакунок першого виробника, жодного разу не було виявлено браковану деталь. Серед тих випадків, коли було вибрано пакунок другого виробника, так само жодного разу не було виявлено браковану деталь. Коли ж для контролю вибиралися пакунки третього виробника, то в $\frac{2}{3}$ від кількості таких випадків деталь виявлялася бракованою. Потрібно обчислити статистичну ймовірність (відносну частоту) відбування події A, яка полягає в тому, що брак виявлено.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega = \{(1,б),(1,я),(2,б),(2,я),(3,б),(3,я)\}$, де елементарна подія $E_{kб} = (k,б)$ $(E_{kя} = (k,я))$, $k \in \overline{1,3}$, означає, що вибрана деталь виготовлена k-тим робітником і є бракованою (якісною). Подія $A = \{(1,б),(2,б),(3,б)\}$ полягає в тому, що вибрана деталь є бракованою.

Позначимо через $H_1 = \{(1,б),(1,я)\}$ – подію, яка полягає в тому, що для контролю було вибрано пакунок з деталями першого виробника, $H_2 = \{(2,б),(2,я)\}$ – для контролю вибрано пакунок з деталями другого виробника, $H_3 = \{(3,б),(3,я)\}$ – вибрано пакунок з деталями третього виробника. Очевидно, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, причому $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$, оскільки інші припущення відносно того, який із робітників виготовив деталь, неможливі.

Як видно з умов задачі,

$$P_n^*(H_1) = \frac{1}{3}, \quad P_n^*(H_2) = \frac{1}{3}, \quad P_n^*(H_3) = \frac{1}{3},$$

$$P_n^*(A/H_1) = 0, \; P_n^*(A/H_2) = 0, \; P_n^*(A/H_3) = \frac{2}{3}.$$

Тому за формулою повної статистичної ймовірності:

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1) P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2) P_n^*(A/H_2) + P_n^*(H_3) P_n^*(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Отже, в наведеній серії вказаних контрольних заходів вдавалося виявити брак в середньому в двох спробах із кожних дев’яти, а в кожних інших семи спробах із дев’яти брак виявити не вдавалося.

Вправа 2. При багатократному передаванні телеграфних повідомлень за допомогою двох знаків “•” (крапка) і “–” (тире) було з’ясовано, що відносна частота спотворення знака “•”

дорівнює $\frac{2}{5}$, а відносна частота спотворення знака “–” дорівнює $\frac{2}{3}$. Крім того було помічено, що у повідомленнях, які треба передавати, відносна частота появи знака “$\bullet$” дорівнює $\frac{5}{8}$, а відносна частота появи знака “–” дорівнює $\frac{3}{8}$. Потрібно обчислити відносну частоту випадків, коли передавали знак “$\bullet$”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “$\bullet$”.

Природно вважати, що простором елементарних подій є $\Omega = \{"\bullet\bullet", "\bullet -", "- \bullet", "- -"\}$, де кожній елементарній події $E \in \Omega$ відповідає сукупність двох знаків: першим вказано переданий знак, а другим – прийнятий.

Нехай подія $A = \{"\bullet\bullet", "- \bullet"\}$ полягає в тому, що прийнято знак “$\bullet$”. Така подія може відбутися як за умови, що передавали знак “$\bullet$”, так і за умови, що передавали знак “–”. Отже є дві гіпотези: $H_1 = \{"\bullet\bullet", "\bullet -"\}$ – передавали знак “$\bullet$”, $H_2 = \{"- \bullet", "- -"\}$ – передавали знак “–”. Очевидно $H_1 H_2 = \varnothing$, $H_1 + H_2 = \Omega$ (оскільки інші припущення відносно того, який знак передавали, неможливі). За умовами задачі $P_n^*(H_1) = \frac{5}{8}$, $P_n^*(H_2) = \frac{3}{8}$. Крім того, оскільки відносна частота спотворення знака “$\bullet$” дорівнює $\frac{2}{5}$, а знака “–” – $\frac{2}{3}$, то подія A за гіпотези H_1 відбувається тоді, коли знак “$\bullet$” не спотворюється, тобто $P_n^*(A/H_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, а за гіпотези H_2 подія A відбувається, коли спотворюється знак “–”, тобто, $P_n^*(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

Тоді за формулою повної статистичної ймовірності одержуємо

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1) P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2) P_n^*(A/H_2) =$$
$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{8}.$$

Щоб визначити статистичну ймовірність того, що передавали знак “$\bullet$” за умови, що прийнято знак “$\bullet$”, тобто $P_n^*(H_1/A)$, скористаємось означенням умовної статистичної ймовірності $P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ або формулою Байєса.

Для розглядуваного випадку дістанемо:

$$P_n^*(H_1/A)=\frac{P_n^*(AH_1)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(A)}=$$

$$=\frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}.$$

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$, то H_i – гіпотези.

2. Якщо $H_i\cdot H_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то H_i – гіпотези.

3. Твердження, обернені до 1 або 2, є правильними.

4. Для кожної події A існує єдина формула повної статистичної ймовірності.

5. Для кожної гіпотези H_i існує подія A така, що $P_n^*(H_i/A)=P_n^*(H_i)$.

6. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ має єдину статистичну ймовірність, яка не залежить від того, відбулася чи ні якась подія A.

7. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ може мати багато різних умовних статистичних ймовірностей.

2. За даними вправи 2 обчислити:

1) відносну частоту випадків, коли передавали знак “–”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “•”;

2) відносну частоту випадків, коли передавали знак “•”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “–”;

3) відносну частоту випадків, коли передавали знак “–”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “–”.

3. Довести, що коли події H_i, $i\in\overline{1,\ m}$, є гіпотезами, то $P_n^*(H_i)\geq\frac{1}{m}$ принаймні для однієї з гіпотез.

4. У трьох однакових урнах містяться білі і чорні кульки. У першій урні – 3 білих, 1 чорна, у другій – 6 білих, 4 чорних, у третій – 9 білих, 1 чорна. Деяку кількість разів навмання вибирали урну, а з неї навмання вибирали кульку, яку потім повертали в урну. Статистичні ймовірності вибору будь-якої урни виявилися однакові. Однакові і статистичні ймовірності вибору будь-якої кульки з кожної урни. Знайти: 1) статистичну ймовірність того, що таким чином вибрана кулька була білою; 2) статистичну ймовірність того, що ця біла кулька вибрана з другої урни.

5. Розрив електричного ланцюга може відбуватися внаслідок виходу з ладу елемента K або двох елементів K_1 і K_2, які виходять з ладу незалежно один від одного відповідно з статистичними ймовірностями $0{,}3$; $0{,}2$ і $0{,}2$. Визначити статистичну ймовірність розриву електричного ланцюга.

6. Розрив електромережі відбувався тоді, коли виходив з ладу принаймні один з трьох послідовно з'єднаних електричних елементів. Знайти статистичну ймовірність того, що розриву електромережі не було, якщо кожен з цих трьох елементів виходив з ладу незалежно від інших із статистичними ймовірностями відповідно $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$ та $\frac{6}{10}$.

7. Статистична ймовірність того, що протягом доби виходить з ладу k-й блок радіопристрою, дорівнює p_k, $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Знайти статистичну ймовірність того, що протягом доби радіопристрій виходить з ладу, тобто виходить з ладу принаймні один блок, якщо кожен блок виходить з ладу незалежно від інших.

8. Для руйнування моста достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти статистичну ймовірність того, що міст було зруйновано, коли на нього було скинуто чотири бомби, статистичні ймовірності влучення яких відповідно дорівнюють: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 і ці влучення незалежні у сукупності.

9. Статистична ймовірність успішного виконання вправ для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконували вправи по черзі доти, поки хтось не виконав вправи успішно або обидва не зроблять по дві спроби. Той, хто успішно виконував вправу першим, одержував приз. Знайти статистичні ймовірності одержання призу кожним спортсменом.

10. Статистична ймовірність того, що продукція, вироблена на заводі, є стандартною, дорівнює 0,95. Спрощена система контролю заносить продукцію до стандартної із статистичною ймовірністю 0,98, коли вона справді є стандартною, та із статистичною ймовірністю 0,06, коли вона насправді не є стандартною. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання взятий зразок продукції:

1) був занесений до стандартних;

2) був насправді стандартним, коли він: а) був занесений до стандартних; б) не був занесений до стандартних.

11. Комплект із 100 деталей містив 5% бракованих деталей. Вибірковий контроль полягав у тому, що з цього комплекту навмання вибирали 5 деталей і комплект вважали придатним до використання, якщо усі 5 вибраних деталей не були бракованими. Знайти статистичну ймовірність того, що даний комплект деталей було визнано придатним до використання.

12. Пристрій містить два елементи, статистична ймовірність відмови яких відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайти статистичну ймовірність відмови пристрою, якщо для цього досить:

1) відмови хоча б одного елемента; 2) відмови обох елементів.

13. Три дослідники незалежно один від одного знімають покази приладу. Статистична ймовірність того, що дослідник припускає при цьому помилку дорівнює для кожного дослідника відповідно $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{20}$ та $\frac{1}{50}$. Знайти статистичну ймовірність того, що при однократному зніманні показників приладу:

1) усі дослідники припускалися помилок;
2) хоча б один дослідник припускався помилки;
3) два дослідники припускалися помилки;
4) принаймні один дослідник не припускався помилки.

14. Статистичні ймовірності влучення в мішень при кожному пострілі однакові. Відомо, що статистична ймовірність принаймні одного влучення при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти статистичну ймовірність влучення при одному пострілі.

15. (Задача Банаха). У коробці 50 сірників. Статистична ймовірність того, що сірник запалюється, дорівнює $\frac{1}{2}$. Двоє друзів по черзі намагалися запалювати сірник доти, поки сірник не запалиться або не скінчаться сірники.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що першим запалить сірник той, хто:

1) починав першим; 2) починав другим; 3) запалював п'ятий сірник.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що жоден сірник не запалиться.

9. Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Простір Ω елементарних подій називають *дискретним,* якщо кількість елементарних подій $E_i \in \Omega$ скінченна або зчисленна, тобто якщо $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, або $i \in N$. Якщо кожну елементарну подію $E_i \in \Omega$ ототожнювати з деякою точкою на числовій прямій, тобто з деяким дійсним числом x_i, причому $i \in \overline{1,k}$ або $i \in N$, а числа x_i попарно різні: $x_i \neq x_j$, коли $i \neq j$, то для дискретного простору Ω можна вважати, що $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Приклад 9.1. Якщо ототожнювати випадання цифри з числом 0, а випадання герба – з числом 1, то замість простору $\Omega = \{Ц, Г\}$, можна розглядати простір $\Omega = \{0,1\}$.

Приклад 9.2. Нехай експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба. Тоді замість простору елементарних подій $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \ldots\}$ можна розглядати простір $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Припустимо, що проведено n випробувань, в результаті яких спостерігалися елементарні події $x_{\text{сп}\, i} \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $i \in \overline{1, n}$. Ці значення $x_{\text{сп}\, i}$, $i \in \overline{1, n}$, називають *спостереженими значеннями* або *варіантами*.

Якщо n_i – абсолютна частота елементарної події E_i, тобто елементарна подія E_i спостерігалася в n випробуваннях n_i разів, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то число n_i є абсолютною частотою появи значення x_i, а число $P_n^*(E_i) = \frac{n_i}{n} = P_n^*(x_i)$ – статистична ймовірність або відносна частота появи значення x_i.

Таблиці виду 9.1 і 9.2 називають відповідно *рядом розподілу абсолютних частот* та *рядом розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)* на дискретній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Говорять також, що таблиці 9.1 і 9.2 задають *дискретний розподіл частот* (відповідно абсолютних та відносних). При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\},\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(x_i)$.

Коли Ω нескінченна дискретна множина, то таблиці 9.1 та 9.2 нескінченні, але $n_i \neq 0$ і $P_n^*(x_i) \neq 0$ лише для скінченної кількості елементів x_i, і на практиці до таблиць записують лише такі елементи.

Табл. 9.1.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 9.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Для полегшення підрахунку чисел n_i, а отже і чисел $P_n^*(x_i)$, спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ розташовують у порядку їх зростання, в результаті чого одержують так званий *варіаційний ряд.*

У фізичній інтерпретації ряд розподілу абсолютних частот можна розглядати як розподіл маси n на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, а ряд розподілу відносних частот – як розподіл одиничної маси на тій самій множині.

Якщо точки $(x_i, P_n^*(x_i))$ зобразити на координатній площині, то ламану з вершинами у цих точках називають *полігоном відносних частот* або *многокутником розподілу статистичних ймовірностей* (відносних частот).

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Варіаційний ряд для спостережених значень 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5 має вигляд 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, а відповідні ряди розподілу абсолютних та відносних частот подані в таблицях 9.3 і 9.4.

Табл. 9.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 9.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Вправа 2. На Рис. 9.1 зображено полігон відносних частот, що визначається таблицею 9.4.

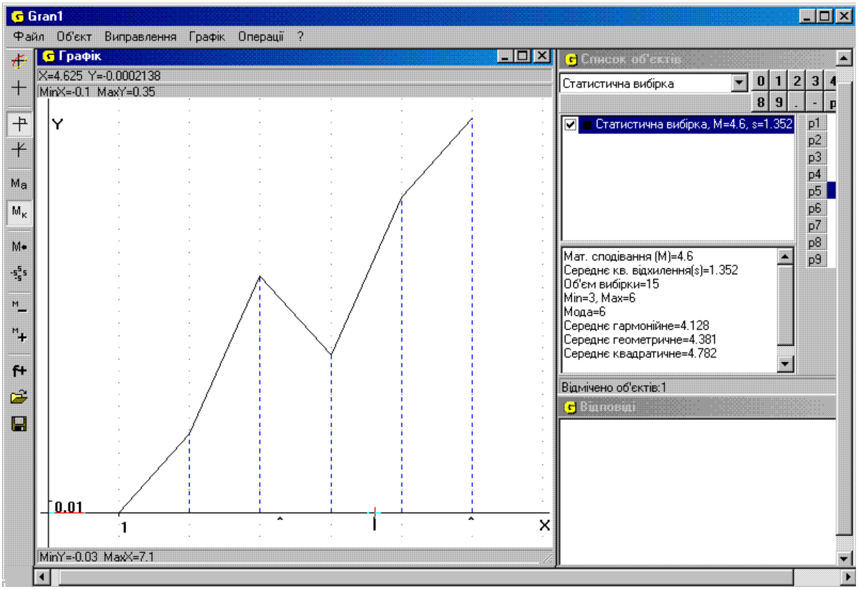


Рис. 9.1

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Елементарні події довільної множини Ω можна ототожнювати з натуральними числами.

2. Спостережені елементарні події E_i – це те саме, що й спостережені значення x_i.

3. В заданій серії з n випробувань кожне спостережене і неспостережене значення має свою абсолютну і відносну частоти.

4. Дискретний розподіл частот можна задати таблицею.

5. Будь-які таблиці виду 9.1 та 9.2 задають дискретний розподіл частот.

6. Варіаційний ряд цілком визначає дискретний розподіл частот.

7. Сукупність чисел 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, *5* можна вважати варіаційним рядом.

8. Статистичні ймовірності можна інтерпретувати як маси.

9. Кожен простір елементарних подій є дискретним.

10. Полігон відносних частот цілком визначає дискретний розподіл частот.

11. Будь-яку ламану на координатній площині можна вважати многокутником розподілу статистичних ймовірностей.

2.1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень, що відповідають спостереженим відхиленням точки падіння снаряда від цілі: -50, 20, -10, 20, 10, 20, -50, -20, -10, 40, -20,-30, -10, 10, 20, -40, 50, -10, 10, 50.

2. Використовуючи варіаційний ряд з 2.1, побудувати ряди розподілу абсолютних та відносних частот на множині можливих значень {-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50}.

3. Побудувати полігон відносних частот для розподілу з 2.2.

4. Підрахувати відносну частоту появи події A, яка полягає в тому, що відхилення точки падіння снаряда від цілі не перевищує 20.

3. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4,
3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка абітурієнта лежить в межах від 5 до 9.

4. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіл відносних частот.

2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка була позитивною (тобто 3,4 або 5).

5. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли абсолютних та відносних частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання обраний студент працював у бібліотеці не менше 4-х днів на тиждень.

6. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

1. Скласти відповідний розподіл відносних частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що розмір купленого

взуття лежить в межах від 39 до 42 (включаючи ці розміри).

7. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

1. Скласти відповідний розподіл відносних частот.
2. Побудувати полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст призовників більший за 175см і не більший за 190см.

8. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли абсолютних і відносних частот.
2. Побудувати полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість зерен у колоскові була не меншою за 20.

9. 1. Чи може дискретний розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень задаватися таблицею:

1)

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,05

2)

x_i	0	2	4	6
$P_n^*(x_i)$	0,15	0,25	0,37	0,23

2. Якщо відповідь на запитання ствердна, то побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Поділити навпіл множину спостережених значень і порівняти статистичні ймовірності попадання спостережених значень в такі множини.

10. Студент є абонентом 4-х бібліотек. Статистична ймовірність того, що потрібна студенту книга є у бібліотеці, дорівнює 0,3 для кожної з 4-х бібліотек. Експеримент полягає у тому, що студент відвідує бібліотеки у наперед заданому порядку доти, поки не знайде потрібної книги або не відвідає усі чотири бібліотеки, та підраховує кількість відвіданих бібліотек. Ця кількість відвіданих студентом бібліотек є спостереженими значеннями.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що студент відвідає: 1) не менше двох бібліотек; 2) не більше трьох бібліотек.

11. Експеримент полягає у тому, що монету підкидають тричі, а спостереженими значеннями є кількість випадань герба.

Статистична ймовірність випадання герба при кожному підкиданні дорівнює $\frac{1}{2}$.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність випадання герба: 1) не менше двох разів; 2) не більше одного разу.

12. Експеримент полягає у тому, що фіксується кількість світлофорів (спостережені значення), пройдених автомобілем до першої зупинки з причини забороняючого проїзд червоного світла світлофора. Статистична ймовірність наявності червоного світла для кожного світлофора дорівнює $\frac{1}{2}$, кількість світлофорів на шляху автомобіля дорівнює 5.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість пройдених світлофорів до першої зупинки: 1) не більше трьох; 2) не менше двох.

13*. Сформулювати і розв'язати аналогічну до **12** задачу, коли фіксується кількість зупинок біля світлофорів.

14. У поліклініці вели реєстрацію виданих карток: X – до хірурга, T – до травматолога, E – до ендокринолога, $П$ – до терапевта, O – до окуліста, H – до онколога, I – до інфекціоніста. В реєстратурі вирішили записати картки, що видавалися, і отримали такі дані:

X, T, E, $П$, H, X, O, T, I, O, X, O, H, $П$, T, X, X, E, T, T, T, E, $П$, E, T, X, E, X, O, E, O, X, X, $П$, E, T, O, X, I, O, H, X, I, I, $П$, T, T, H, X, X, T, E, $П$, E, $П$, X, T, X, E, O, $П$, H, T, H, E, X, $П$, T, E, X, T, O, O, T, E, X, T, T, X, H, E, X, T, O, $П$, X, E, T, X, I.

Скласти таблицю відносних частот відвідувань кожного лікаря.

Побудувати графічне подання розподілу відносних частот.

10. Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей

Простір Ω елементарних подій, який можна ототожнювати з числовим проміжком $\langle a;b\rangle$, називають *неперервним.* В цьому випадку кожне число $x\in\langle a;b\rangle$, яке ототожнюється з відповідною елементарною подією, може бути спостереженим значенням в результаті експерименту, що пов'язаний з множиною Ω.

Приклад 10.1. Нехай випробування – постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega=[0;1]$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x\in[0;1]$.

У випадку неперервної множини $\Omega=\langle a, b\rangle$ елементарних подій подіями найчастіше вважають так звані вимірні (тобто такі, яким можна приписати довжину) підмножини множини Ω, до яких відносять, зокрема, будь які проміжки $\langle\alpha;\beta\rangle\subset\langle a;b\rangle$, а також об'єднання таких проміжків $\bigcup\limits_k\langle\alpha_k;\beta_k\rangle$ та різниці $\Omega\setminus\bigcup\limits_k\langle\alpha_k;\beta_k\rangle$. Як виявляється, будь-який проміжок $\langle a;b\rangle$ містить невимірну підмножину (якій неможливо приписати довжину), а тому не завжди кожну підмножину $A\subset\Omega$ можна вважати подією.

Приклад 10.2. Якщо Ω з прикладу 10.1, то подія A може полягати у тому, що відстань точки влучення від центра мішені – число (точка), що є елементом певної вимірної підмножини $A\subset[0;1]$. Наприклад, такими подіями можуть бути підмножини

$$A=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right],\ B=\left(0;\frac{1}{4}\right]\bigcup\left[\frac{3}{4};1\right).$$

Нехай проведено n спостережень (n досить велике), в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп }1}, x_{\text{сп }2}, \ldots, x_{\text{сп }n}$, кожне з проміжка $\langle a;b\rangle=\Omega$.

У випадку неперервної множини $\Omega=\langle a;b\rangle$ для підрахунку статистичних ймовірностей (відносних частот) $P_n^*(A)$ поступають інакше, ніж у випадку, коли множина Ω дискретна, скінченна і містить не дуже велику кількість точок.

Надалі вважатимемо, що $\Omega=[a;b)$.

Оскільки події $A\subset[a;b)$ так чи інакше пов'язані з проміжками $\langle\alpha;\beta\rangle\subset[a;b)$, то для підрахунку статистичних ймовірностей цих подій проміжок $\Omega=[a;b)$ поділимо точками $a_0=a$, $a_i=a_{i-1}+h,\ h=\frac{b-a}{k},\ i\in\overline{1,k}$, на k рівних проміжків $[a_{i-1};a_i)$. Число $h=\frac{b-a}{k}$ називається *кроком поділу*. Для кожного $i\in\overline{1,k}$ підрахуємо кількість спостережених значень $x_{\text{сп }j}$, що попадають у проміжок $[a_{i-1};a_i)$. Дістанемо числа n_i – *абсолютні частоти попадання спостережених значень* $x_{\text{сп }j}$ *у проміжки* $[a_{i-1};a_i)$, причому $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n$. Число $P_n^*([a_{i-1};a_i))=\frac{n_i}{n}$ називають *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою* попадання спостережених значень $x_{\text{сп}\, j}$, $j \in \overline{1,n}$, у проміжок $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \overline{1,k}$. При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*([a_{i-1}, a_i))$. (Порівняйте з вправою 2 з § 1.6).

Таблицю виду 10.1 називають *інтервальним розподілом абсолютних частот*, а таблицю виду 10.2 називають *інтервальним* (*або неперервним*) *розподілом статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) *на множині* $\Omega = [a, b)$.

Табл. 10.1

$[a_{i-1}; a_i)$	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	**...**	$[a_{k-1}; a_k)$
n_i	n_1	n_2	**...**	n_k

Табл. 10.2

$[a_{i-1}; a_i)$	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	**...**	$[a_{k-1}; a_k)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	$P_n^*([a_0; a_1))$	$P_n^*([a_1; a_2))$	**...**	$P_n^*([a_{k-1}; a_k))$

Для складання цих таблиць, як і у дискретному випадку, спостережені значення записують у вигляді варіаційного ряду.

У фізичній інтерпретації інтервальний розподіл абсолютних частот – це неперервний розподіл маси n на сукупності заданих проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, а неперервний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) – це неперервний розподіл одиничної маси на вказаній сукупності проміжків.

Розглянемо функцію $f_n^*(x)$, що набуває нульового значення за межами проміжка $[a; b)$, тобто $f_n^*(x) = 0$ для $x < a$ або $x \ge b$, і значень $\frac{1}{h} P_n^*([a_{i-1}; a_i))$ на проміжках $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, де $h = \frac{b-a}{k}$, $a_0 = a$, $a_i = a_{i-1} + h = a + i \cdot h$, $i \in \overline{1,k}$. Графік такої функції називають *гістограмою* неперервного розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), який визначається таблицею 10.2.

У фізичній інтерпретації $f_n^*(x)$ – це щільність розподілу одиничної маси на проміжку $[a; b)$, оскільки на кожному інтервалі $[a_{i-1}; a_i)$ значення $f_n^*(x)$ одержується як маса $P_n^*([a_{i-1}; a_i))$, що припадає на цей інтервал, поділена на довжину інтервалу $h = a_i - a_{i-1}$, тобто як середня щільність маси на інтервалі $[a_{i-1}; a_i)$. Тому $f_n^*(x)$ називають *щільністю розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на проміжку* $[a; b)$.

На Рис. 10.1 зображено гістограму деякого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

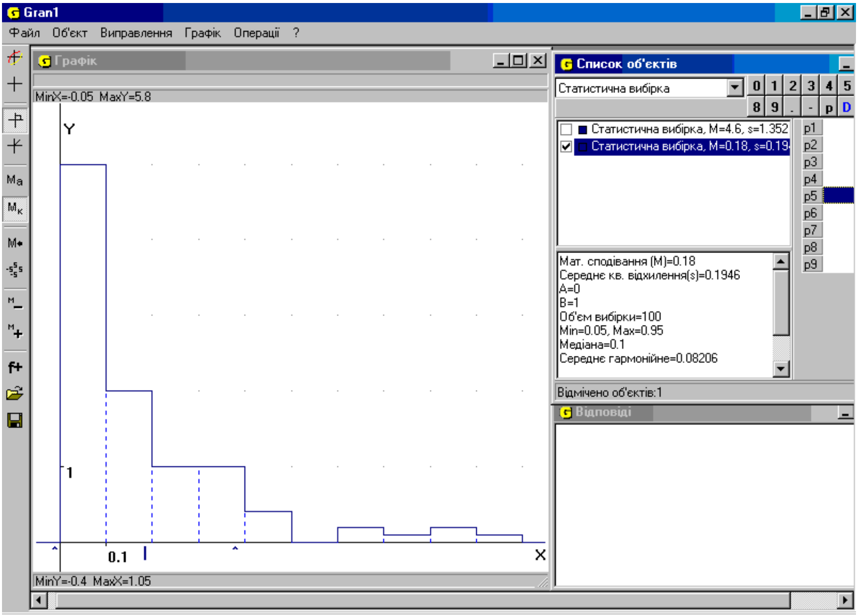


Рис. 10.1

Оскільки в геометричній інтерпретації при $x \in [a_{i-1}; a_i)$ $P_n^*([a_{i-1}; a_i)) = f_n^*(x)h$ – це площа прямокутника з основою $[a_{i-1}; a_i)$ і висотою $f_n^*(x)$, $x \in [a_{i-1}; a_i)$, то

$$P_n^*([a_{i-1};\, a_i)) = \int\limits_{[a_{i-1};\, a_i)} f_n^*(x)\,dx = \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx.$$

Отже, з геометричної точки зору $P_n^*([a_{i-1};\, a_i))$ – це площа вказаного прямокутника, а статистична ймовірність $P_n^*(A)$ попадання спостережуваних значень в множину A, що є об'єднанням деяких проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, визначається рівністю

$$P_n^*(A) = \sum_{[a_{i-1}; a_i) \subset A} P_n^*([a_{i-1}; a_i)) = \sum_{[a_{i-1}; a_i) \subset A} \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \int\limits_A f_n^*(x)\,dx.$$

Останнє число називають інтегралом від функції $f_n^*(x)$ на множині A.

Взагалі $P_n^*(A) = \int\limits_A f_n^*(x)\,dx$ для будь-якої події (вимірної множини) $A \subset \Omega$.

Щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має такі властивості:

1. $f_n^*(x) \geq 0$, $x \in (-\infty; \infty)$; 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)\,dx = 1.$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $\Omega = [0;1]$ з прикладу 10.1 і виконано *n*=100 пострілів, результати яких наведено у таблицях 10.3 і 10.4. Ці таблиці є конкретними інтервальними розподілами абсолютних і відносних частот.

Табл. 10.3

$[a_{i-1}; a_i)$	$\left[0; \frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10}; \frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10}; \frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10}; \frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10}; \frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10}; \frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10}; \frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10}; \frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10}; 1\right)$
n_i	50	20	10	10	4	0	2	1	2	1

Табл. 10.4

$[a_{i-1}; a_i)$	$\left[0; \frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10}; \frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10}; \frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10}; \frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10}; \frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10}; \frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10}; \frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10}; \frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10}; 1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1}; a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

Вправа 2. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 10.4, то щільність цього розподілу має вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \textit{коли } x < 0, \\ 5, & \textit{коли } 0 \leq x < 0.1, \\ 2, & \textit{коли } 0.1 \leq x < 0.2, \\ 1, & \textit{коли } 0.2 \leq x < 0.3, \\ 1, & \textit{коли } 0.3 \leq x < 0.4, \\ 0.4, & \textit{коли } 0.4 \leq x < 0.5, \\ 0, & \textit{коли } 0.5 \leq x < 0.6, \\ 0.2, & \textit{коли } 0.6 \leq x < 0.7, \\ 0.1, & \textit{коли } 0.7 \leq x < 0.8, \\ 0.2, & \textit{коли } 0.8 \leq x < 0.9, \\ 0.1, & \textit{коли } 0.9 \leq x < 1, \\ 0, & \textit{коли } x \geq 1. \end{cases}$$

Графік функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 10.1.

Вправа 3. Якщо в експерименті, описаному у вправі 1, подія A – це попадання у множину точок, які віддалені від центра мішені на відстань, не більшу, ніж 0.25, і не меншу, ніж 0.05, то $P_n^*(A) = \int\limits_{[0.05;\ 0.25]} f_n^*(x)\ dx = 0.5$ – інтеграл від функції $f_n^*(x)$ на проміжку $[0.05; 0.25]$, що дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників на Рис. 10.2.

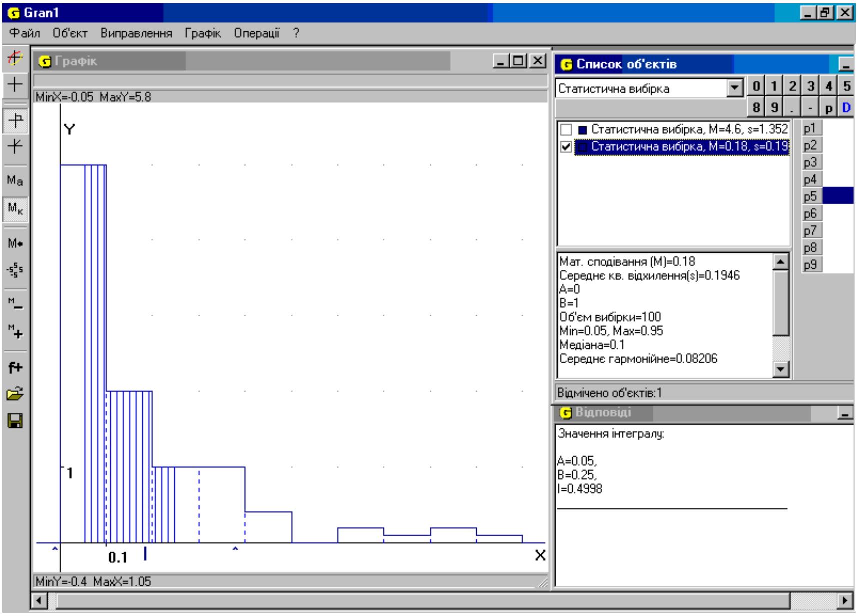


Рис. 10.2

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен простір Ω елементарних подій можна вважати неперервною множиною.

2. Неперервна множина Ω ототожнюється з певним проміжком $\langle a;\ b \rangle$.

3. Для неперервної множини Ω подіями вважаються вимірні підмножини.

4. Кожна підмножина $A \subset [a; b)$ є вимірною.

5. Для неперервної множини Ω статистичні ймовірності подій $A \subset \Omega$ визначаються так само, як і для дискретної множини Ω.

6. Неперервний розподіл статистичних ймовірностей – це те саме, що й інтервальний розподіл.

7. Щоб описати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, підраховують абсолютні та відносні частоти попадання спостережених значень у проміжки, які попарно не перетинаються і в об'єднанні дають Ω.

8. Гістограма – це графік щільності розподілу статистичних ймовірностей.

9. Якщо відома щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, то можна визначити статистичну ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$.

10. Неперервний розподіл статистичних ймовірностей залежить від поділу проміжка $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

2.1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19,
45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10,
14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Використовуючи цей варіаційний ряд побудувати інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот, взявши інтервали довжиною 10 з центрами в точках –50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50.

3. За одержаними даними визначити функцію $f_n^*(x)$ і побудувати її графік.

4. Використовуючи $f_n^*(x)$, визначити статистичну імовірність (відносну частоту) влучення точки падіння снаряда в інтервал: 1) (-35, 35); 2) (-25, 25);3) (-5, 55).

3. Визначаючи вагу 50 новонароджених, дістали такі результати (у кг):

4,3; 4,4; 2,1; 3,5; 2,5; 3,2; 2,3; 4,1; 2,4; 4,0; 3,3; 2,9; 3,2; 3,0; 2,7; 3,4; 2,2;
3,1; 3,5; 3,7; 2,0; 3,0; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,8; 3,2; 2,8; 2,9; 2,3; 2,5; 2,9; 2,6;
3,1; 3,4; 3,2; 3,9; 2,7; 3,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,9; 3,2; 3,3; 3,4; 3,1; 3,6; 3,9.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд.

2. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостереженні значення.

3. Поклавши крок поділу $h = 0{,}5$, визначити розбиття проміжку $(a;b]$ на проміжки $(a_{i-1};a_i)$.

4. Знайти інтервальні розподіли абсолютних та відносних частот спостережених значень.

5. Визначити щільність знайденого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

6. Побудувати гістограму знайденого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

7. Знайти статистичну ймовірність того, що вага новонародженого лежить у проміжку: а) $[2{,}5;\ 3{,}5)$; б) $[2{,}7;\ 4{,}2]$.

4. Визначаючи зріст (у см) кожної з 50 першокурсниць, дістали такі результати

169, 171, 157, 173, 170, 156, 172, 159, 168, 158, 160, 164, 161,

165, 162, 166, 163, 167, 160, 168, 165, 160, 166, 161, 167, 162,
168, 163, 169, 160, 164, 165, 163, 166, 162, 167, 161, 168, 160,
164, 168, 162, 167, 163, 166, 165, 162, 160, 166, 165.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд.

2. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостережені значення.

3. Поклавши крок поділу $h=4$ см, визначити розбиття проміжку $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

4. Знайти інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот спостережених значень.

5. Визначити щільність знайденого розподілу статистичних ймовірностей.

6. Побудувати відповідну гістограму.

7. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст першокурсниці лежить у проміжку $[158;170)$

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

1. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостережені значення.

2. Поклавши крок поділу $h=6$ см, визначити розбиття проміжку $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

3. Знайти інтервальний розподіл абсолютних та відносних частот спостережених значень.

4. Визначити щільність знайденого розподілу статистичних ймовірностей.

5. Побудувати відповідну гістограму.

6. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст навмання вибраного призовника лежить у проміжку $[181;192)$.

6. Навести власні приклади статистичних даних і виконати наступні завдання:

1) скласти відповідний варіаційний ряд;

2) побудувати, вважаючи розподіли дискретними, відповідні ряди розподілу абсолютних і відносних частот;

3) зобразити полігон відносних частот;

4) вважаючи розподіли неперервними, побудувати відповідні інтервальні розподіли абсолютних ті відносних частот, вважаючи спостережені значення серединами інтервалів;

5) визначити щільності знайдених неперервних розподілів статистичних ймовірностей;

6) побудувати відповідні гістограми;

7) довільно задати проміжки $[\alpha;\beta)$ і підрахувати статистичні ймовірності того, що спостережені значення лежать у таких проміжках.

7. Експеримент полягає у тому, що виконують постріл у круглу мішень радіуса $r=1$ та вимірюють відстань від точки влучення до центра мішені (невлучення у мішень неможлива). За результатами 100 пострілів побудовано гістограму інтервального розподілу статистичних ймовірностей, подану на Рис. 10.3.

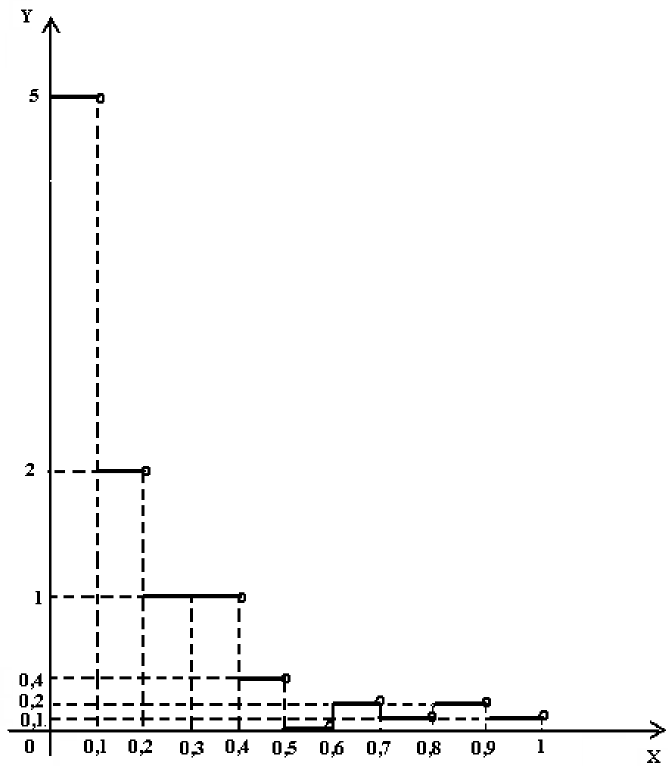


Рис. 10.3

1. Записати аналітичний вираз функції $f_n^*(x)$ – щільності розподілу статистичних ймовірностей.

2. Відновити інтервальні розподіли абсолютних та відносних частот спостережених значень.

3. Визначити статистичну ймовірність того, що відстань точки влучення від центра мішені лежить у проміжку $[0{,}15; 0{,}45)$.

8. 1. Чи може неперервний розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень задаватися таблицею:

1)

$[a_{i-1}; a_i)$	$[0; \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}; \frac{7}{10})$	$[\frac{7}{10}; \frac{9}{10})$	$[\frac{9}{10}; 1)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	0,2	0,1	0,5	0,3

2)

$[a_{i-1};a_i)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	0,1	0,2	0,3	0,4

2. Якщо відповідь на питання ствердна, то знайти аналітичний вираз функції $f_n^*(x)$ – щільності розподілу статистичних ймовірностей;

3. Побудувати графік функції $f_n^*(x)$.

4. Поділити навпіл проміжок, у якому лежать усі спостережені значення та порівняти статистичні ймовірності попадання спостережених значень в одержані проміжки.

11. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай дискретний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ визначається таблицею 11.1:

Табл. 11.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	···	$P_n^*(x_k)$

Функцію

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty;\ \ x)) = \sum_{x_i \in (-\infty,\, x)} P_n^*(x_i),\ i \in \overline{1,k},\ x \in R,$$

називають *функцією дискретного розподілу статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) *на множині* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Приклад 11.1. Нехай розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 11.2.

Табл. 11.2

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Тоді

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty;x)) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 2, \\ \frac{1}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{4}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ \frac{6}{15}, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ \frac{10}{15}, & \text{коли } 5 < x \le 6, \\ 1, & \text{коли } 6 < x. \end{cases}$$

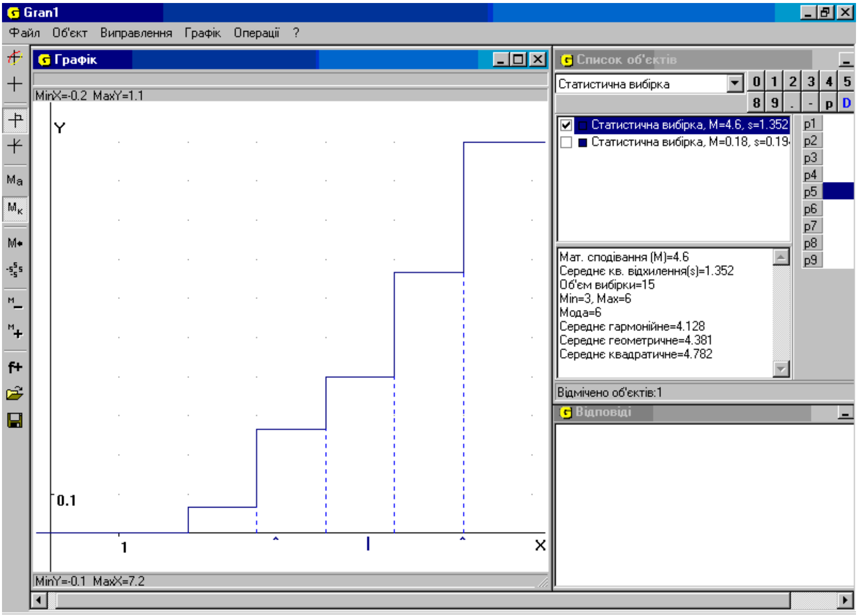


Рис. 11.1

На Рис. 11.1 зображено графік функції розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 11.2.

Основні властивості функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

1. $F_n^*(x) \geq 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty; x) \subset \Omega$.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події $\varnothing = \{x: x < -\infty\}$.

3. $F_n^*(+\infty) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події $\Omega = (-\infty; \infty)$.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $(\alpha; x_i]$, що не містить інших точок множини $\{x_1, x_2, \ldots\}$, функція розподілу статистичних ймовірностей стала, причому $F_n^*(x) = F_n^*(x_i)$ при $x \in (\alpha; x_i]$.

Будь-яку функцію, що задовольняє умови 1–5, називають *функцією розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ або *функцією дискретного розподілу статистичних ймовірностей*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $F_n^*(-\infty) = 0$, а $F_n^*(+\infty) = 1$.

Оскільки $-\infty < x_i$ для всіх i, то в сумі $\sum\limits_{x_i<-\infty} P_n^*(x_i)$ немає жодного доданку і така сума дорівнює 0, тобто $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, яка полягає у появі значення $x_{\text{сп}\,i}$, меншого за $-\infty$.

Так само, оскільки $x_i < +\infty$ для всіх i, то

$$F_n^*(+\infty) = \sum_{x_i \in (-\infty,\infty)} P_n^*(x_i) = P_n^*((-\infty;\ +\infty)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

як статистична ймовірність вірогідної події, яка полягає у попаданні точки $x_{\text{сп}\,i}$ на проміжок $(-\infty;\ +\infty)$.

Вправа 2. Довести, що

$$P_n^*([u;\ v)) = \sum_{x_i \in [u,v)} P_n^*(x_i) = F_n^*(v) - F_n^*(u),$$

тобто статистична ймовірність попадання точок $x_{\text{сп}\,i}$ на проміжок $[u;v)$ дорівнює приростові функції розподілу статистичних ймовірностей на цьому проміжку.

Нехай $u < v$. Тоді

$$F_n^*(v) = P_n^*((-\infty, v)) = P_n^*((-\infty, u) \cup [u, v)) =$$
$$= P_n^*((-\infty, u)) + P_n^*([u, v)) = F_n^*(u) + P_n^*([u, v)),$$

звідки

$$P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо задано ряд розподілу статистичних ймовірностей, то можна побудувати відповідну функцію розподілу.

2. Якщо задано функцію розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то можна підрахувати статистичні ймовірності появи кожного значення $x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

3. Якщо подія A полягає у попаданні точок в проміжок $(-\infty; \alpha]$, тобто $A = (-\infty; \alpha]$, то статистична ймовірність цієї події дорівнює значенню відповідної функції розподілу в точці α.

4. Функція розподілу статистичних ймовірностей є зростаючою.

5. Функція розподілу статистичних ймовірностей є невід’ємною неспадною функцією.

6. Кожна невід‘ємна неспадна функція є функцією деякого дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

7. Функція розподілу статистичних ймовірностей може набувати лише двох значень.

8. Множина значень функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

2. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та її графік, якщо задано:

1) ряд розподілу статистичних ймовірностей

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.25	0.50	0.25

2) можливі значення x_i відхилення снаряда від цілі – -50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, $P_n^*(x_i)$ – визначаються за серією спостережених значень: 10, 0, -20, -10, 20, 0, -10, 20, -30, 10, -20, 0, 0, 10, -10, 30, 0, 10, 0, -20, 10, 10, -20, -10, 0, -10, -10, 0, -10, 20, 0, 0, 10, 10, 20, -30, 20, -20, -10, 10, 0,10, -10, 0, 10, -10, 0, 0, 0, 20.

3. Довести властивості 1-4 функції розподілу статистичних ймовірностей.

4. Довести, що функція $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей: 1) неперервна зліва в будь-якій точці $x \in R$; 2) скрізь, крім точок x_i, диференційовна і $\frac{d}{dx} F_n^*(x) = 0$, $x \neq x_i$, $i \in \overline{1,\ k}$.

5. Для заданих спостережених значень, побудувати функцію дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік і визначити, де вона розривна і якого роду точки розриву:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

6. За даним полігомом відносних частот (Рис. 11.2 а, б):

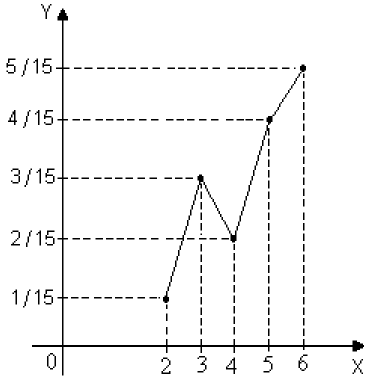


Рис. 11.2 а)

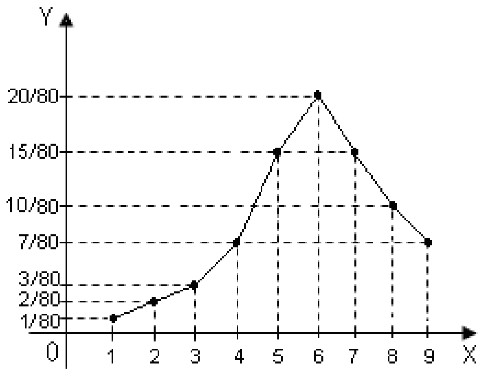


Рис. 11.2 б)

1. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

2. Зобразити графік функції $F_n^*(x)$.

3. Визначити, де функція $F_n^*(x)$: неперервна і де розривна та який характер точок розриву.

7. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

а)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{15}, \text{ коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{4}{15}, \text{ коли } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{6}{15}, \text{ коли } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{10}{15}, \text{ коли } 3 < x \le 4, \\ 1, \text{ коли } x > 4. \end{cases}$$

б)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ 0{,}1, & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{коли } 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & \text{коли } 5 < x \le 7, \\ 1, & \text{коли } x > 7. \end{cases}$$

1. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$;

2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.

3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n = 30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

8. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	C	$\frac{1}{6}$

1. Визначити число C.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік.

3. Визначити, де ця функція: 1) неперервна; 2) розривна і який характер точок розриву; 3) диференційовна і чому дорівнює її похідна.

9. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{3}$	C_1	C_2	$\frac{1}{9}$

1. Визначити, якими можуть бути числа C_1 та C_2.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік для конкретних значень C_1 та C_2.

3. Визначити, де ця функція неперервна та де розривна і який характер точок розриву, та перевірити, чи можна позбавитися деяких точок розриву за рахунок вибору сталих C_1 та C_2; 2) визначити, де функція $F_n^*(x)$ диференційовна і чому дорівнює її похідна.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

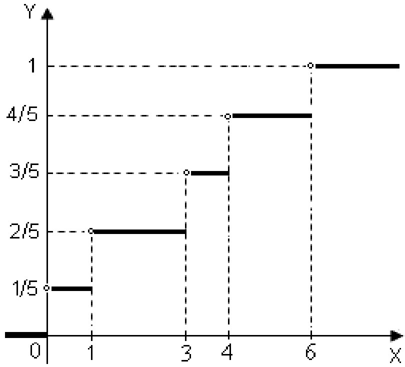


Рис. 11.4

1. Записати аналітичний вираз цієї функції.
2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.
3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n = 30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

11. Побудувати варіаційний ряд для спостережених значень 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5. Знайти ряди розподілу абсолютних та відносних частот. Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

15. При зважуванні 35 кроликів отримано результати:
3,0; 2,7; 1,6; 1,2; 1,6; 2,2; 2,1; 2,3; 1,5; 1,3; 2,2; 2,5; 2,4; 1,9; 2,3; 2,1; 1,0; 1,8; 1,9; 1,8; 3,2; 2,1; 2,9; 3,0; 1,3; 1,9; 2,6; 2,5; 1,9; 2,7; 2,4; 2,0; 1,1; 2,6.

Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

12. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.1:

Табл. 12.1

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	**...**	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	**...**	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

а $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей.

Функцію $F_n^*(x)$, що визначається рівністю

$$F_n{}^*(x) = P_n^*((-\infty; x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n{}^*(t)\,dt, \ x \in \overline{R},$$

називають *функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей*.

Приклад 12.1. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.2:

Табл. 12.2

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P_{100}^{*}([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04

	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
	0	0.02	0.01	0.02	0.01

то

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 5x, & \text{коли } 0<x\le 0.1,\\ 0.5+2(x-0.1), & \text{коли } 0.1<x\le 0.2,\\ 0.7+(x-0.2), & \text{коли } 0.2<x\le 0.3,\\ 0.8+(x-0.3), & \text{коли } 0.3<x\le 0.4,\\ 0.9+0.4(x-0.4), & \text{коли } 0.4<x\le 0.5,\\ 0.94+0\cdot(x-0.5), & \text{коли } 0.5<x\le 0.6,\\ 0.94+0.2(x-0.6), & \text{коли } 0.6<x\le 0.7,\\ 0.96+0.1(x-0.7), & \text{коли } 0.7<x\le 0.8,\\ 0.97+0.2(x-0.8), & \text{коли } 0.8<x\le 0.9,\\ 0.99+0.1(x-0.9), & \text{коли } 0.9<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1. \end{cases}$$

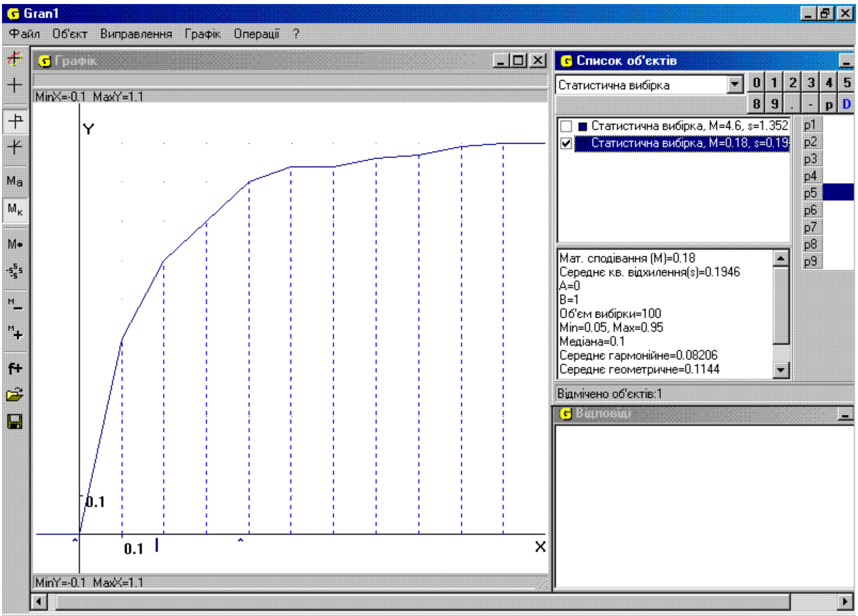


Рис. 12.1

На Рис. 12.1 подано графік функції розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 12.2.

Основні властивості функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1. $F_n^*(x) \geq 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty;\ x)$.

2. $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події.

3. $F_n^*(+\infty) = P_n^*((-\infty; +\infty)) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $[\, a_{i-1};\ a_i\,]$ функція $F_n^*(x)$ лінійно змінюється від значення $F_n^*(a_{i-1})$ до значення $F_n^*(a_i)$.

Будь яку функцію, яка задовольняє властивості 1 – 5, називають функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Оскільки

$$F_n^*(a_i) = \int_{-\infty}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(x)\,dx + \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx =$$

$$= F_n^*(a_{i-1}) + P_n^*([\,a_{i-1}; a_i)),$$

то

$$P_n^*([\,a_{i-1}; a_i)) = F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1}).$$

Таким чином, при заданій функції $F_n^*(x)$ можна визначити статистичні ймовірності $P_n^*([\,a_{i-1}; a_i))$ (відносні частоти попадання спостережуваних значень у проміжки $[\,a_{i-1}; a_i)$) для будь-яких проміжків $[\,a_{i-1}; a_i)$. А тому функція розподілу статистичних ймовірностей $F_n^*(x)$ цілком визначає статистичну ймовірність будь-якої події (вимірної множини) $A \subset \Omega$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 2. Довести, що функція неперервного розподілу, відносних частот визначена таблицею 12.1, є:

а) неперервною на R;

б) диференційовною на кожному інтервалі $(a_{i-1};\ a_i)$.

Враховуючи, що при $x \in [a_{i-1}; a_i)$ $f_n^*(x)$ стала і

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(t)\,dt+\int_{a_{i-1}}^{x} f_n^*(t)\,dt=F_n^*(a_{i-1})+f_n^*(x)\cdot(x-a_{i-1}),$$

коли $x\in[a_{i-1};a_i)$, легко бачити, що $F_n^*(x)$ неперервна і що в точках будь якого з проміжків $(a_{i-1};a_i)$ правильна рівність

$$\frac{d}{dx}F_n^*(x)=f_n^*(x).$$

У точках $x=a_i$ ця похідна може не існувати.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожного неперервного розподілу статистичних ймовірностей існує відповідна функція розподілу.

2. Функція $F_n^*(x)$, що визначається рівністю $F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(x)\,dx$, є функцією розподілу статистичних ймовірностей.

3. Щоб задати неперервний розподіл статистичних ймовірностей, досить задати або таблицю виду 12.1, або щільність розподілу $f_n^*(x)$, або функцію розподілу $F_n^*(x)$.

4. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперевному розподілі є зростаючою.

5. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперервному розподілі є зростаючою на кожному проміжку $[a_{i-1};a_i)$.

6. Множина значень функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

7. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей є неперервною в кожній точці x_0, тобто $F_n^*(x)\approx F_n^*(x_0)$, коли $x\approx x_0$.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу:

1) визначеного таблицею:

$[a_{i-1},a_i)$	[-35, -25)	[-25, -15)	[-15, -5)	[-5, 5)	[5, 15)	[15, 25)	[25, 35)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.04	0.06	0.20	0.40	0.20	0.06	0.04

2) визначеного таблицею:

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.02	0.03	0.05	0.15	0.50	0.15	0.05	0.03	0.02

де x_i – центри інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $a_i = a_{i-1} + h,\ i = \overline{1,9}$.

3. Довести, що функція $F_n^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt$ є неперервною у довільній точці $x_0 \in R$.

4. Довести, що похідна функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей може не існувати в окремих точках. Визначити, в яких саме.

5. Для заданих спостережених значень знайти функцію неперервного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік; визначити, чи має ця функція точки розриву; визначити, в яких точках ця функція диференційовна і як пов'язана її похідна з щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

6. Щільність розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{3}, \\ C, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{8}{9}, \\ 2, & \text{коли} \quad \dfrac{8}{9} \le x < 1. \end{cases}$$

1. Визначити сталу C.

2. Знайти відповідну функцію $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

3. Зобразити графіки функцій $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$.

4. Визначити, у яких точках $f_n^*(x) = (F_n^*(x))'$.

7. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 2x, & \text{коли} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}x + C_1, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ C_2 x, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{4}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

1. Визначити сталі C_1 та C_2.

2. Для знайдених значень C_1 та C_2 побудувати графік даної функції.

3. Визначити, де ця функція неперервна і де диференційовна та знайти відповідну щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей.

8. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей задана графічно (Рис. 12.2):

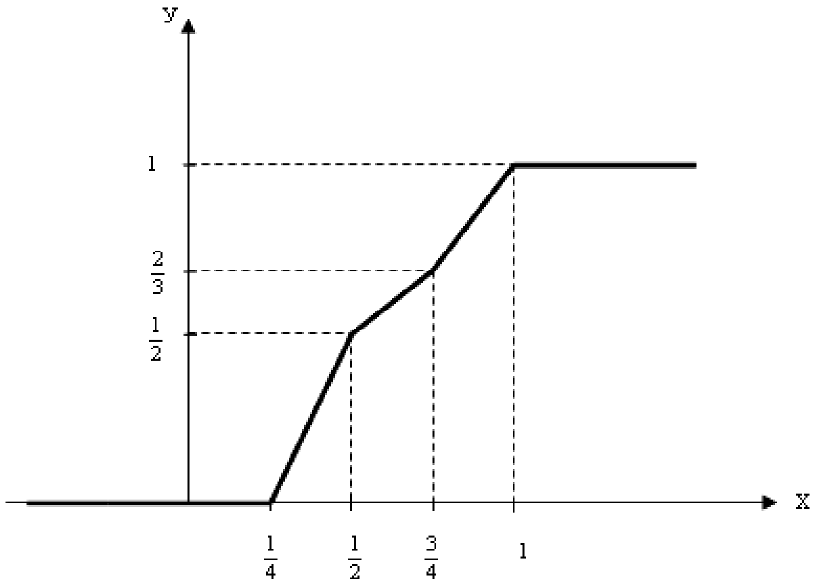


Рис. 12.2

1. Чи можна за графіком даної функції відновити графік щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей?

2. Знайти аналітичний вираз функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти аналітичний вираз $f_n^*(x)$ та побудувати її графік.

4. Визначити, де неперервні та де диференційовні функції $F_n^*(x)$ та $f_n^*(x)$.

5. В яких точках $\dfrac{dF_n^*(x)}{dx} = f_n^*(x)$.

9. Експеримент полягає у тому, що фірма, яка ремонтує побутову електротехніку, фіксує причину виходу техніки з ладу (електрична, механічна або зовнішня), а також відбулося це під час дії гарантії чи після гарантійного терміну.

Процентний розподіл кількостей виходу техніки з ладу характеризується таблицею:

Час виходу техніки з ладу	Причина виходу техніки з ладу		
	електрична	механічна	зовнішня
Під час дії гарантії	10	25	17
Після гарантійного терміну	15	30	3

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, що є спостереженими даними і чи можна їх трактувати як числа.

3. Чи є відповідний розподіл статистичних ймовірностей спостережених даних: 1) дискретним; 2) неперервним?

4. Якщо розподіл дискретний, то побудувати відповідні: 1) многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот); 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

5. Якщо розподіл неперервний, то побудувати відповідні: 1) щільність розподілу статистичних ймовірностей та гістограму; 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

6. Знайти статистичні ймовірності події:

1) A – навмання вибраний електроприлад вийшов з ладу під час дії гарантії;

2) B – причина виходу з ладу електроприладу є механічною;

3) C – електроприлад вийшов з ладу після закінчення гарантійного терміну.

7. Вияснити, чи є серед подій A, B, і C пари незалежних подій.

8. Чи є події A, B, і C: 1) незалежними у сукупності; 2) попарно незалежними.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень має вигляд:

$$1)\ F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le -1,\\ k(x+1), & \text{коли} \quad -1\le x\le 3,\\ 1, & \text{коли} \quad x\ge 3.\end{cases} \qquad 2)\ F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\ x\le 0,\\ kx, & \text{коли}\ 0\le x\le \dfrac{1}{2},\\ 1, & \text{коли}\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

1. Знайти значення параметра k і визначити, є відповідний розподіл дискретним чи неперервним.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти відповідну щільність розподілу статистичних ймовірностей.

4. Обчислити статистичну ймовірність того, що спостережені значення лежать у проміжку $[2;3]$.

11. Перевірити, чи може функція

$$F_n^*(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{коли}\ x\le 0,\\ x+\dfrac{1}{2}, & \text{коли}\ 0\le x\le \dfrac{1}{2},\\ 1, & \text{коли}\ x\ge 1,\end{cases}$$

бути функцією розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень.

12. Нехай випробування – це постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega=[0;1]$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x\in[0;1)$. Виконано $n=100$ пострілів, результати яких наведено у таблиці 12.3. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

Табл. 12.3

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 0{,}1)$	$[0{,}1;\ 0{,}2)$	$[0{,}2;\ 0{,}3)$	$[0{,}3;\ 0{,}4)$	$[0{,}4;\ 0{,}5)$
n_i	50	20	10	10	4

	$[0{,}5;\ 0{,}6)$	$[0{,}6;\ 0{,}7)$	$[0{,}7;\ 0{,}8)$	$[0{,}8;\ 0{,}9)$	$[0{,}9;\ 1)$
	0	2	1	2	1

13. Результати пострілів в мішень: 10 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0;\ 0{,}25)$; 5 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}25;\ 0{,}50)$; 3 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}50;\ 0{,}75)$; 2 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}75;\ 1)$.

1. Скласти таблицю розподілу абсолютних та відносних частот.
2. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

14. За даним інтервальним розподілом абсолютних частот побудувати гістограму відносних частот і графік функції розподілу статистичних ймовірностей:

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 8)$	$[8;\ 16)$	$[16;\ 24)$	$[24;\ 32)$	$[32;\ 40)$	$[40;\ 48)$
n_i	10	15	20	25	20	10

13. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай проведено n спостережень, в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп }1}$, $x_{\text{сп }2}$, ..., $x_{\text{сп }n}$, що визначають дискретні розподіли абсолютних частот та відповідних статистичних ймовірностей, подані в таблицях 13.1. та 13.2.

Табл. 13.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 13.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Точку, абсциса якої дорівнює середньому арифметичному спостережених значень:

$$m_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(x_i),$$

називають *центром розсіювання* статистичних ймовірностей. Очевидно, центр розсіювання буде знаходитися якомога ближче до точок, на які припадає основна маса статистичних ймовірностей. Часто m_n^* позначають також через $\bar{x}$.

Важливою характеристикою розподілу статистичних ймовірностей, окрім центра розсіювання, є також величина, що характеризує розсіювання (чи скупченість) статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання. До таких характеристик відносяться *дисперсія* розподілу статистичних ймовірностей, а також *середнє квадратичне відхилення.*

Дисперсією дискретного розподілу статистичних ймовірностей називають число

$$D_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\text{сп}\,i} - m_n^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - m_n^*)^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_n^*)^2 P_n^*(x_i).$$

Середнім квадратичним відхиленням називають число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

Розглянуті характеристики досить важливі при опрацюванні результатів спостережень. Чим менше розсіювання (дисперсія), тим точнішим, вірогіднішим і надійнішим є усереднений результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень.

В фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P_n^*(x_i)$, а дисперсія – це момент інерції цієї одиничної маси відносно центра розсіювання.

Приклад 13.1. Якщо розподіл визначається таблицями 13.3 чи 13.4,

Табл. 13.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 13.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

то

$$m_n^* = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{4}{15} + 6\cdot\frac{5}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}(1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5) = \frac{69}{15} = 4\frac{3}{5},$$

$$D_n^* = \frac{1}{15}\left[\left(1-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 0 + \left(2-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 1 + \left(3-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 3 + \right.$$

$$\left. + \left(4-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 2 + \left(5-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 4 + \left(6-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5\right] \approx 1.7,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx 1.35 .$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розглянемо два розподіли статистичних ймовірностей:

a)

x_i	0	1	2
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

b)

$x_i^{/}$	100	101	102
$P_n^*(x_i^{/})$	0.1	0.8	0.1

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^{/}$ в розподілі *b*) на 100 більше, ніж в розподілі *a*). В розподілі *a*) статистичні ймовірності розподілені на множині із трьох точок x_1=0, x_2=1, x_3=2, що розташовані не далі, ніж на відстані, рівній 1, від точки x=1, а в розподілі *b*) статистичні ймовірності розподілені так само на множині із трьох точок $x_1^{/}$=100, $x_2^{/}$=101, $x_3^{/}$=102, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x^{/}$=101. Точки $\bar{x}$=1 та $\bar{x}^{/}$=101 природно назвати центрами розсіювання статистичних ймовірностей відповідно для розподілів *a*) та *b*). Вони характеризують значення, навколо яких зосереджуються спостережені значення.

Вправа 2. Нехай є два розподіли:

c)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

d)

$x_i^{/}$	-10	0	10
$P_n^*(x_i^{/})$	0.1	0.8	0.1

Очевидно для кожного з цих розподілів $m_n^* = 0$, але в розподілі d) розсіювання частот навколо центра розсіювання $m_n^* = 0$ помітно більше, ніж в розподілі c).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен дискретний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Усі спостережені значення можуть бути натуральними числами.

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей є натуральним числом, коли усі спостережені значення – натуральні числа.

4. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретного розподілу статистичних ймовірностей:

1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.10	0.20	0.40	0.10	0.10	0.07	0.03

2)

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P_n^*(x_i)$	0.02	0.10	0.70	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01	0.01

3)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

4)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.30	0.10	0.08	0.04	0.08	0.10	0.30

5) заданого функцією розподілу:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0.25 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0.75 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для заданих дискретних розподілів статистичних ймовірностей:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4,
3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

4. Для дискретного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень відома відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* та σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для дискретних розподілів, заданих за допомогою функції розподілу:

1)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{15}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{4}{15}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{6}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{10}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

2)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ 0{,}1, & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{коли } 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & \text{коли } 5 < x \le 7, \\ 1, & \text{коли } x > 7. \end{cases}$$

3) функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

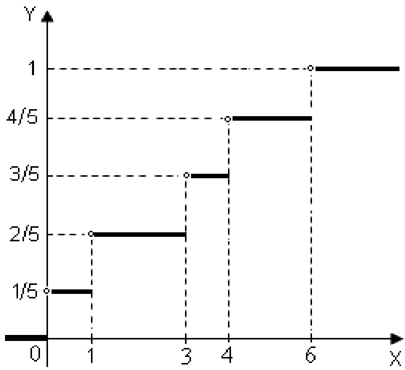


Рис. 13.1

6. Довести, що коли дискретний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 13.2, то

$$D_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_n^*(x_i) - m_n^{*2} .$$

7. Експеримент полягає у підкиданні монети і фіксації числа 0, коли випадає герб, та числа 1, коли випадає цифра. Спостережені значення 0 і 1 мають статистичні ймовірності відповідно p і $q = 1 - p$, де $p \in (0;1)$ – фіксоване число.

1. Знайти m_n^*, D_n^* і σ_n^*.

2. Збільшити спостережені значення на 1, не змінюючи їхні статистичні ймовірності і знову підрахувати m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

8. Експеримент полягає у тому, що з наявних ключів навмання вибирають один, намагаються цим ключем відімкнути двері і підраховують кількість таких спроб. Випробуваний ключ не повертають до набору, з якого вибиратиметься наступний ключ. Статистичні ймовірності вибору будь-якого ключа однакові при будь якій їх кількості (відокремлені ключі не враховуються). Двері відмикає лише один ключ.

1. Вважаючи, що початкова кількість ключів дорівнює 5, знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей згаданих спостережених значень – кількість спроб відімкнути двері.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

9*. Узагальнити попередню задачу на випадок, коли початкова кількість ключів дорівнює r.

14. Деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Центром розсіювання статистичних ймовірностей для неперервного розподілу, що описується щільністю розподілу

$f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x)=0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають точку на осі Ox, абсциса якої дорівнює $m_n^* = \int_a^b x\, f_n^*(x)\, dx$.

Дисперсією неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається щільністю $f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x)=0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають число

$$D_n^* = \int_a^b (x - m_n^*)^2 f_n^*(x)\, dx,$$

а число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$ – називають *середнім квадратичним відхиленням* відповідного неперервного розподілу.

У фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на проміжку $[a;b)$ із щільністю $f_n^*(x)$, а дисперсія – момент інерції цієї маси відносно центра розсіювання.

Приклад 14.1 Для розподілу, що визначається таблицею 14.1:

Табл. 14.1

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04

$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
0	0.02	0.01	0.02	0.01

маємо:

$$m_n^* = 0.05\cdot 0.5 + 0.15\cdot 0.2 + 0.25\cdot 0.1 + 0.35\cdot 0.1 + 0.45\cdot 0.04 +$$
$$+ 0.55\cdot 0 + 0.65\cdot 0.02 + 0.75\cdot 0.01 + 0.85\cdot 0.02 + 0.95\cdot 0.01 \approx 0.18,$$

$$D_n^* \approx (0.05-0.18)^2\cdot 0.50 + (0.15-0.18)^2\cdot 0.20 + (0.25-0.18)^2\cdot 0.10 +$$
$$+ (0.35-0.18)^2\cdot 0.10 + (0.45-0.18)^2\cdot 0.04 + (0.55-0.18)^2\cdot 0.00 +$$
$$+ (0.65-0.18)^2\cdot 0.02 + (0.75-0.18)^2\cdot 0.01 + (0.85-0.18)^2\cdot 0.02 +$$
$$+ (0.95-0.18)^2\cdot 0.01 \approx 0.0375,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0.0375} \approx 0.194.$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Правильна наближена рівність:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \sum_{x_{\text{сп}\,i}\in[a_{i-1},a_i)} x_{\text{сп}\,i} \approx \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\bar{x}_i k_n([a_{i-1},a_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i P_n^*([a_{i-1};a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} x\, f_n^*(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b x\, f_n^*(x)\,dx = m_n^*,$$

де $\bar{x}_i = \frac{1}{h}\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\,dx = \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2h} = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, і це число $\bar{x}_i$ наближено дорівнює середньому арифметичному спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $k_n([a_{i-1},a_i))$ – кількість спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1},a_i)$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен неперервний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Якщо $x_{\text{сп}\,j}$, $j\in\overline{1,\,n}$, – спостережені значення, а $\bar{x}$ – координата центра розсіювання статистичних ймовірностей, то

$$\min_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\,j} \le \bar{x} \le \max_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\,j}.$$

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей завжди є раціональним числом.

4. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, середнє квадратичне відхилення та дисперсію неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1) заданого таблицею:

$[a_{i-1},a_i)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5, 6)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.10	0.70	0.10	0.06	0.03	0.01

2) заданого щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.20 \text{ при } x\in[0,1) \\ 0.50 \text{ при } x\in[1,2) \\ 0.20 \text{ при } x\in[2,3) \\ 0.10 \text{ при } x\in[3,4) \\ 0 \quad \text{ при } x\,\overline{\in}\,[0,4) \end{cases}$$

3) заданого функцією розподілу статистичних ймовірностей:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0.2(x+1) & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ 0.2 + 0.6x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0.8 + 0.2(x-1) & \text{при} \quad 1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення неперервного розподілу статистичних ймовірностей заданих спостереженими значеннями:

1. Ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19,
45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10,
14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Визначаючи вагу 50 новонароджених, дістали такі результати (у кг):

4,3; 4,4; 2,1; 3,5; 2,5; 3,2; 2,3; 4,1; 2,4; 4,0; 3,3; 2,9; 3,2; 3,0; 2,7; 3,4; 2,2;
3,1; 3,5; 3,7; 2,0; 3,0; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,8; 3,2; 2,8; 2,9; 2,3; 2,5; 2,9; 2,6;
3,1; 3,4; 3,2; 3,9; 2,7; 3,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,9; 3,2; 3,3; 3,4; 3,1; 3,6; 3,9.

3. Визначиючи зріст (у см) кожної з 50 першокурсниць, дістали такі результати

169, 171, 157, 173, 170, 156, 172, 159, 168, 158, 160, 164, 161,
165, 162, 166, 163, 167, 160, 168, 165, 160, 166, 161, 167, 162,
168, 163, 169, 160, 164, 165, 163, 166, 162, 167, 161, 168, 160,
164, 168, 162, 167, 163, 166, 165, 162, 160, 166, 165.

4. 7, 3, 7, 5, 6, 5, 7, 8, 3, 4, 5, 7, 7, 6, 7, 3, 4, 2, 7, 8, 3, 3, 7, 6, 5.

5. $\underbrace{1,3,\ldots,1,3}_{5 \text{ пар } 1,3}, \underbrace{1,4,\ldots,1,4}_{10 \text{ пар } 1,4}, \underbrace{4,6,\ldots,4,6}_{3 \text{ пари } 4,6}$, 5, 5, 5, 4.

6. $\underbrace{3,4,\ldots,3,4}_{6 \text{ пар } 3,4}, \underbrace{4,5,\ldots,4,5}_{13 \text{ пар } 4,5}, \underbrace{6,5,\ldots,6,5}_{8 \text{ пар } 6,5}$.

7. $\underbrace{0,1,2,3,4,\ldots,0,1,2,3,4}_{5 \text{ наборів } 0,1,2,3,4}, \underbrace{3,2,1,0,\ldots,3,2,1,0}_{5 \text{ наборів } 3,2,1,0}, \underbrace{1,2,3,\ \ldots,1,2,3,}_{5 \text{ наборів } 1,2,3,}$.

4. Для неперервного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень задана відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* і σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти m_n^*, D_n^* та σ_n^* для неперервних розподілів статистичних ймовірностей, заданих за допомогою функції розподілу статистичних ймовірностей або відповідної щільності розподілу (з’ясувати, яких значень можуть набувати невідомі константи):

1. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le 0,\\ 2x, & \text{коли} \quad 0\le x\le \frac{1}{4},\\ \frac{2}{3}x+C_1, & \text{коли} \quad \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2},\\ C_2 x, & \text{коли} \quad \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4},\\ 1, & \text{коли} \quad x>\frac{3}{4}. \end{cases}$

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x<0 \ \text{або} \ x\ge 1,\\ 1, & \text{коли} \quad 0\le x<\frac{1}{3},\\ C, & \text{коли} \quad \frac{1}{3}\le x<\frac{8}{9},\\ 1, & \text{коли} \quad \frac{8}{9}\le x<1. \end{cases}$

3. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ kx, & \text{коли } 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{коли } x\ge 3. \end{cases}$

4. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ kx+b, & \text{коли } 0<x\le \frac{1}{2},\\ 1, & \text{коли } x>\frac{1}{2}. \end{cases}$

6. Довести, що коли неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано щільністю $f_n^*(x)$, $x\in[a;b]$, то

$$D_n^*=\int_a^b x^2 f_n^*(x)\,dx-m_n^{*2}.$$

7. Експеримент полягає у тому, що з проміжку $[0,1)$ навмання вибирають число і вважають його спостереженим значенням. Виявлено, що статистична ймовірність того, що спостережене значення належить проміжку $[a;b)\subset[0;1)$, дорівнює $b-a$.

1. Довести, що для будь-якого поділу проміжка $[0\,1)$ на n рівних проміжків, щільність розподілу $f_n^*(x)$ має один і той самий аналітичний вираз.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

15. Повторні незалежні випробування

Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) відповідає певному стохастичному експерименту, де P_n^* – статистична ймовірність, визначена за досить великою серією з n випробувань.

Зафіксуємо подію $A \in S$. Розглянемо серію із m незалежних випробувань серед вказаних n випробувань в кожному з яких відбувається або подія A, або подія $\overline{A}$. Можливі наслідки такої серії із m випробувань мають вигляд $(E_1, E_2, ..., E_m)$, де або $E_i = A$, або $E_i = \overline{A}$, причому множина Ω_1^m всіх таких наслідків серії із m випробувань містить 2^m елементів: $\Omega_1^m = \{E = \{E_1, E_2, ..., E_m\} : E_i = A$ або $E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1, m}\}$. Нехай подія A_k, $k \in \overline{1, m}$, полягає в тому, що подія A відбувається в k-му випробуванні, тобто подія A_k відбувається, якщо подія A відбувається в k-му випробуванні, і A_k не відбувається, якщо в k-му випробуванні подія A не відбувається (а відбувається подія $\overline{A}$). При цьому *випробування* називаються *незалежними*, якщо події A_k, $k \in \overline{1, m}$, незалежні в сукупності. Нехай у кожному з m випробувань подія A відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ або не відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Елементарні події, з яких складається подія A_k, мають вигляд $E = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$, де $E_k = A$ (подія A відбувається в k-му випробуванні), а всі інші E_i, $i \in \overline{1, m}$, $i \neq k$, можуть дорівнювати як A, так і $\overline{A}$. Наприклад при $m = 3$

$$A_1 = \{(A,\ A,\ A),\ (A,\ A,\ \overline{A}),\ (A,\ \overline{A},\ A),\ (A,\ \overline{A},\ \overline{A})\},$$

$$A_2 = \{(A,\ A,\ A),\ (\overline{A},\ A,\ A),\ (A,\ A,\ \overline{A}),\ (\overline{A},\ A,\ \overline{A})\},$$

$$A_3 = \{(A,\ A,\ A),\ (A,\ \overline{A},\ A),\ (\overline{A},\ A,\ A),\ (\overline{A},\ \overline{A},\ A)\}$$

Події A_k незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли на просторі

$$\Omega_1^m = \{E = (E_1,\ E_2, ...,\ E_m) : E_i = A \text{ або } E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1,\ m}\}$$

імовірнісна міра визначається рівністю

$$\tilde{P}_m^*(\{E\}) = \tilde{P}_m^*((E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)) = p^s \cdot q^{m-s}, \quad s \in \overline{0, m},\ E \in \Omega_1^m, \quad (15.1)$$

за умови, що серед координат E_k рівно s набувають значення A, а інші $(m - s)$ набувають значення $\overline{A}$.

Отже, на основі статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ і серії повторних незалежних випробувань породжується ймовірнісна міра $\widetilde{P}_m^*(\{E\})$ на просторі Ω_1^m елементарних подій $E=(E_1, E_2, ..., E_m)$, а тому й на будь-якому просторі подій, що є підмножинами Ω_1^m, оскільки $\widetilde{P}_m^*(B)=\sum\limits_{E\in B}\widetilde{P}_m^*(\{E\})$, коли подія $B\subset\Omega_1^m$.

Приклад 15.1. Нехай стохастичний експеримент полягає в підкиданні монети і фіксації її верхньої грані. Тоді можна вважати, що $\Omega=\{Г,Ц\}$, подія A – випадання герба, тобто $A=\{Г\}$, а подія $\overline{A}$ – випадання цифри, тобто $\overline{A}=\{Ц\}$, причому $P_n^*(A)=\overline{P}_n^*(\overline{A})=\frac{1}{2}$. Тому простір Ω_1 у даному випадку можна ототожнювати з простором Ω. Якщо $m=10$, то $\Omega_1^{10}=\{E=(E_1, E_2,..., E_{10}): E_k\in\Omega,\ k\in\overline{1,10}\}$, тобто або $E_k=\{Г\}$, або $E_k=\{Ц\}$ а $\widetilde{P}_{10}^*((E_1, E_2, ..., E_{10}))=(\frac{1}{2})^{10}$ для будь-якої елементарної події $E=(E_1, E_2,..., E_{10})\in\Omega_1^{10}$.

Позначимо через $B_{m,s}$ подію, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів, $s\in\overline{0,m}$. Подія $B_{m,s}$ є об’єднанням (сумою) подій $\{E\}$, де $E=(E_1, E_2, ..., E_m)\in\Omega^m$ – впорядкований набір із m координат E_k, $k\in\overline{1, m}$, серед яких рівно s координат E_k дорівнюють A, а інші $(m-s)$ координат дорівнюють $\overline{A}$. Очевидно, таких наборів є C_m^s. Враховуючи, що доданки в сумі $B_{m,s}$ попарно несумісні, та рівність (15.1), дістанемо

$$\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})=\sum_{E\in B_{m,s}}\widetilde{P}_m(\{E\})=C_m^s p^s q^{m-s},\ \ s\in\overline{0,m}. \qquad (15.2)$$

Формулу (15.2) називають *формулою Бернуллі*.

Розподіл статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, що визначається за формулою (15.2), називають *біноміальним*, оскільки статистичні ймовірності $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$ обчислюються так само, як члени розкладу бінома Ньютона $(p+q)^m$ за степенями p і q:

$$(p+q)^m=\sum_{s=0}^{m}C_m^s p^s q^{m-s}.$$

Зауважимо, що коли $B_{m,s}$, $s=0, 1, ..., m$, розглядати як єдино можливі наслідки серії із m випробувань стосовно кількості появ події A в m випробуваннях, тоді породжується ще один простір елементарних подій (наслідків серії випробувань)

$$\hat{\Omega}_m = \{B_{m,0},\ B_{m,1},\ \ldots,\ B_{m,m}\}$$

з імовірнісною мірою $\hat{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s} = \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, $s = 0, 1, \ldots, m$, визначеною на всіх підмножинах множини $\hat{\Omega}_m$.

При цьому $\hat{P}_m^*(B) = \sum\limits_{B_{m,s} \in B} \hat{P}_m^*(B_{m,s}),\ B \subset \hat{\Omega}_m$.

Зауважимо, що для простору $\hat{\Omega}_m$ події A_k змісту не мають.

Приклад 15.2. Нехай монета підкидається 10 разів, причому за результатами досить великої серії випробувань статистична ймовірність появи герба в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{2}$. Тоді подія $B_{10,5}$ означає, що у 10 підкиданнях монети герб випадав 5 разів. Враховуючи формули (15.2) дістаємо

$$\widetilde{P}_{10}^*(B_{10,5}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} \approx \frac{1}{4}.$$

Теорема. *Статистичні ймовірності* $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ *зростають за змінною* s, *коли* $s \in (0;\ s_0)$ *і спадають за цією змінною, коли* $s \in (s_0;\ m)$, *де* $s_0 = [(m+1)p]$. *Тому* $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ *є найбільшою статистичною ймовірністю, коли* $(m+1)p$ *не є цілим числом, а коли число* $(m+1)p$ *– ціле, то* $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ *– дві найбільші статистичні ймовірності. При цьому*

$$(m+1)p - 1 < s_0 \le (m+1)p, \text{ звідки } p + \frac{p-1}{m} < \frac{s_0}{m} \le p + \frac{p}{m}.$$

Останнє означає, що при *досить великих* m *найчастіше число появ події* A *в серії із* m *незалежних випробувань виявляється рівним* s_0 *і таким, що із збільшенням* m *число* $\frac{s_0}{m}$ *стає як завгодно близьким до статистичної ймовірності* $P_n^*(A) = p$.

Приклад 15.3. Якщо $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$ і $m = 10$, то ряд розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$ має вигляд:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Многокутник цього розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$, $s \in \overline{0, 10}$, подано на Рис. 15.1. При цьому

$$s_0 = [(m+1)p] = \left[\frac{11}{2}\right] = \left[5\frac{1}{2}\right] = 5\,.$$

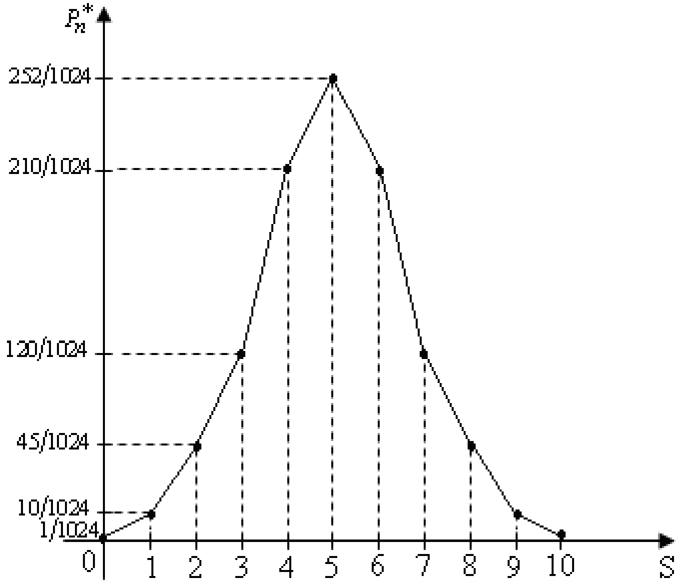


Рис. 15.1

Отже, $\hat{P}_{10}^*(B_{10,5})$ – єдина найбільша статистична ймовірність за змінною $s \in \overline{0,\,10}$. При цьому $\frac{s_0}{m} = \frac{5}{10} = P_n^*(A) = \frac{1}{2}$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Враховуючи, що події $B_{m,s}$ попарно несумісні і в m випробовуваннях принаймні одна з них обов'язково відбувається, дістаємо:

$$\tilde{P}_m^*\left(\sum_{s=0}^{m} B_{m,s}\right) = \sum_{s=0}^{m} \tilde{P}_m^*(B_{m,s}) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s p^s q^{m-s} = (p+q)^m = 1\,.$$

Вправа 2. Щоб знайти найбільшу за змінною $s \in \overline{0,m}$ статистичну ймовірність $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$, розглянемо відношення:

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s-1})} = \frac{C_m^s p^s q^{m-s}}{C_m^{s-1} p^{s-1} q^{m-(s-1)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{m(m-1)\,\ldots(m-(s-1))}{1\cdot 2\,\ldots s}}{\dfrac{m(m-1)\,\ldots(m-(s-2))}{1\cdot 2\,\ldots\,(s-1)}} \cdot \frac{p^s q^{m-s}}{p^{s-1} q^{m-(s-1)}} = \frac{m-s+1}{s} \cdot \frac{p}{q} < 1,$$

звідки $mp + p - sp < sq$ або $mp + p < s(p+q)$, тобто $s > (m+1)p$.

Отже,

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s > (m+1)p.$$

Аналогічно дістаємо, що

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } 1 \le s < (m+1)p.$$

Таким чином, якщо число $(m+1)p$ не є цілим і $s_0 = [(m+1)p]$ – найбільше ціле число, що не перевищує $(m+1)p$, то $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ є єдиною найбільшою статистичною ймовірністю, а число появ події A в серії із m незалежних випробувань, яке зустрічається найчастіше, близьке до $mP_n^*(A) = mp$.

У випадку, коли число $(m+1)p = s_0$ є цілим, дістаємо

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s \ge s_0,$$

а

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s < s_0, \text{ тобто } s \le s_0 - 1.$$

При цьому

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})} = \frac{m - s_0 + 1}{s_0} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1) - (m+1)p}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1)\cdot(1-p)}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$

тобто $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ – дві найбільші статистичні ймовірності.

Вправа 3. *Задача про перехід вулиці*. Статистична ймовірність наявності перед переходом будь-якої секунди машини, що рухається, дорівнює p. Пішоход може перейти вулицю, коли протягом трьох секунд перед ним не буде машини. Знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекав: 1) 0 секунд; 2) 2 секунди.

Нехай подія A_k – наявність машини перед пішоходом у k-у секунду, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $\overline{A}_k$ – відсутність машини перед пішоходом у k-у секунду. Позначимо

$$P_n^*(A_k) = p, \; P_n^*(\overline{A}_k) = 1 - p.$$

Вважаємо, що події A_k незалежні. Тоді пішохід чекатиме переходу 0 секунд, коли виконується подія $B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, статистична ймовірність якої

$$P_n^*(B_0) = P_n^*(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P_n^*(\overline{A}_1)\cdot P_n^*(\overline{A}_2)\cdot P_n^*(\overline{A}_3) = (1-p)^3.$$

Пішохід чекатиме переходу 2 секунди, коли виконується подія

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5,$$

для якої

$$P_n^*(B_2) = P_n^*(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) + P_n^*(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) =$$
$$= p^2(1-p)^3 + p(1-p)^4 = p(1-p)^3.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Повторні випробування пов'язані з довільною серією з m випробувань.
2. Повторні випробування пов'язані з одним і тим самим випадковим експериментом.
3. Подія $B_{m,s}$ пов'язана з кількістю появ події A у даній серії з m випробувань і ця подія не залежить від m.
4. Незалежність випробувань означає незмінність умов проведення цих випробувань, тобто незмінність відповідного ймовірнісного простору.
5. Декартів добуток $A \times B$ існує для будь-яких множин A і B.
6. Якщо $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B = B \times A$.
7. Якщо $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m містить 2^m елементів.
8. Сума усіх статистичних ймовірностей $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ не залежить від m.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з m незалежних випробувань подія A відбувається принаймні один раз, якщо статистична ймовірність відбування цієї події у кожному випробуванні дорівнює $p = P_n^*(A) > 0$.

3. 1. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з $m = 9$ підкидань монети герб випадає: 1) 5 разів; 2) 4 рази, вважаючи, що при кожному підкиданні $P_n^*(\{\Gamma\}) = \dfrac{1}{2}$.

2. Порівняти ці статистичні ймовірності.

3. Побудувати ряд та многокутник розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_9^*(B_{9,s})$, $s \in \overline{0,\ 9}$.

4. Розв'язатити завдання 1-3 за умови, що довжина серії $m = 20$.

4. Довести, що коли $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m – декартів m-й степінь простору Ω_1 містить 2^m елементів.

5. Виписати всі елементарні події $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ простору $\Omega = \Omega_1^4$, де $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, а також всі елементарні події $E \in \Omega = \Omega_1^4$, що визначають відповідно події A_1, A_2, A_3, A_4 в серії з 4-х незалежних випробувань, а також події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ та добутки подій $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$, $A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$, $A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4$, $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4$.

6. Нехай подія A_k означає відбування події A (із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p > 0$) у k-му випробуванні серед серії з m незалежних випробувань. Знайти:

1) елементарні події, з яких складається подія A_k;

2) елементарні події, з яких складається подія $\overline{A}_k$;

3) елементарні події, з яких складається подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$;

4) елементарні події, з яких складається подія $B_{m,s}$;

5) зв'язок події $B_{m,s}$, яка полягає у відбуванні події A s разів у серії з m незалежних випробувань, з подіями A_k та $\overline{A}_k$;

6) статистичну ймовірність $\widetilde{P}_m^*(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)$;

7) статистичну ймовірність $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$.

7. Нехай $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, $\Omega = \Omega_1^m$ – декартів m-ий степінь простору Ω_1, а подія A_k – відбування події A у k-му випробуванні. Довести, що подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ відрізняється від простору Ω лише однією елементарною подією. Знайти цю елементарну подію.

8. Задача де Мере. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні грального кубика 4 рази принаймні один раз випадає 6 очок. Вважати, що при кожному підкиданні $P_n^*\{"6"\} = \dfrac{1}{6}$.

9. Задача Паскаля та Ферма. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків 24 рази принаймні один раз випадає пара шісток. Вважати, що $P_n^*(6,6) = \dfrac{1}{36}$, при кожному підкиданні. Порівняти знайдену статистичну ймовірність з результатом попередньої задачі.

10. Нехай $P_n^*(A) = \dfrac{1}{2}$, $m = 10$ і ряд розподілу статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s}) = p_s$, $s \in \overline{0,\,10}$ має вигляд

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_s	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Знайти: 1) $\widetilde{P}_m^*\left(\left|\dfrac{s}{10} - \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}4\right)$ і 2) $\widetilde{P}_m^*\left(\left|\dfrac{s}{10} - \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}1\right)$.

11. Екзаменаційний тест містить 10 завдань, до кожного з яких дано 5 відповідей, лише одна з яких правильна. За допомогою контролюючого засобу оцінюється відповідь учня кількістю балів $i \in \overline{0{,}10}$, що дорівнює кількості правильних відповідей. Учень не готувався до екзамену і вирішив вибирати номери відповідей навмання (при цьому статистична ймовірність кожної правильної відповіді дорівнює $\frac{1}{5}$).

1. Знайти статистичну ймовірність того, що учень дістає оцінку "i", $i \in \overline{0,10}$.

2. Яка оцінка за заданих умов зустрічається найчастіше?

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка лежить в межах від 1 до 3, включаючи ці числа.

12. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є "лівшою", дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 200 людей є принаймні 4 "лівші".

2. Яка кількість лівшів з'являється найчастіше серед 200 людей?

3. Що можна сказати про полігон відносних частот для кількості лівшів серед 200 людей?

13. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює $\frac{1}{5}$ при кожному пострілі.

1. Знайти статистичну ймовірність влучення у мішень двічі при 10 пострілах.

2. Яка кількість влучень у мішень зустрічається найчастіше при: 1) 10 пострілах; 2) 100 пострілах?

3. Знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей кількостей влучень у мішень при 10 пострілах та: 1) побудувати ряд розподілу та полігон відносних частот; 2) знайти відповідну функцію розподілу статистичних ймовірностей; 3) обчислити m_{10}^*, D_{10}^* та σ_{10}^*.

14*. Узагальнити задачу **13** на випадок m пострілів.

15. Нехай статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина народилася у певному місяці, однакова для всіх місяців. Знайти статичну ймовірність того, що:

1) дні народження шістьох випадково зустрінутих людей припадають на один місяць року;

2) серед шістьох випадково зустрінутих людей дні народження трьох припадають на один місяць року;

3) серед шістьох випадково зустрінутих людей кількість таких, дні народження яких припадають на січень місяць, дорівнює i, $i \in \overline{0,6}$.

16. Одну й ту саму сторінку книги друкували багато разів. Статистична ймовірність того, що на даній сторінці книги є друкарська помилка, дорівнює 1/500.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що на десяти копіях сторінки книги не менше трьох друкарських помилок.

2. Яка кількість помилок на десяти копіях сторінки зустрічається найчастіше?

17. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є дальтоніком, дорівнює 0,01. Якою повинна бути кількість n людей, щоб із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 можна було стверджувати, що серед n людей є принаймні один дальтонік?

18. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,51. Яка статистична ймовірність того, що в серії з 5 пострілів: 1) три влучення; 2) не більше трьох влучень; 3) не більше двох промахів.

19. Статистична ймовірність того, що відвідувач автомагазину зробить покупку, дорівнює 0,2. Знайти статистичну ймовірність того, що з п'ятьох відвідувачів магазину: 1) лише один зробить покупку; 2) хоча б один зробить покупку; 3) жоден не зробить покупку; 4) усі зроблять покупку.

20. За даними технічного контролю 90% виготовлених виробів є якісними. Знайти статистичну ймовірність того, що в партії із 100 виробів буде: 1) 10 бракованих; 2) не менше 5, але менше 10 бракованих; 3) не менше 80 виробів якісні.

21. За умови задачі про перехід вулиці (див. вправу 2) знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекатиме рівно: 1) 1 секунду; 2) 3 секунди; 3) 4 секунди.

22. На аукціонах продаються за початковою вартістю у середньому 20% виставлених пакетів акцій.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що з 9 виставлених пакетів акцій було продано за початковою вартістю: 1) i пакетів, $i \in \overline{0,9}$; 2) не менше 2-х пакетів; 3) не більше 3-х пакетів; 4) принаймні 1 пакет акцій.
2. Знайти кількість пакетів акцій, проданих за початковою вартістю, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність такої події.

23. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана деталь є бракованою, дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 1000 деталей: 1) принаймні одна бракована; 2) три бракованих; 3) не більше трьох бракованих.
2. Знайти кількість бракованих деталей серед 1000, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що було саме стільки бракованих деталей.

24. Статистична ймовірність того, що пакет акцій, придбаний на ринку цінних паперів, принесе прибуток, дорівнює 0,5.

1. Знайти статистичні ймовірності того, що з 5 придбаних пакетів акцій прибуток приносили: 1) i пакетів, $i \in \overline{0,5}$; 2) принаймні один пакет; 3) не менше трьох пакетів.
2. Нехай придбано 5 пакетів акцій. Знайти кількість прибуткових пакетів акцій, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що така кількість пакетів приносила прибуток.

3. Визначити, при якій кількості куплених пакетів акцій із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 отримували прибуток принаймні від одного пакету акцій.

25. Відомо, що 80% працівників фірми мають вищу освіту.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що зі 10 навмання вибраних працівників вищу освіту мають: 1) i працівників, $i \in \overline{0,10}$; 2) принаймні 9 працівників; 3) не більше 9 працівників.

2. Знайти кількість працівників з вищою освітою, що зустрічається найчастіше серед 10 працівників, та обчислити статистичну ймовірність такої кількості працівників.

26. Статистична ймовірність того, що людина в період страхування буде травмованою дорівнює 0,006. Застраховано 1000 людей, кожна з яких зробила страховий внесок у 150 грн. У випадку травми застрахована людина отримує 12000 грн. Знайти статистичну ймовірність кількості страхових виплат, що зустрічаюєся найчастіше на 1000 застрахованих, та відповідну суму виплат.

27. Статистична ймовірність фальшивості купюри номіналом 200 грн дорівнює 0,0001. Через касу за день проходить біля 20000 купюр номіналом 200 грн.

1. Знайти кількість фальшивих купюр, що зустрічається найчастіше.

2. Якою є статистична ймовірність такої кількості фальшивих купюр?

3. За скільки днів виправдає себе приклад для виявлення фальшивих купюр, якщо він коштує 500 грн. і кожного дня знаходить згадану вище найбільш можливу кількість фальшивих купюр?

16. Поняття випадкової величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*). Дійсну функцію $X(E), E \in \Omega$ називають *випадковою величиною*, якщо для будь-якого $G \in S_X$ прообраз

$$X^{-1}(G) = \{E : E \in \Omega, X(E) \in G\} \in S,$$

тобто є подією, де $\Omega_X = X(\Omega) = \{x : x = X(E), E \in \Omega\}$ множина значень функції X (Ω_X – образ множини Ω при відображенні $\Omega \xrightarrow{X} \Omega_X$), S_X – сукупність підмножин множини Ω_X, що задовільняє вимоги 1_s–3_s до простору подій (див. 1.4 або 1.6).

Таку функцію $X = X(E)$, $E \in \Omega$, називають також S / S_X -*вимірною функцією* і покладають $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$ для кожного $G \in S_X$. При цьому говорять, що *ймовірнісний простір* $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ *породжується* (*генерується*) *випадковою величиною* X з ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Приклад 16.1. Нехай

$$\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\},\ H_1 = \{"1","2","3","4"\},$$

$$H_2 = \{"5"\},\ H_3 = \{"6"\},\ P_n^*(H_1) = 0.10,$$

$$P_n^*(H_2) = 0.30,\ P_n^*(H_3) = 0.60,$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}.$$

Тоді $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ – ймовірнісний простір. Нехай на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задана функція $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","2","3","4"\}$; $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"5"\}$; $X(E) = 3$, якщо $E \in \{"6"\}$.

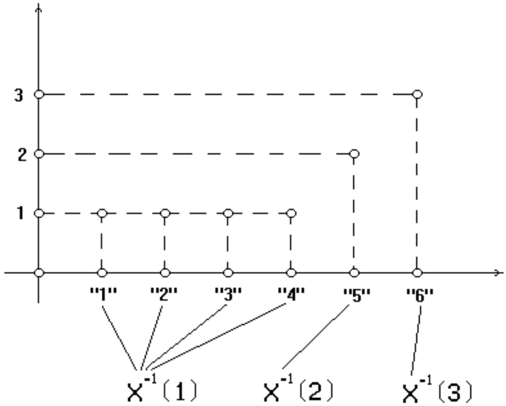


Рис. 16.1

Якщо елементарні події "1", "2", "3", "4", "5", "6" подати як точки на числовій осі Ox, то графічно зазначену залежність можна подати так, як показано на Рис. 16.1.

Таким чином $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$:

$$S_X = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

Очевидно, ця сукупність S_X задовольняє вимоги 1_s-3_s до простору подій.

Оскільки одне і те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і "1", і "2", і "3", і "4", прообразом точки 1 є множина $X^{-1}(\{1\}) = H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$. Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція $X(E)$ набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину $H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$, тобто дорівнює 0.10 (бо значення 1 функція $X(E)$ набуває тоді, коли на верхній грані кубика випадає одна з цифр "1", або "2", або "3", або "4").

Аналогічно прообразом точки 2 є одноелементна множина $X^{-1}(\{2\}) = H_2 = \{"5"\} \in S$, тому статистична ймовірність того, що $X(E)$ набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "5" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.30. Прообразом точки 3 є одноелементна множина $X^{-1}(\{3\}) = H_3 = \{"6"\} \in S$, а тому статистична ймовірність того, що функція $X(E)$ набуває значення 3, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "6" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.60.

Тепер легко знайти статистичні ймовірності попадання значень $X(E)$ у різні підмножини G множини $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$, $G \in S_X$. Очевидно, статистична ймовірність попадання значень $X(E)$:

– в підмножину $\{1,2\} \in S_X$ така сама, як статистична ймовірність попадання елементарних подій E в підмножину

$$X^{-1}(\{1,2\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} = \{"1","2","3","4","5"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.40;

– в підмножину $\{1,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"6"\} = \{"1","2","3","4","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.70;

– в підмножину $\{2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{2,3\}) = X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"5"\} \cup \{"6"\} = \{"5","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.90;

– в підмножину $\{1,2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,\ 2,\ 3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} \cup \{"6"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega \in S,$$

тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $G \in S_X$ належать до простору подій S, тобто $X^{-1}(G) \in S$, коли $G \in S_X$, а тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною, тобто випадковою величиною.

При заданій дійсній функції $X(E)$ на просторі елементарних подій Ω часто як $X(\Omega)$ розглядають простір $R^1 = (-\infty, \infty)$, покладаючи при цьому $X^{-1}(x) = \varnothing$, якщо значення (точка) $x \in R^1$ не поставлене у відповідність жодній елементарній події $E \in \Omega$.

При цьому як сукупність S_X підмножин простору $R^1 = (-\infty, \infty)$ розглядають сукупність, породжену числовими проміжками та їх скінченними сумами (див. 1.4, вправа 2).

В такому разі дійсну функцію $X(E) \in R^1$, $E \in \Omega$, таку, що $X^{-1}((-\infty, x)) \in S$ для довільного $x \in R^1$, називають S-*вимірною функцією* або *випадковою величиною*. При цьому насправді мається на увазі S/S_X вимірна функція, хоч сукупність S_X явно і не вказується.

Надалі, якщо не сказано іншого, під випадковою величиною розумітимемо S-вимірну функцію.

Зауважимо, що коли простір подій S містить всі підмножини множини Ω, то тоді будь-яка дійсна функція, задана на Ω, буде S-вимірною, тобто випадковою величиною.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ той самий, що і в прикладі 16.1, а на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задано функцію $X(E)$ наступним чином: $X(E)=1$, якщо $E \in \{"1","3","5"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає непарна цифра, і $X(E)=2$, якщо $E \in \{"2","4","6"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає парна цифра (Рис. 16.2).

В цьому випадку $\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 2\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин G множини $X(\Omega) = \{1,2\}$: $S_X = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$.

Оскільки $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\} \overline{\in} S$, так само, як і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\} \overline{\in} S$, то в даному прикладі функція $X(E)$, задана на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, не є S/S_X-вимірною, тобто не є випадковою величиною. Для так заданої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, на заданому ймовірнісному просторі $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту) $P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(X^{-1}(\{1\})) = P_n^*(\{"1","3","5"\})$ чи $P_{nX}^*(\{2\}) = P_n^*(X^{-1}(\{2\})) = P_n^*(\{"2","4","6"\})$, бо множини $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\}$ і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\}$ виявляються невимірними відносно заданої ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$.

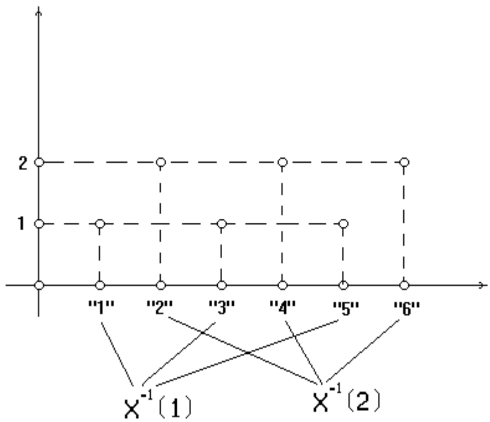


Рис. 16.2

Якщо ж задати таку сукупність S_{1X} підмножин G множини $X(\Omega)$: $S_{1X} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$, тоді розглянута функція $X(E)$, $E \in \Omega$, виявляється S/S_{1X} вимірною, а значить випадковою величиною, бо $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in S$, $X^{-1}(\{1,2\}) = \Omega \in S$ і

$$P_{nX}^{*}(\varnothing) = P_n^{*}(X^{-1}(\varnothing)) = P_n^{*}(\varnothing) = 0,$$

$$P_{nX}^{*}(\{1,2\}) = P_n^{*}(X^{-1}(\{1,2\})) = P_n^{*}(\Omega) = 1.$$

Вправа 2. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною функцією, то для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією.
2. Твердження 1 є правильним, коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною функцією.
3. Якщо для кожного значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією, то $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.
4. Твердження 3 є правильним, коли множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, не більше ніж зчисленна функція.
5. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною функцією для деякого простору подій S_X, то ця функція є й S-вимірною.
6. Твердження, обернене до 5, є правильним.
7. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$ – S-вимірна функція і Ω_X – скінченна або зчисленна множина , то $X(E)$ – S/S_X-вимірна функція для будь якого простору S_X.

1. Вправа 1 показує, що твердження 1 не є правильним.
2. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною, то тоді для кожного проміжку $[a;b)$ множина $X^{-1}([a;b)) \in S$, тобто є подією. Тому для будь-якого значення x_0 маємо

$$(X = x_0) = X^{-1}\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x_0 \le X < x_0 + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}([x_0; x_0 + \frac{1}{n})) \in S,$$

тобто є подією як переріз подій.

Отже, твердження 2 є правильним.

3. Нехай $A \subset (0;1)$ і A – не має довжини, тобто не є вимірною за Лебегом; $X(E) = 1 + E$, коли $E \in [0;1] \setminus A$, і $X(E) = 1 - E$, коли $E \in A$. Тому $(X < 1) = X^{-1}((-\infty;1)) = \{E \in [0;1] : X(E) < 1\} = A \notin S$, якщо S – сукупність підмножин відрізка $\Omega = [0;1]$, що мають довжину (вимірних за Лебегом).

Це означає, що $X(E)$ не є випадковою величиною (S-вимірною функцією). Разом з тим для кожного значення x_0 маємо два випадки:

а) $x_0 \ge 1$ і тоді $X(E) = 1 + E = x_0 \Leftrightarrow E = x_0 - 1$, або

б) $x_0 < 1$ і тоді $X(E) = 1 - E = x_0 \Leftrightarrow E = 1 - x_0$.

У будь-якому випадку $X^{-1}(x_0)$ складається з однієї точки, а тому має нульову довжину, тобто $P(X^{-1}(x_0)) = 0 \ \forall x_0 \in \Omega_X$.

Отже, твердження 3 не є правильним.

4. Якщо $\Omega_X = \{x_1, x_2, ...\}$ – не більш ніж зчисленна множина і для кожної точки x_k множина $X^{-1}(x_k)$ є подією, то для будь-якої множини $B \in S_X$ її прообраз $X^{-1}(B)$ можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зчисленної кількості подій:

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{x_k \in B} X^{-1}(x_k),\ X^{-1}(x_k) \in S .$$

Тому $X^{-1}(B) \in S$ і $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, тобто твердження 4 є правильним.

5. Твердження 5 не є правильним в силу того, що твердження 1 не є правильним, а твердження 2 є правильним.

6. Твердження 6 є правильним, оскільки S_X може бути простором, породженим сукупністю проміжків $[a; b)$.

7. Твердження 7 є правильним в силу того, що правильні твердження 2 і 4.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожна елементарна подія $E \in \Omega$ має єдиний образ.

2. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожне число $x \in R$ має прообраз $X^{-1}(x)$, що містить лише один елемент.

3. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega = [a; b]$, є зростаючою, то прообраз $X^{-1}(x)$ містить лише один елемент для кожного $x \in X([a; b])$.

4. Якщо функція $X(E)$ визначена на просторі Ω елементарних подій, то вона є випадковою величиною.

5. Твердження, обернене до 4, є правильними.

6. Дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною або випадковою величиною, коли множина розв'язків нерівності $X(E) < x$, тобто $X^{-1}((-\infty, x))$, є подією з простору S для будь-якого числа x.

7. Якщо простір подій S не є найширшим простором для даного простору Ω елементарних подій, то існує функція $X(E)$, $E \in \Omega$, що не є випадковою величиною.

2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, такі що: 1) $X(E)$ є випадковою величиною; 2) $X(E)$ не є випадковою величиною.

3. Нехай задано дискретний розподіл статистичних ймовірностей: $P_n^*(x_i)$, $i \in \overline{1, k}$, причому кожна елементарна подія $E = x_i$ визначає певну подію $\{E\} = \{x_i\} \in S$.

1. Довести, що $Y(E)=P_n^*(E)$, $E\in\Omega=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k\}$, є випадковою величиною.

2. Чи буде $Y(E)=P_n^*(E)$ випадковою величиною, коли множина $\{x_i\}$ не є подією для деякого $i\in\overline{1,\ k}$?

4. Нехай задано неперервний розподіл статистичних ймовірностей з щільністю розподілу $f_n^*(x),\ x\in R$. Чи є $f_n^*(x)$ випадковою величиною?

5. Чи є випадковою величиною функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей?

6. Навести приклади дискретних та неперервних просторів Ω елементарних подій, відповідних ймовірнісних просторів і функцій $X(E)$, $E\in\Omega$, таких, що є випадковими величинами, і таких, що не є випадковими величинами.

7. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є таким, що простір подій S є найширшим з можливих. Довести, що будь-яка функція $X(E),\ E\in\Omega$, є випадковою величиною.

8. Нехай у ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) простір подій S не є найширшим з можливих. Довести, що існує функція $X(E),\ E\in\Omega$, така, що не є випадковою величиною.

У задачах **9-16** вважається, що ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є заданим.

9. Нехай $A\subset\Omega$, а

$$X(E)=\begin{cases} 1, \text{ коли } E\in A, \\ -1, \text{ коли } E\notin A. \end{cases}.$$

Визначити, коли функція $X(E), E\in\Omega$: 1) є випадковою величиною; 2) не є випадковою величиною; 3) обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

10. Функція $X(E)=E^2,\ E\in R$, причому кожен проміжок $<\alpha;\beta>$ є подією.

1. Чи є дана функція випадковою величиною?
2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

11*. 1. Довести, що кожна неперервна функція $Y=f(x)$, задана на проміжку $(a;b)=\Omega$, є випадковою величиною (S-вимірною функцією), коли кожний проміжок є подією.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини Y.

12. Нехай $\Omega=\{Г, Ц\}$ – простір елементарних подій. Визначити, коли функція $X(E)$, $E\in\Omega$: 1) буде випадковою величиною; 2) не буде випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

13. Нехай статистична ймовірність того, що при пострілі з лука відбувається влучення, дорівнює $\frac{1}{2}$, а X – кількість влучень при трьох пострілах.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

14. Статистична ймовірність того, що автомат для розміну монет спрацьовує при опусканні монети номіналом 1 грн., дорівнює 0,97. Нехай X – кількість монет, опущених конкретною людиною в автомат до його першого спрацювання.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

15. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, (S-вимірною функцією), то для кожного її значення x_0 множина $(X = x_0) = \{E \in \Omega : X(E) = x_0\} = X^{-1}(x_0)$ є подією, а тому можна обчислити відповідну статистичну ймовірність $P_n^*(X = x_0) = P(X^{-1}(x_0))$.

16*. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega$, має не більш ніж зчисленну множину значень. Довести, що вона є випадковою величиною (S-вимірною функцією) тоді й тільки тоді, коли для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0) = \{E : X(E) = x_0\} = (X = x_0)$ є подією.

17. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$, – кількість відбувань події $A \subset \Omega_1$ у m незалежних випробуваннях.

1. Яких значень набуває ця функція?

2. Яким повинен бути ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, S_m, \tilde{P}_m^*)$, щоб ця функція була випадковою величиною?

3. Для кожного значення x_0 даної функції знайти подію $X^{-1}(x_0)$ та статистичну ймовірність цієї події $\tilde{P}_m^*(X^{-1}(x_0))$.

4. Чи можна змінити простір подій S_m або ймовірнісну міру $\tilde{P}_m^*$ так, щоб функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$ вже не була випадковою величиною?

17. Прості випадкові величини

Випадкову величину (S-вимірну функцію) $X = X(E)$, $E \in \Omega$ називають *простою*, якщо множина значень цієї величини скінченна, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $m \in N$, де числа x_k попарно різні.

Прості випадкові величини надзвичайно важливі, оскільки за їх допомогою можна досліджувати й випадкові величини з нескінченною множиною значень.

Приклади простих випадкових величин

1. Якщо функція $X(E) = c = const$, $E \in \Omega$, то її називають *сталою випадковою величиною*. Множина значень сталої випадкової величини складається з одного елемента c, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{c\}$. При цьому $X^{-1}(c) = \Omega$.

2. Якщо A – випадкова подія і

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A, \\ 0, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$$

то цю випадкову величину називають *індикатором події* A. Множина значень цієї простої випадкової величини складається з двох елементів 1 і 0, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{0,1\}$, при цьому S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $X^{-1}(0) = \overline{A}$, $X^{-1}(1) = A$.

3. Якщо X – кількість очок на грані грального кубика, якою кубик падає догори після однократного підкидання, то X – проста випадкова величина з можливими значеннями 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{1,2,3,4,5,6\}$. При цьому $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, $X("k") = k$, $k \in \overline{1,6}$, кожна множина $\{"k"\}$, $k \in \overline{1,6}$, є подією, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

4. Кількість $k = k_m(A)$ відбувань події A в серії із m випробувань – проста випадкова величина, що може набувати значень 0, 1, 2, …, $m-1$, m. При цьому $\Omega_X = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

$$\Omega = \Omega_1^m = \{(E_1, E_2, \ldots, E_n\} : E_k = A \text{ або } \overline{A}, k \in \overline{1,m}\},$$

$X((E_1, E_2, \ldots, E_m)) = k_m$ – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх $E_i, i \in \overline{1,m}$, і кожна множина $\{E\} \subset \Omega_1^m$ є подією з імовірнісною мірою $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}$, $k \in \overline{0,m}$, де k – кількість координат E_k, що дорівнюють A. Тому

$$\tilde{P}_m^*(X^{-1}(k)) = C_m^k (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}, \ k = \overline{0,m}.$$

5. Статистична ймовірність $P_m^*(A)$ події A, визначена за результатами серії із m випробувань – проста випадкова величина $X(E)$, що може набувати значень $\frac{0}{m}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, …, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m}{m}$. При цьому $\Omega = \Omega_1^m$ і $\tilde{P}_m^*$ такі, як і у прикладі 4, а $X(E) = X((E_1, E_2, \ldots, E_m)) = \frac{k}{m}$, де k – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх $E_i, i \in \overline{1,m}$.

Спостережене значення випадкової величини $P_m^*(A)$ позначатимемо $P_{m\ cn}^*(A)$.

Якщо $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини, то їх сума* $Z(E) = X(E) + Y(E)$, *різниця* $Z(E) = X(E) - Y(E)$, *добуток* $Z(E) = X(E) \cdot Y(E)$, *частка* $Z(E) = X(E) / Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини. Сума і добуток довільної скінченної кількості простих випадкових величин* $X = X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in \overline{1,m}$, *також є простою випадковою величиною*.

Узагальненням цього є твердження про те, що *коли* $X_k = X_k(E)$ – *прості випадкові величини для* $k \in \overline{1,m}$, *то будь-яка дійсна функція* $Y = f(X_1(E), X_2(E), ..., X_m(E))$, $E \in \Omega$, *також є простою випадковою величиною за умови, що* $(X_1(E), ..., X_m(E))$ *належить області визначення* $D(f)$ *функції* f *для кожного* $E \in \Omega$. *Зокрема, якщо* $X = X(E)$ – *проста випадкова величина, то* $Y = X^m(E)$, $Y = \sqrt[m]{X}$ (*для парного* m $X(E)$ *повинна бути невід'ємною*), $Y = e^{X(E)}$, $Y = \ln X(E)$ (*коли* $X(E) > 0$ *для* $E \in \Omega$), $Y = \sin X(E)$, $Y = |X| = \sqrt{X^2}$, $Y = \cos X(E)$ *тощо також є простими випадковими величинами*.

Прості випадкові величини X та Y називають *незалежними відносно міри* P_{nX}^*, коли для будь-яких чисел $a \in X(\Omega)$ та $b \in Y(\Omega)$ події $X^{-1}(a)$ та $Y^{-1}(b)$ є незалежними відносно міри P_n^* з відповідного ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), тобто $P_n^*(X^{-1}(a) \cap Y^{-1}(b)) = P_n^*(X^{-1}(a)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(b))$. В іншому разі X та Y називають *залежними випадковими величинами.*

Залежність чи незалежність випадкових величин суттєво визначається статистичною ймовірністю (*ймовірнісною мірою*) P_n^*.

Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_m$ називаються *попарно незалежними*, коли будь-які дві з них є незалежними.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $\Omega = [0;1)$, X – індикатор події $A = [0; 0{,}5) \subset \Omega = [0;1)$, Y – індикатор події $B = [0{,}25; 1)$.

Тоді $X^{-1}(1) = A = [0; 0{,}5)$, $X^{-1}(0) = \overline{A} = [0{,}5; 1)$;

$$Y^{-1}(1) = B = [0{,}25; 1),\ Y^{-1}(0) = \overline{B} = [0; 0{,}25).$$

Якщо $Z(E) = X(E) + Y(E)$, то

а) $Z(E) = 2$, коли $E \in X^{-1}(1)$ і $E \in Y^{-1}(1)$ тобто

$$Z^{-1}(2) = X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(1) = [0; 0{,}5) \cap [0{,}25; 1) = [0{,}25; 0{,}5).$$

б) $Z(E)=1$, коли $E \in X^{-1}(1) \bigcap Y^{-1}(0)$ або $E \in X^{-1}(0) \bigcap Y^{-1}(1)$, тобто

$$Z^{-1}(1) = (X^{-1}(1) \bigcap Y^{-1}(0)) \bigcup (X^{-1}(0) \bigcap Y^{-1}(1)) =$$
$$= ([0; 0{,}5) \bigcap [0; 0{,}25)) \bigcup ([0{,}5; 1) \bigcap [0{,}25; 1)) = [0; 0{,}25) \bigcup [0{,}5; 1).$$

в) $Z(E)=0$, коли $E \in X^{-1}(0)$ і $E \in Y^{-1}(0)$, тобто

$$Z^{-1}(0) = X^{-1}(0) \bigcap Y^{-1}(0) = [0{,}5; 1) \bigcap [0; 0{,}25) = \varnothing.$$

Таким чином,

$$Z(E) = X(E) + Y(E) = \begin{cases} 2, & \text{коли } E \in [0{,}25; 0{,}5), \\ 1, & \text{коли } E \in [0; 0{,}25) \bigcup [0{,}5; 1). \end{cases}$$

Вправа 2. 1. Нехай X та Y із вправи 1.

Якщо $P_n^*([a,b)) = b-a,\ [a,b) \subset [0,1),$ то

$$P_n^*(X^{-1}(1) \bigcap Y^{-1}(1)) = 0{,}5 - 0{,}25 \neq P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}375.$$

Це означає, що випадкові величини X та Y відносно такої міри P_n^* залежні.

2. Нехай P_n^* визначена так, що $P_n^*([0{,}25; 0{,}5)) = 1$. Тоді і

$$P_n^*([0; 0{,}5)) = P_n^*([0{,}25; 1)) = 1,\ P_n^*([0; 0{,}25)) = P_n^*([0{,}5; 1)) = 0.$$
$$P_n^*(X^{-1}(1) \bigcap Y^{-1}(1)) = 1 = P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 1 \cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(1) \bigcap Y^{-1}(0)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(0)) = 1 \cdot 0,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0) \bigcap Y^{-1}(1)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(0)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 0 \cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0) \bigcap Y^{-1}(0)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(0)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(0)) = 0 \cdot 0.$$

Це означає, що випадкові величини X та Y незалежні відносно останньої міри P_n^*.

Вправа 3. 1. Якщо X і Y та P_n^* з вправи 2.2, а $Z(E)=1$, коли $E \in \Omega$, то легко бачити, що X, Y та Z – попарно незалежні прості випадкові величини, оскільки стала випадкова величина з будь-якою випадковою величиною утворює пару незалежних величин, бо $Z^{-1}(1) = \Omega$.

2. Нехай проведено m незалежних випробувань і подія A_k означає відбування події A у k-му випробуванні. Тоді події A_k попарно незалежні, а тому індикатори цих подій $X_k = X_{A_k}(E)$, $k \in \overline{1,\ m}$, $E = (E_1,\ E_2,\ \dots,\ E_m) \in \Omega_1{}^m$, також попарно незалежні стосовно міри $\tilde{P}_m^*$, оскільки $X_k^{-1}(1) = A_k$, $X_k^{-1}(0) = \overline{A}_k$, $k \in \overline{1,m}$ і тому

$$\tilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a) \cap X_i^{-1}(b)) = \tilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a)) \cdot \tilde{P}_m^*(X_i^{-1}(b)),$$

коли $k \neq i$, $a \in \{0;1\}$ і $b \in \{0;1\}$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, скінченна, то $X(E)$ є простою випадковою величиною.

2. Твердження, обернене до 1, є правильним.

3. Кожна випадкова величина є простою.

4. Існують випадкові величини, що не є простими.

5. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, така, що $P_n^*(\{E \in \Omega : X(E) \neq 1\}) = 0$, то ця функція є випадковою величиною.

6. Функція $X(E)$, $E \in \Omega$, з твердження 5 є простою випадковою величиною.

7. Якщо існують події $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,s}$, для яких $\sum_{k=1}^{s} A_k = \Omega$ і $X(E) = c_k$, коли $E \in A_k$, $k \in \overline{1,s}$, то $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина.

8. Якщо $X_1(E) + X_2(E),\ E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $X_1(E)$ і $X_2(E)$ – прості випадкові величини.

9. Твердження, обернене до 8, є правильним.

10. Для будь-якої простої випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, функція $Y = \sqrt{X(E)}$ є простою випадковою величиною.

11. Випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, незалежні, коли $P_n^*(X_1^{-1}(a) \cap X_2^{-1}(a)) = P_n^*(X_1^{-1}(a)) \cdot P_n^*(X_2^{-1}(a))$ для деякого числа a.

12. Залежність випадкових величин визначається ймовірнісною мірою, тобто відносно однієї міри випадкові величини можуть бути залежними, а відносно іншої – незалежними.

13. Існує ймовірнісний простір, для якого будь-які дві випадкові величини є незалежними.

14. Прості випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, є незалежними тоді й тільки тоді, коли вони *майже сталі*, тобто існують сталі c_i, для яких $P_n^*(\{E \in \Omega : X_i(E) \neq c_i\}) = 0$, $i \in \overline{1,2}$.

2. Нехай X_1 – індикатор події $A = [0;1] \subset R = \Omega$, а X_2 – індикатор події $B = [1;2] \subset \Omega$. Знайти: суму, різницю, добуток і частку X_1 та X_2.

3. Навести приклад випадкової величини, що не є простою.

4. Навести приклад ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) і функції $X(E),\ E \in \Omega$, що має скінченну множину значень, проте не є простою випадковою величиною.

5. Довести, що коли $X(E),\ E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то й $Y = |X(E)|,\ E \in \Omega$, також проста випадкова величина. Перевірити, чи правильне обернене твердження.

6*. 1. Довести, що функція $X(E),\ E \in \Omega$ є простою випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли існує скінченна кількість попарно несумісних подій $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,n}$, така, що $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, на кожній з яких функція $X(E)$ є сталою.

2. Визначити, чи обов'язково $X(A_k) \neq X(A_i)$, коли $k \neq i$.

3. Чи можна у твердженні 1 опустити умову попарної несумісності подій $A_k,\ k \in \overline{1,n}$?

7. Відомо, що прості випадкові величини $X(E)$ та $Y(E),\ E \in \Omega$ набувають лише значень 0 та 1. Чи обов'язково сума цих випадкових величин набуває значень: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0 або 1; 5) 0 або 2; 6) 1 або 2; 7) 0 або 1, або 2?

8. Нехай дано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), подія $A \in S$ і проведено три незалежних випробування, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ та не відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Нехай також X_k – випадкова величина, що є індикатором відбування події A у k-му випробуванні, $k \in \overline{1,3}$.

1. Вказати область визначення кожної випадкової величини X_k та її значення у кожній точці області визначення.

2. Знайти усі можливі значення випадкової величини $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ та статистичні ймовірності цих значень.

3. З'ясувати зв'язок випадкової величини Y із статистичною ймовірністю $P_3^*(A)$.

9. 1. З'ясувати, які функції $X(E),\ E \in \Omega$, є простими випадковими величинами:

1) $X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A; \\ -1, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$

A – подія з імовірнісного простору (Ω, S, P_n^*);

2) $X(E) = E^2$, $E \in (-\infty; +\infty) = \Omega$ і кожен проміжок є подією;

3) $X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A; \\ -1, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$

A не є подією;

4) X – кількість влучень при трьох пострілах, в кожному з яких влучення відбувається з статистичною ймовірністю 0.8;

5) X – кількість підкидань монети до першого випадання герба;

6) $X(E),\ E\in\Omega$, – довільна випадкова величина, а Ω є дискретною множиною;

7) $X(E),\ E\in\Omega_1^m$, – кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях.

2. Розподілом статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини $X(E),\ E\in\Omega$, для якої $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m\}$, а $P(X=x_k)=p_k$, $k\in\overline{1,\ m}$, називається таблиця

x_k	x_1	x_2	...	x_m
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_m^*

Вказати розподіл статистичних ймовірностей значень кожної простої випадкової величини із завдання 1) – 7).

10. Довести, що коли $X(E),\ E\in\Omega$, – проста випадкова величина, то для кожного її значення x_0 існує $P_m^*(X^{-1}(x_0))$, де $X^{-1}(x_0))=\{E:E\in\Omega, X(E)=x_0\}$. Перевірити, чи є правильним обернене твердження.

11. Довести, що коли функції $X_k(E),\ E\in\Omega,\ k\in N$, – прості випадкові величини, то такими є й функції: 1) $\sum\limits_{k=1}^{m}X_k$; 2) $\prod\limits_{k=1}^{m}X_k$; 3) X_1-X_2 ; 4) X_1/X_2 ; 5) $f(X_1)$, де f – довільна функція, область визначення якої містить множину $X_1(\Omega)$.

12. Чи може розподіл статистичних ймовірностей значень простої випадкової величини мати вигляд:

1)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,2	0,1	0,4	0,5

2)

x_k	0	1	2	3
p_k	0	0,2	0,3	0,5

3)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	C

13. Нехай випадкова величина X – кількість появ герба при трьох підкиданнях монети. Знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо при кожному підкиданні статистична ймовірність появи герба: 1) є сталою і дорівнює $\frac{1}{2}$; 2) не є сталою, а набуває, наприклад, значень 0,51; 0,49; 0,5.

14. Нехай X – можлива відносна частота відбування події A у чотирьох незалежних випробуваннях X. Знайти область визначення і множину значень цієї величини, а також розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо у кожному випробуванні статистична ймовірність відбування події A є: 1) однаковою і дорівнює p; 2) не є однаковою, а набуває, наприклад, значень p_1, p_2, p_3 та p_4.

15. Розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, мають вигляд:

x_k	-1	0	1
p_k	0,2	0,3	0,5

y_k	0	1	2
q_k	0,1	0,3	0,6

Визначити розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) $X+Y$; 2) $X \cdot Y$ у випадку, коли X і Y а) незалежні випадкові величини; б) залежні випадкові величини.

18. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень простих випадкових величин

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) та просту випадкову величину $X(E)$, $E \in \Omega$, множина значень якої $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді за означенням *статистичним математичним сподіванням* $M_n^*(X)$ та *статистичною дисперсією* $D_n^*(X)$ цієї випадкової величини є числа:

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)), \tag{18.1}$$

$$D_n^*[X] = M_n^*[(X - M_n^*(X))^2] = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M_n^*(X))^2 P_n^*(X^{-1}(x_k)). \tag{18.2}$$

Число $M_n^*[X]$ називають також *середнім статистичним значенням* простої випадкової величини X, а число $D_n^*[X]$ – *мірою розсіювання* статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини навколо середнього статистичного значення.

Приклад 18.1.

1. Якщо $X(E) = c$, $E \in \Omega$, – стала випадкова величина, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{c\},\ S_X = \{\varnothing, \{c\}\},\ X^{-1}(c) = \Omega,\ P_n^*(X^{-1}(c)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

і тому

$$M_n^*[c] = c \cdot 1 = c, \qquad D_n^*[c] = M_n^*[(c-c)^2] = M_n^*[0] = 0.$$

2. Якщо $X_A(E)$, $E \in \Omega$, – індикатор події A, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{1,0\},\ S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}\},\ X^{-1}(1) = A,$$

$$X^{-1}(0) = \overline{A},\ P_n^*(X^{-1}(1)) = P_n^*(A) = p,\ P_n^*(X^{-1}(0)) = P_n^*(\overline{A}) = 1 - p.$$

Тому

$$M_n^*[X_A] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p\,,$$

$$D_n^*[X_A] = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p)\,.$$

Статистичне математичне сподівання та статистична дисперсія простої випадкової величини мають такі *основні властивості*.

1. *Статистичне математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій* (див. приклад 18.1):

$$M_n^*[c] = c\,.$$

2. *Статистична дисперсія сталої дорівнює нулеві* (див. приклад 18.1):

$$D_n^*[c] = 0\,.$$

3. *Сталу можна виносити за знак статистичного математичного сподівання простої випадкової величини*:

$$M_n^*[cX] = cM_n^*[X]\,.$$

4. *За знак статистичної дисперсії стала виноситься в квадраті*:

$$D_n^*\big[cX\big] = c^2 D_n^*\big[X\big].$$

5. *Статистичне математичне сподівання суми простих випадкових величин дорівнює сумі їхніх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y]\,.$$

За методом математичної індукції можна довести, що

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k} X_i] = \sum_{i=1}^{k} M_n^*[X_i],\ k \in N\,.$$

6. *Статистичне математичне сподівання лінійної комбінації простих випадкових величин X та Y дорівнює цій лінійній комбінації їхніх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[aX+bY] = aM_n^*[X] + bM_n^*[Y]\,.$$

7. *Якщо* $X[E] \ge 0,\ E \in \Omega$, то $M_n^*[X] \ge 0$.

8. *Якщо* $X(E) \ge Y(E),\ E \in \Omega$, то $M_n^*[X] \ge M_n^*[Y]$.

9. *Статистичне математичне сподівання добутку незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює добуткові їх математичних сподівань*:

$$M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]\,.$$

10. *Статистична дисперсія суми незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій*:

$$D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]\,.$$

11. *Статистична дисперсія лінійної комбінації* (*з коефіцієнтами a і b*) *незалежних простих випадкових величин X*

та Y *дорівнює лінійній комбінації їх статистичних дисперсій з коефіцієнтами* a^2 *і* b^2:

$$D_n^*[aX+bY]=a^2 D_n^*[X]+b^2 D_n^*[Y].$$

Дана властивість має місце для будь-якої скінченної кількості попарно незалежних випадкових величин X_j, $j\in\overline{1,r}$:

$$D_n^*\left[\sum_{j=1}^{r} a_j X_j\right]=\sum_{j=1}^{r} a_j^2 D_n^*[X_j].$$

12. Якщо X *– невід'ємна проста випадкова величина, число* $\varepsilon>0$ *і множина* $A_\varepsilon=\{E: E\in\Omega, X(E)\ge\varepsilon\}$, *то* A_ε *є подією, для якої має місце нерівність П.Л. Чебишова*:

$$P_n^*(A_\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon}M_n^*[X].$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $M_n^*[cX]=cM_n^*[X]$.

Справді, якщо $\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, а $Y=cX$, то для $c\ne 0$

$$\Omega_Y=Y(\Omega)=\{cx_1, cx_2, \ldots, cx_s\},\ Y^{-1}(cx_i)=X^{-1}(x_i),$$
$$P_n^*(Y^{-1}(cx_i))=P_n^*(X^{-1}(x_i)),\ i=\{1,2,\ldots,s\},$$

тому

$$M_n^*[Y]=M_n^*[cX]=\sum_{i=1}^{s} cx_i P_n^*(X^{-1}(x_i))=c\sum_{i=1}^{s} x_i P_n^*(X^{-1}(x_i))=cM_n^*[X].$$

Вправа 2. Довести властивість 10 дисперсії.

За означенням статистичної дисперсії

$$D_n^*[X+Y]=M_n^*[(X+Y-M_n^*[X+Y])^2]=$$
$$=M_n^*[((X-M_n^*[X])+(Y-M_n^*[Y]))^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])+(Y-M_n^*[Y])^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]+$$
$$+M_n^*[(Y-M_n^*[Y])^2]]=D_n^*[X]+D_n^*[Y],$$

оскільки

$$M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]=$$
$$=M_n^*[X\cdot Y-YM_n^*[X]-XM_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=$$
$$=M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]-M_n^*[Y]\cdot M_n^*[X]-M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=0,$$

бо X і Y незалежні прості випадкові величини.

Вправа 3. Довести нерівність П.Л. Чебишова.

Якщо

$$\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},\text{ де } 0\le x_1<x_2<\ldots<x_m,$$

то для фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдемо найменший номер n_0, для якого $x_{n_0} \ge \varepsilon$. Тоді $x_k \ge \varepsilon$, коли $k \ge n_0$, а множина $A_\varepsilon = \bigcup_{k=n_0}^{m} X^{-1}(x_k)$ і тому є подією. При цьому

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \ge \sum_{k=n_0}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \ge \varepsilon \sum_{k=n_0}^{m} P_n^*(X^{-1}(x_k)) =$$

$$= \varepsilon P_n^*(\bigcup_{k=n_0}^{m}(X^{-1}(x_k)) = \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon).$$

Отже,

$$M_n^*[X] \ge \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon), \text{тобто } P_n^*(A_\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X].$$

Зауваження. Подію A_ε, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуває значення, не меншого за ε, позначають також $(X \ge \varepsilon)$, а тому нерівність П.Л. Чебишова часто записують у вигляді $P_n^*(X \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X]$. Зокрема,

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \ge \varepsilon) =$$

$$= P_n^*((X - M_n^*[X])^2 \ge \varepsilon^2) \le \frac{1}{\varepsilon^2} M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} D_n^*[X].$$

Нерівність

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \ge \varepsilon) \le \frac{D_n^*[X]}{\varepsilon^2}$$

також називають нерівністю П.Л. Чебишова.

Вправа 4. Два гравці домовилися, що за результатом гри увесь призовий фонд забере той, хто перший виграє n партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли першому гравцеві залишилося до перемоги виграти $n_1 = 3$ партій, а другому – $n_2 = 4$ партій. У якому співвідношенні вони повинні поділити призовий фонд, якщо статистична ймовірність виграшу у кожній партії для кожного гравця дорівнює $\frac{1}{2}$.

Побудуємо ймовірнісну модель для даної задачі. Випадковий експеримент полягає у тому, що гравці грають доти, поки перший гравець не виграє 3 партії або другий не виграє 4 партії.

Результатами експерименту будемо вважати впорядковані набори цифр 1 та 2, причому якщо на i-му місці стоїть 1 або 2, то це означає, що i-ту партію виграв відповідно перший або другий гравець. Кількість цифр у наборі визначає кількість зіграних партій. Тоді простір Ω елементарних подій складається з наборів:

3 партії: (1,1,1);
4 партії: (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (2,2,2,2);
5 партій: (2,1,1,2,1), (1,2,1,2,1), (1,1,2,2,1), (2,2,1,1,1), (2,1,2,1,1), (1,2,2,1,1), (2,2,2,1,2), (2,2,1,2,2), (2,1,2,2,2), (1,2,2,2,2);
6 партій: (2,2,2,1,1,1), (2,1,1,2,2,1), (1,2,1,2,2,1), (1,1,2,2,2,1), (2,2,1,1,2,1), (2,1,2,1,2,1), (1,2,2,1,2,1), (2,2,1,2,1,1), (2,1,2,2,1,1), (1,2,2,2,1,1), (2,2,2,1,1,2), (2,1,1,2,2,2), (1,2,1,2,2,2), (1,1,2,2,2,2), (2,2,1,1,2,2), (2,1,2,1,2,2), (1,2,2,1,2,2), (2,2,1,2,1,2), (2,1,2,2,1,2), (1,2,2,2,1,2).

Вважаючи результати партій, що пов'язані з кожною елементарною подією, незалежними подіями, дістанемо, що

$$P_n^*(1.1.1)=\frac{1}{8},\ P_n^*(E_1,E_2,E_3,E_4)=\frac{1}{16},\ P_n^*(E_1,E_2,E_3,E_4,E_5)=\frac{1}{32}$$

і $P_n^*(E_1,E_2,E_3E_4,E_5E_6)=\dfrac{1}{64}$, де $E_k=1$ або $E_k=2$ для кожного k.

Нехай подія A полягає у тому, що призовий фонд забирає перший гравець. Цій події сприяють 1 елементарна подія, що відповідає трьом партіям, 3 елементарні події, що відповідають чотирьом партіям, 6 елементарних подій, що відповідають п'яти партіям і 10 елементарних подій, що відповідають 6 зіграним партіям. Тому

$$P_n^*(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}+\frac{10}{64}=\frac{42}{64}.$$

Аналогічно

$$P_n^*(\overline{A})=\frac{1}{16}+\frac{4}{32}+\frac{10}{64}=\frac{22}{64}.$$

Розглянемо тепер випадкові величини, що є величиною виграшу кожного гравця:

$$X_1(E)=\begin{cases}S, \text{ коли } E\in A,\\ 0, \text{ коли } E\notin A,\end{cases}\quad X_2(E)=\begin{cases}S, \text{ коли } E\in \overline{A},\\ 0, \text{ коли } E\notin \overline{A},\end{cases}$$

де S – призовий фонд. Тоді математичне сподівання (сума, на яку доцільно сподіватися кожному гравцеві):

$$M[X_1]=S\cdot P_n^*(A)+0\cdot P_n^*(\overline{A})=\frac{42}{64}S,$$

$$M[X_2]=S\cdot P_n^*(\overline{A})+0\cdot P_n^*(A)=\frac{22}{64}S.$$

Це означає, що першому гравцеві доцільно сподіватися на $\dfrac{42}{64}$ від призового фонду, а другому – на $\dfrac{22}{64}$ від цього фонду.

У такому співвідношенні, тобто $\dfrac{42}{64}:\dfrac{22}{64}=22:11=2:1$, гравці й повинні поділити призовий фонд.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна проста випадкова величина має статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію, які можна обчислити єдиним способом.

2. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $D_n^*[X] = M_n^*[X^2] - (M_n^*[X])^2$.

3. Якщо X – проста випадкова величина і $P_n^*(\{E : E \in \Omega, X(E) \neq c\}) = 0$ для деякої константи c, то $M_n^*[X] = c$.

4. Якщо X – з твердження 3, то $D_n^*[X] = 0$.

5. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[XY] \neq M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]$.

6. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[X \pm Y] = M_n^*[X] \pm M_n^*[Y]$.

7. Якщо $M_n^*[X] \geq M_n^*[Y]$, то $X \geq Y$.

8. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $D_n^*[X + Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$.

9. Нерівність Чебишова має місце для будь-якої простої випадкової величини.

2. Знайти статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію випадкової величини X, якщо:

1. $X(E_i) = i$, коли $E_i = "i" \in \{"1", "2", "3", "4", "4", "5", "6"\} = \Omega$, а $P_n^*(E_i) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$; $i \in S_X$ для всіх i.

2. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P_n^*(x_i) = C_n^{x_i} (\frac{1}{2})^{x_i} (\frac{1}{2})^{n-x_i}$, $x_i \in \Omega_X$, $n = 5$, $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

3. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $a = 1$,

$$P_n^*(x_i) = \frac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a},\ x_i \in \Omega_X,\ i \in \overline{0,\ 9},\ P_n^*(x_{10}) = 1 - \sum_{i=0}^{9} P_n^*(x_i).$$

3*. Нехай $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – прості випадкові величини, причому $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $\Omega_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Довести, що:

1. $X(E) = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E)$, $Y(E) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{Y^{-1}(y_j)}(E)$, $E \in \Omega$, де $I_A(E)$ – індикатор події A.

2. X і Y – незалежні тоді й тільки тоді, коли $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними для будь-яких $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,m}$.

3. Випадкові величини $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними тоді й тільки тоді, коли $M_n^*[X_i \cdot Y_j] = M_n^*[X_i] \cdot M_n^*[Y_j]$.

4. Якщо X і Y – незалежні, то й $(X+a)$ та $(Y+b)$ – незалежні для будь-яких чисел a і b.

4. Довести, що $D_n^*[X] \le (\max\limits_{1\le k\le m} x_k - \min\limits_{1\le k\le m} x_k)^2$, коли $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

5. *Задача Паскаля.* Два гравці Γ_1 і Γ_2 домовилися, що за результатом гри усю суму грошей забере той, хто перший виграє 5 партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли гравець Γ_1 виграв 4 партії, а гравець Γ_2 – 3 партії. У якому співвідношенні вони повинні поділити суму грошей, якщо статистична ймовірність виграшу кожного гравця у кожній партії дорівнює $\frac{1}{2}$?

6. Сформулювати і розв'язати *задачу Луки Пачолі* (1494 р.), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на 3, 4 на 2, а 3 на 1.

7. Сформулювати і розв'язати *задачу П'єра Ферма* (1654), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на довільне $n \ge 3$, 4 на $(n-2)$, а 3 на $(n-3)$.

8. Нехай проста випадкова величина $X(E),\ E \in \Omega$, має m значень та рівномірний розподіл статистичних ймовірностей на множині її значень, тобто $P_n^*(X = x_k) = \frac{1}{m}$ для кожного значення $x_k,\ k \in \overline{1,m}$. Знайти статистичне математичне сподівання та статистичну дисперсію випадкової величини X.

9. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли X – проста випадкова величина, значення якої є:

1) кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях;

2) кількість бракованих виробів у партії з 2000 виробів, якщо навмання взятий виріб є бракованим із статистичною ймовірністю 0,01;

3) кількість пострілів до першого влучення або до закінчення набоїв, кількість яких дорівнює 5, якщо статистична ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p \in (0; 1)$.

10. Двоє стрільців незалежно один від одного зробили по одному пострілу у мішень. Нехай X – кількість влучень у мішень. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли статистична ймовірність влучення у мішень дорівнює 0,8 для першого стрільця і 0,7 – для другого.

11. Підкидається два гральних кубики і фіксується пара цифр, що випали на верхніх гранях кубиків. На сукупності Ω таких пар $(i, j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$, визначена функція X, значеннями якої є числа $X(i, j) = i + j$. Всі пари $(i,\ j)$ виявилися статистично рівноможливими.

1. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X є випадковою величиною та: 1) знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини; 2) обчислити $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$; 3) для чисел $\varepsilon \in \{2, 6, 12\}$ знайти подію $A_\varepsilon = \{E : E \in \Omega, X(E) \geq \varepsilon\}$ та переконатися, що виконується відповідна нерівність Чебишова.

2. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X не є випадковою величиною.

12. На просторі Ω із завдання 11.1:

1) визначити дві випадкові величини X та Y;
2) знайти їх суму та добуток;
3) перевірити залежні чи ні ці випадкові величини;
4) перевірити, чи виконуються рівності:

а) $M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y]$; $D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$;

б) $M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] M_n^*[Y]$; $D_n^*[XY] = D_n^*[X] D_n^*[Y]$.

13*. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і дві прості випадкові величини $X(E),\ E \in \Omega$ та $Y(E),\ E \in \Omega$. Довести *нерівність Коші-Буняковського*:

$$\left| M_n^*[XY] \right|^2 \leq M_n^*[X^2] \cdot M_n^*[Y^2].$$

14*. За умов задачі **13** застосувати нерівність Коші-Буняковського до випадкових величин $(X - M_n^*[X])$ та $(Y - M_n^*[Y])$ і довести, що:

1) $M_n^*[(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y])] = M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]$;

2) $\left| \dfrac{M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]}{\sqrt{D_n^*[X]}\sqrt{D_n^*[Y]}} \right| \leq 1$.

19. Закон великих чисел для статистичних ймовірностей

Нехай проводиться серія із m незалежних випробувань і нехай X_i – індикатор події A_i – появи події A в i-тому випробуванні із спостереженою статистичною ймовірністю $P^*_{m,\,cn}(A) = p_m$. Очевидно X_i – проста випадкова величина, яка визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, породженою мірою p_m (див. п. 1.15), і може набувати двох значень – 0 і 1, причому $X_i^{-1}(1) = A_i$, $X_i^{-1}(0) = \overline{A}_i$. При цьому $P_m^*(A) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = X(E)$,

$E=(E_1, E_2, ..., E_m)\in\Omega_1{}^m$, де кожне E_k дорівнює A або $\overline{A}$, а тому $X(E)=P_m^*(A)$ також проста випадкова величина, визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, а значеннями $P_m^*(A)$ є числа $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., 1$ – усі можливі значення статистичної ймовірності події A.

Одним з можливих значень $P_m^*(A)$ є число p_m. За допомогою міри $\tilde{P}_m^*$ можна оцінити можливість досить значного відхилення від числа p_m усіх інших значень статистичної ймовірності $P_m^*(A)$:

$$\tilde{P}_m^*(|\, P_m^*(A)-p_m\, |\geq\varepsilon)\leq\frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2}\leq\frac{1}{4m\varepsilon^2} \qquad (19.1)$$

або

$$\tilde{P}_m^*(|\, P_m^*(A)-p_m\, |<\varepsilon)\geq 1-\frac{1}{4m\varepsilon^2}\,. \qquad (19.2)$$

Закон великих чисел для статистичних ймовірностей*: при досить великих m практично всі значення випадкової величини $P_m^*(A)$ групуються біля числа $M_m^*[P_m^*(A)]=p_m$. Тому, якщо числа p_m стабілізуються при досить великих m, тобто із збільшенням m числа p_m практично перестають змінюватись, то практично перестають змінюватись із збільшенням m і спостережені значення випадкової величини $P_m^*(A)$. Вони стають близькими до фіксованого числа $P=P(A)$ (що не залежить від m). Це число і називають ймовірністю події A.*

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести нерівності 19.1 та 19.2.

У вправі 17.3.2 показано, що випадкові величини X_i попарно незалежні, а у прикладі 18.1.2 обчислено $M_m^*(X_i)=p_m$ і $D_m^*(X_i)=p_m(1-p_m)$, $i\in\overline{1,\, m}$.

Тому за властивостями статистичного математичного сподівання і статистичної дисперсії одержуємо:

$$M_m^*[X]=M_m^*[P_m^*(A)]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}M_m^*[X_i]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_m=p_m.$$

$$D_m^*[X]=D_m^*[P_m^*(A)]=D_m^*\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=\left(\frac{1}{m}\right)^2 D_m^*\left[\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=$$

$$= \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} D_m^*[X_i] \le \frac{m \cdot p_m(1-p_m)}{m^2} = \frac{p_m(1-p_m)}{m} \le \frac{1}{4m},$$

бо $D_m^*[X_i] = p_m(1-p_m) \le \frac{1}{4}$.

Таким чином, $D_m^*[P_m^*(A)] \to 0$, коли $m \to \infty$.

Оскільки $|P_m^*(A) - p_m| = |X(E) - M_m^*[X]|$, $E \in \Omega_1{}^m$, то за нерівністю П.Л. Чебишова дістаємо

$$\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| \ge \varepsilon) \le \frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2} \le \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

або

$$\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}.$$

Вправа 2. Нехай проведено m незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$, і за цими умовами визначено ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, \tilde{S}, \tilde{P}_m^*)$, де $\Omega_1^m = \{E = (E_1, \ldots, E_m): E_k = A$ або $E_k = \overline{A},\ k \in \overline{1,m}\}$, для кожного $E \in \Omega_1^m$ множина $\{E\} \in \tilde{S}$, тобто є подією, і $\tilde{P}_m^*(\{E\{) = p^s (1-p)^{m-s}$, якщо серед E_k, що утворюють E, рівно s дорівнюють A, а інші $m-s$ дорівнюють $\overline{A}$.

Нехай також $B_{m,\,s}$ означає подію з простору $\tilde{S}$, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів або те саме, що визначена за m незалежними випробуваннями статистична ймовірність $P_m^*(A) = \frac{s}{m} = X(E)$, де $E = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$ і серед E_k рівно s дорівнюють A.

Позначимо B_ε^* – сукупність тих $E \in \Omega_1^m$, для яких $X(E) = P_m^*(A) > p + \varepsilon$, де число $\varepsilon > 0$ – довільне, але фіксоване.

Довести, що:

1. $B_{m,\,s} \subset B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $s > m(p+\varepsilon)$.

2. Якщо $(p+\varepsilon) < 1$, то існує $s^* = \min\{s \in \overline{0,\ m} : s > m(p+\varepsilon)\}$, причому $s^* - 1 \le m(p+\varepsilon) < s^*$.

3. $1 \le s^* \le m$.

4. Якщо $m(p+\varepsilon) < m-1$, то $s^* \le m-1$.

5. $B_\varepsilon^* = \sum_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s}$.

Доведення:

1. Елементарна подія $E=(E_1,\ E_2,\ \ldots,E_m)\in B_{m,\,s}$ тоді й тільки тоді, коли серед E_k рівно s дорівнюють A, тобто $E\in B_{m,\,s}\Leftrightarrow X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}$. Ця елементарна подія $E\in B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon\Leftrightarrow s>m(p+\varepsilon)$. Твердження 1 доведено.

2. Оскільки $p+\varepsilon<1$, то множина $\{s\in\overline{0,\ m}: s>m(p+\varepsilon)\}$ не порожня і скінченна, а тому вона містить найменше число, тобто існує $s^*=\min\{s\in\overline{0,\ m}: s>m(p+\varepsilon)\}$.

Геометрично число s^* показано на Рис. 19.1, з якого видно, що $s^*-1\le m(p+\varepsilon)<s^*$

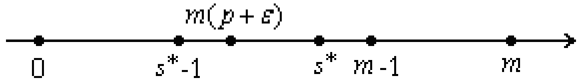


Рис. 19.1

Твердження 2 доведено.

3. Нерівність $s^*\le m$ очевидна, оскільки $p+\varepsilon<1$ і тому $m>m(p+\varepsilon)$. Оскільки $m(p+\varepsilon)>0$, то $s^*>0$, а оскільки s^* – ціле число, то $s^*\ge 1$. Твердження 3 доведено.

4. З Рис. 19.1 також видно, що коли додатково $m(p+\varepsilon)<m-1$, тобто $m>\dfrac{1}{1-p-\varepsilon}$, то $s^*\le m-1$.

5. Нехай $E\in B_\varepsilon^*$, тобто $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon$. Тоді $s>m(p+\varepsilon)$, а тому $s\ge s^*$, тобто $E\in B_{m,\,s}$ для деякого $s\ge s^*$. Це означає, що $B_\varepsilon^*\subset\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\,s}$.

Навпаки, якщо $E\in\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\,s}$, то існує $s\ge s^*$, для якого $E\in B_{m,\,s}$, тобто $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}$ і $s\ge s^*$, а це гарантує, що $s>m(p+\varepsilon)$, тобто $\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon$, отже, $E\in B_\varepsilon^*$.

Цим доведено, що $\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\,s}\subset B_\varepsilon^*$, що разом із оберненим включенням дає потрібну рівність. Твердження 5 доведено.

Задачі

1*. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X_k, k \in \overline{1, m}$, – попарно незалежні прості випадкові величини, то $Z_m = \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_k - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} M_n^*[X_k] \right|$ також є простою випадковою величиною.

2. Випадкова величина Z_m з попереднього твердження при досить великих m може набувати досить великих значень.

3. Статистична ймовірність того, що Z_m набуває досить великих значень, є як завгодно малою, коли m досить велике число, а $D[X_k] \le c$ для всіх k.

4. Значення середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями можуть досить сильно відхилятися від спільного статистичного математичного сподівання цих величин.

5. Статистична ймовірність якої завгодно близькості значень середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями до їхнього спільного статистичного математичного сподівання мало відрізняється від 1, коли кількість цих випадкових величин досить велика, а їхні дисперсії не перевищують c.

6. Статистичні ймовірності $P_m^*(A)$ і $P_n^*(A)$ можуть відрізнятися одна від одної більше, ніж на 1.

7. Якщо у кожному k-му випробуванні, $k \in \overline{1, m}$, подія A відбувається з однією і тією самою статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$, то $\widetilde{P}_m^*(|\, P_m^*(A) - P_n^*(A)\,| < 0{,}1) \ge 0{,}9$, коли $m \ge 250$, $m < n$.

2*. Нехай за досить великою серією випробувань визначена статистична ймовірність $P_n^*(A)$ події A – випадання герба при підкиданні монети: $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$.

Для заданих чисел ε і δ знайти кількість m підкидань монети таку, що матиме місце нерівність

$$\widetilde{P}_m^*(|\, P_m^*(A) - \frac{1}{2}\,| < \varepsilon) > 1 - \delta:$$

1. $\varepsilon = 0{,}1, \ \delta = 0{,}1$;
2. $\varepsilon = 0{,}05, \ \delta = 0{,}02$;
3. $\varepsilon = 0{,}01, \ \delta = 0{,}0001$.

3*. Нехай: m – кількість незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $p = P_n^*(A)$; $B_{m,s}$ – подія, яка полягає у тому, що у даних m

випробуваннях подія A відбувалася s разів; B_{ε}^{*} – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) > p+\varepsilon$, а B_{ε}^{**} – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) < p-\varepsilon$; B_{ε} – подія, яка полягає у тому, що $|P_m^*(A)-p| > \varepsilon$.

1. Знайти : 1) співвідношення між подіями B_{ε}^{*} і $B_{m,s}$; 2) між B_{ε} та B_{ε}^{*} і B_{ε}^{**}.

2. Довести, що: 1) подія B_{ε}^{**} відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(\overline{A}) > 1-p+\varepsilon$; 2) подія $B_{m,s}$ відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}$; 3) $B_{\varepsilon}=B_{\varepsilon}^{*}+B_{\varepsilon}^{**}$, причому події B_{ε}^{*} та B_{ε}^{**} є несумісними.

3. Довести, що для кожної події $B_{m,s}$ існує принаймні одна s – елементна підмножина $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ множини $M=\{1,2,\ldots,m\}$ така, що подія A відбувається у кожному i_k-му випробуванні, $k \in \overline{1,s}$, і подія A не відбувається у кожному j_k-му випробуванні, де

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_{m-s}\} = \{1,2,\ldots,m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}.$$

4. Нехай подія A_{i_k} полягає у відбуванні події A у i_k-му випробуванні, а подія $\overline{A}_{j_k}$ – у невідбуванні події A у j_k-му випробуванні: Довести, що:

1) $B_{m,s}=\sum\limits_{\{i_k\}}\prod\limits_{k=1}^{s}A_{i_k}\prod\limits_{k=1}^{m-s}\overline{A}_{j_k}$, де знак $\sum\limits_{\{i_k\}}$ означає суму стількох доданків, скільки існує s – елементних підмножин $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ у множині $M=\{1,2,\ldots,m\}$;

2) кількість доданків у сумі для $B_{m,s}$ дорівнює C_m^s;

3) події A_{i_k}, $k \in \overline{1,s}$, $\overline{A}_{j_k}$, $k \in \overline{1,m-s}$, утворюють сукупність незалежних подій;

4) доданки в сумі для $B_{m,s}$ є попарно несумісними;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$;

6) $\widetilde{P}_m^*(B_{\varepsilon}^{*}) = \sum\limits_{s=s^*}^{m} C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$.

5. Довести існування такого числа $s_0 \in \overline{0,m}$, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) < \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [s_0; m]$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [0; s_0-1]$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$, коли $mp+p-1$ не є цілим числом;

4) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$, коли $mp+p-1$ є цілим числом;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \max\limits_{0 \le s \le m} \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$.

6. Довести, що числа s_0 із завдання 5 та s^* із твердження 2 вправи 2 пов'язані співвідношеннями $m\varepsilon + 2 - p > s^* - s^0 > m\varepsilon - p$, а тому $s^* \ge s_0$, коли $m\varepsilon \ge p_0$.

7. Довести, що коли s^* із завдання 6, то

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*}) < \dfrac{1}{m\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*+k}) \le \lambda_m^k \widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*})$, $k \in \overline{1, m-s^*}$, де $\lambda_m = \dfrac{m-s^*}{s^*+1}\,\dfrac{p}{1-p}$;

3) $0 < \lambda_m < 1 - \dfrac{\varepsilon}{1-p} < 1$ і $1 - \lambda_m > \dfrac{\varepsilon}{1-p}$.

8. Довести, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^*) < \dfrac{1-p}{m\varepsilon^2}$, коли $p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{1-p-\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^{**}) < \dfrac{p}{m\varepsilon^2}$, коли $1 - p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{p-\varepsilon}$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) < \dfrac{1}{m\varepsilon^2}$.

9. Довести, що $\widetilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p| > \varepsilon) \to 0$, коли $m \to \infty$.

10. Дослідити, чи можна дістати точнішу оцінку для $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) = (\left|P_m^*(A) - p\right| > \varepsilon)$, ніж вказану у твердженні 8.3).

20. Різні задачі

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. *Рівномірний дискретний розподіл* статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ – це такий розподіл, при якому всі $P_n^*(x_i),\ i \in \overline{1,k}$, рівні між собою, тобто $P_n^*(x_i) = \dfrac{1}{k}$ для всіх $i \in \overline{1,k}$.

Ряд рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині точок $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ визначається таблицею 20.1.

Табл. 20.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	…	$\frac{1}{k}$

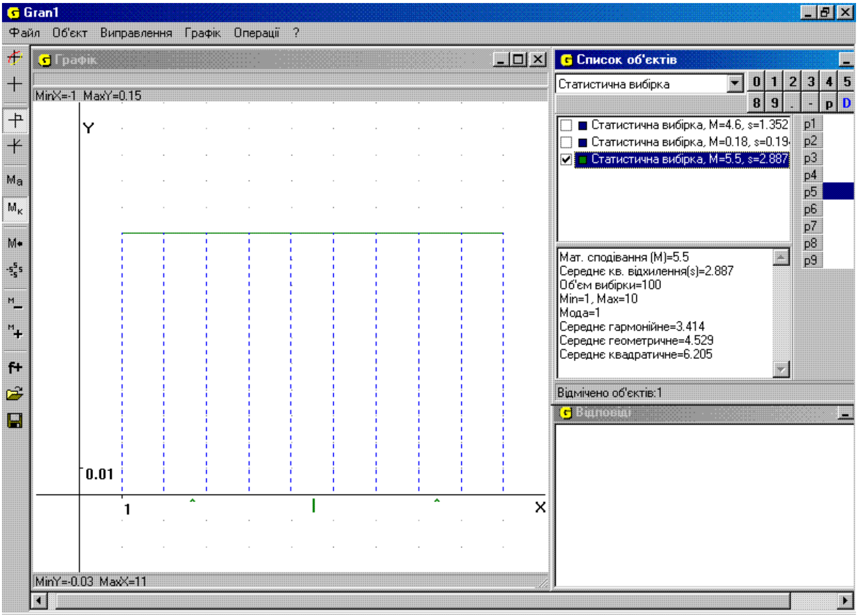


Рис. 20.1.

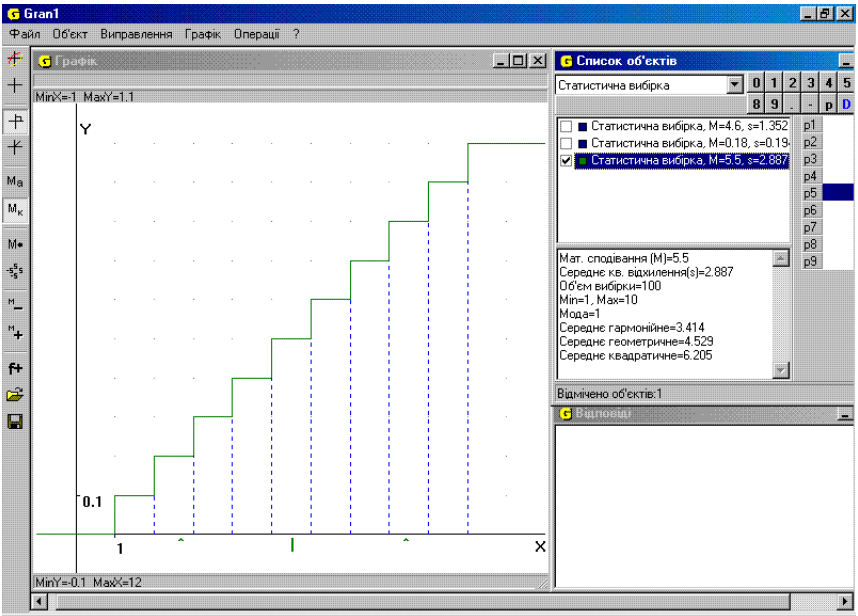


Рис. 20.2.

Відповідний многокутник розподілу подано на Рис. 20.1, а графік функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.2

Якщо проста випадкова величина X має рівномірний дискретний розподіл ймовірностей, то її статистичне математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i\ ,\ D_n^*[X]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\frac{1}{k^2}(\sum_{i=1}^{k}x_i)^2\ .$$

Вправа 2. *Біноміальний розподіл* статистичних ймовірностей – це дискретний розподіл на множині точок $\{0,1,\ 2,\ldots,m\}$, при якому $P_n^*(x_i)=C_m^{x_i}p^{x_i}q^{m-x_i}$, $x_i\in\overline{0,m},$ де $C_m^{x_i}=\dfrac{m!}{x_i!(m-x_i)!}$ – коефіцієнти розкладу бінома $(p+q)^m$ за степенями p і q, p і q – додатні числа такі, що $p+q=1.$ Якщо m досить велике, то многокутник біноміального розподілу досить близький до графіка функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{mpq}}e^{-\frac{(x-mp)^2}{2mpq}}$ (Рис. 20.3).

Якщо $p=q=\dfrac{1}{2},\ m=8,$ то ряд біноміального розподілу буде мати вигляд, поданий у таблиці 20.2:

Табл. 20.2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Відповідний многокутник розподілу статистичних ймовірностей подано на Рис. 20.4. При цьому числа $0,1,2,\ldots,m$ – це можливі кількості появ деякої події A в m випробуваннях, а $\dfrac{0}{m},\dfrac{1}{m},\dfrac{2}{m},\ldots,\dfrac{m}{m}$ – можливі значення відносної частоти (статистичної імовірності) відповідної кількості появ події A в m випробуваннях.

Якщо проста випадкова величина X має біномінальний розподіл ймовірностей на множині своїх значень $\{0,1,\ 2,\ldots,m\}$, то її статистичні математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X]=\sum_{i=0}^{m}iC_m^i p^i(1-p)^{m-i}=mp\sum_{i=1}^{m}\frac{i}{m}C_m^i p^{i-1}(1-p)^{m-i}=$$

$$=mp\sum_{i=1}^{m}C_{m-1}^{i-1}p^{i-1}(1-p)^{m-i}=mp\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}p^{i}(1-p)^{m-1-i}=mp\,,$$

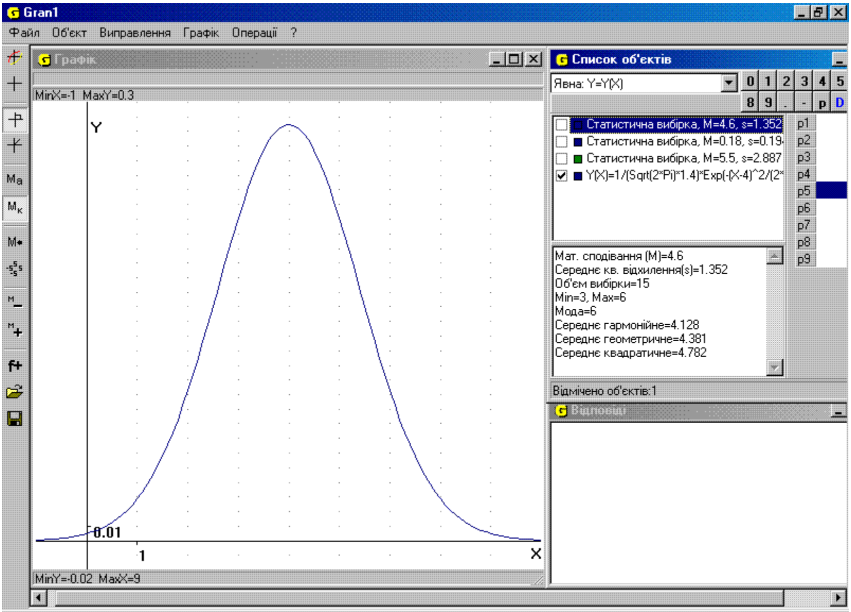


Рис. 20.3.

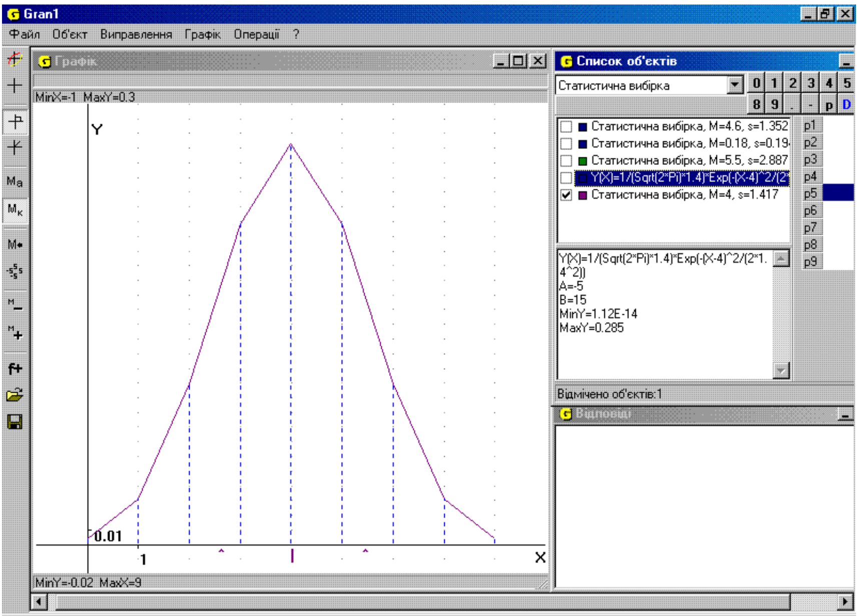


Рис. 20.4.

$$D_n^*[X]=M_n^*[X^2]-(M_n^*[X])^2=\sum_{i=0}^{m} i^2 C_m^i p^i (1-p)^{m-i} - m^2p^2 =$$

$$=\sum_{i=0}^{m} i(i-1) C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + \sum_{i=0}^{m} i C_m^i p^i (1-p)^{m-i} - m^2p^2 =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} i(i-1) C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=mp\sum_{i=2}^{m} (i-1)\frac{i}{m} C_m^i p^{i-1} (1-p)^{m-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=mp\sum_{i=2}^{m} (i-1) C_{m-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{m-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=mp\cdot(m-1)p\sum_{i=2}^{m} \frac{i-1}{m-1} C_{m-1}^{i-1} p^{i-2} (1-p)^{m-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=m(m-1)p^2\sum_{i=2}^{m} C_{m-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{m-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=m(m-1)p^2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^{i} p^{i} (1-p)^{m-2-i} + mp - m^2p^2 =$$

$$=m(m-1)p^2 - m^2p^2 + mp = mp - mp^2 = mp(1-p).$$

Отже $M[X]=mp$, а $D[X]=mp(1-p)$

Вправа 3. *Рівномірний неперервний розподіл* статистичних ймовірностей на відрізку $[a;b]$ – це такий неперервний розподіл, щільність якого має вигляд

$$f_n^*(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } x\in[a;b], \\ 0, & \text{коли } x\notin[a;b], \end{cases}$$

Легко бачити, що для даного розподілу функція розподілу $F_n^*(x)$ матиме вигляд

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{коли } a\le x\le b, \\ 1, & \text{коли } b\le x. \end{cases}$$

Графік щільності $f_n^*(x)$ неперервного рівномірного розподілу статистичних ймовірностей на проміжку $[a;b]$ подано на Рис. 20.5, а графік відповідної функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.6.

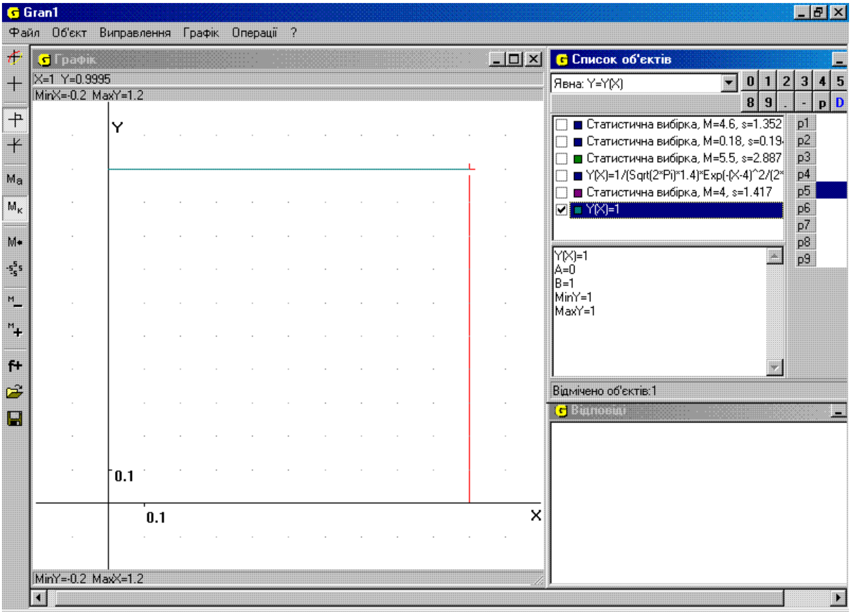


Рис. 20.5.

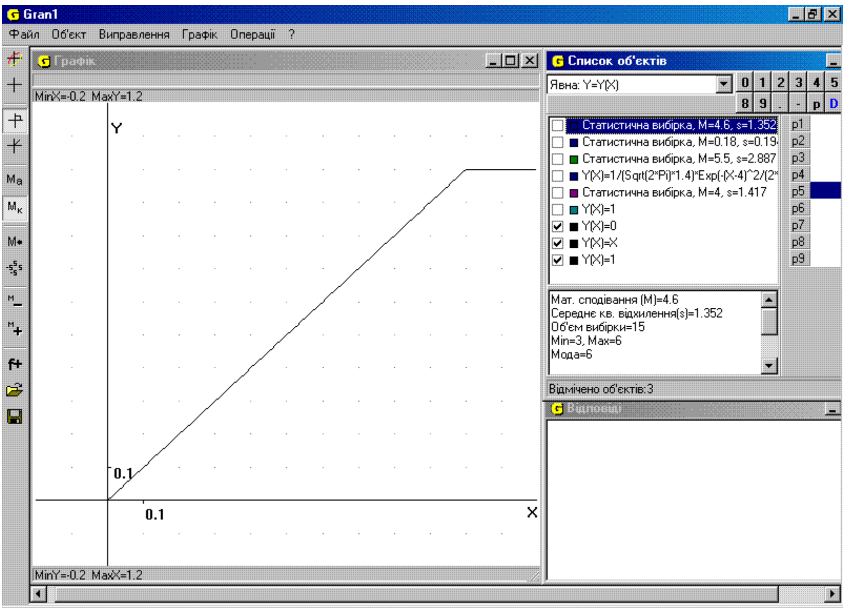


Рис. 20.6.

Для рівномірного неперервного розподілу статистичних ймовірностей центр розсіювання

$$m_n^* = \int_a^b x f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2},$$

а дисперсія

$$D_n^* = \int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-m_n^*)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}((b-m_n^*)^3 - (a-m_n^*)^3) =$$

$$= \frac{1}{24(b-a)}((b-a)^3 + (b-a)^3) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Вправа 4. *Нормальний розподіл з параметрами a і σ* – це неперервний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = R = (-\infty;\ \infty)$, щільність якого $f_n^*(x)$ практично співпадає з функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty;\ \infty),$$

де a і $\sigma > 0$ – задані дійсні числа.

Графік функції $f(x)$ подано на Рис. 20.7

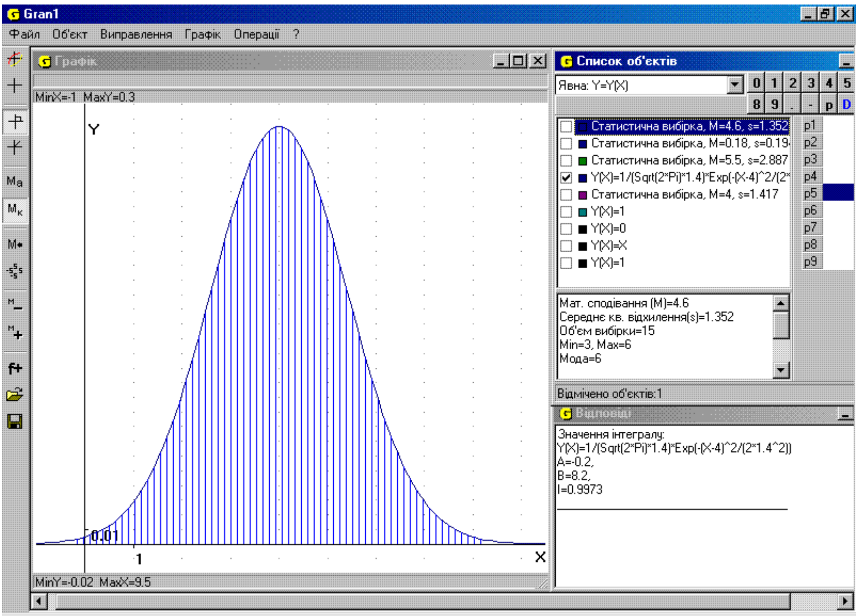


Рис. 20.7.

Виявляється, що для нормального розподілу з параметрами a і σ $P_n^*((a-3\sigma;\ a+3\sigma)) \approx 0.997$ (Рис. 20.7), тобто при нормальному розподілі статистичних ймовірностей спостережені значення $x_{\text{сп}\, i}$ за межами проміжка $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$ практично не зустрічаються (зустрічаються в середньому не частіше, ніж тричі в 1000 випробуваннях).

Крім того виявляється, що середнє арифметичне спостережених значень $x_{\text{сп}\, i}$ (однієї і тієї ж характеристики) у великій серії випробувань має розподіл статистичних ймовірностей, близький до нормального.

Вправа 5. У випадку рівномірного неперервного розподілу для довільного проміжка $\langle \alpha;\beta \rangle \subset [a;\ b]$

$$P_n^*(\langle \alpha;\ \beta \rangle) = \int_\alpha^\beta f_n^*(x)\,dx = F_n^*(\beta) - F_n^*(\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Тому при рівномірному розподілі статистичних ймовірностей на проміжку $[a;\ b]$ для відшукання $P_n^*(A)$ для довільної події A досить визначити міру $m(A)$ (загальну довжину проміжків, з яких утворено множину A), після чого $m(A)$ поділити на $m([a;\ b]) = b-a.$ Зокрема, при рівномірному неперервному розподілі статистичні ймовірності попадання в множини A і B однакової міри однакові.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Полігон рівномірного розподілу відносних частот на множині $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$ є відрізком з кінцями у точках $\left(1, \frac{1}{m}\right)$ і $\left(m, \frac{1}{m}\right)$.

2. Статистична ймовірність події A, пов'язану з рівномірним дискретним розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, залежить лише від кількості елементів в A.

3. Координата центра розсіювання рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ дорівнює $\bar{x} = \frac{m+1}{2}$.

4. Для біноміального розподілу статистичних ймовірностей $P_n^*(x_k) > P_n^*(x_{k-1})$, якщо $k < (m+1)\,p$, і навпаки.

5. Полігон біноміального розподілу відносних частот може бути відрізком.

6. Полігон *розподілу Пуассона* відносних частот:

$P_n^*(m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, де $m=0,1,2,\ldots,\quad a>0$, може бути променем.

7. Для розподілу Пуассона $P_n^*(k)<P_n^*(k-1)$, якщо $k>a$, і навпаки.

2. Побудувати ряд розподілу, визначити центр розсіювання і дисперсію та побудувати графік функції розподілу статистичних ймовірностей для:

1. Рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=\{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$.

2. Розподілу Пуассона, коли $a=\dfrac{1}{2}$.

3. Побудувати ряд розподілу і многокутник розподілу Пуассона статистичних ймовірностей для значення $a=1$.

4. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ і щільності розподілу $f_n^*(x)$ *показникового розподілу статистичних ймовірностей* з параметром $\lambda>0$, якщо функція такого розподілу практично має вигляд

$$F_n^*(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{коли } x>0,\\ 0, & \text{коли } x\le 0.\end{cases}$$

5. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ та щільності розподілу $f_n^*(x)$ для *розподілу Коші*, щільність розподілу якого практично має вигляд

$$f_n^*(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\ \ x\in(-\infty;\ \infty).$$

6. Нехай в урні є N кульок, серед яких N_1 чоних, $N_1<N$. Експеримент полягає в тому, що навмання дістають з урни n кульок і фіксують кількість чорних серед вийнятих кульок. Нехай $X(E)$, $E\in\Omega$, – кількість чорних серед вийнятих навмання n кульок.

1. Знайти область визначення Ω функції $X(E)$ та побудувати ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$, відносно якого $X(E)$ є простою випадковою величиною з *гіпергеометричним розподілом статистичних ймовірностей*:

$$p_i=\frac{C_{N_1}^{i}\,C_{N-N_1}^{n-i}}{C_N^n},\ i\in\overline{0,\ n}.$$

2. Довести, що коли $N\to\infty$, а числа n і $\dfrac{N}{N_1}$ залишаються фіксованими, то гіпергеометричний розподіл прямує до біноміального.

3. Знайти статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової виличини X з гіпергеометричним розподілом.

7. Нехай експеримент полягає у тому, що r кульок розміщують у s скриньок і фіксують вміст кожної скриньки.

1. Побудувати відповідний ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$.

2. З'ясувати, з яких елементарних подій складається подія $A_{i,\,k}$, яка полягає у тому, що i-та скринька містить k кульок, $i \in \overline{1,\ s}$, $k \in \overline{0,\ r}$.

3. Обчислити статистичні ймовірності $P_n^*(A_{i,\,1})$, $i \in \overline{1,\ s}$, та $P_n^*(A_{1,\,1} \cdot A_{1,\,2})$ і умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A_{1,\,2} / A_{1,\,1})$ та $P_n^*(A_{2,\,1} / A_{1,\,1})$. Якщо всі варіанти розташування кульок статистично рівноможливі.

4. Нехай: а) для кожної елементарої події $E \in \Omega$ множина $\{E\}$ є подією, а $X_1(E)$, $E \in \Omega$, – це кількість порожніх скриньок, що відповідає елементарній події $E \in \Omega$; б) існує елементарна подія $E_0 \in \Omega$, для якої множина $\{E_0\}$ не є подією, а $X_2(E)$, $E \in \Omega$, набуває значення 1, коли $E = E_0$ і значення 0, коли $E \neq E_0$.

З'ясувати, яка з функцій $X_1(E)$ та $X_2(E)$ обов'язково є випадковою величиною, а яка може і не бути випадковою величиною.

5. Знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей значень випадкової величини із завдання 4 та визначити тип розподілу.

6. Для події $A = A_{1,\,1}$ (див. завдання 2) знайти аналітичний вираз випадкової величини X – кількості відбувань події A у m незалежних випробуваннях.

7. Обчислити статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

8. Знайти значення випадкової величини, що зустрічається найчастіше.

9. Обчислити статистичну ймовірність того, що випадкова величина X набуває додатного значення.

10. Для заданого $\varepsilon > 0$ оцінити за допомогою нерівності Чебишова $\widetilde{P}_m^*(|\ X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$ і порівняти одержаний результат з безпосередньо обчисленою величиною $\widetilde{P}_m^*(|\ X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$.

Виконати завдання 1-10, вважаючи, що

1) $s = r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;

2) $s = r = 3$; кульки однакові, (які не можна розрізнити), а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;

3) $s = r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
4) $s = r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
5) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
6) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
7) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
8) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
9) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
10) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
11) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
12) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
13) $s = r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
14) $s = r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
15) $s = r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
16) $s = r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
17) $s = 2$, $r = 1$; скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
18) $s = 1$, $r = 2$; кульки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
19) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні та скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
20) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
21) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
22) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
23) $s = 2$; $r = 4$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}4$;
24) $s = 2$; $r = 4$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}3$;

25) $s=2$; $r=4$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$;

26) $s=2$; $r=4$; кульки однакові і скриньки однакові; $m=6$; $\varepsilon=0{,}1$;

27) $s=3$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=3$; $\varepsilon=0{,}4$;

28) $s=4$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=4$; $\varepsilon=0{,}3$;

29) $s=5$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$.

8. Для заданої щільності розподілу статистичних ймовірностей знайти константу c; побудувати графік щільності розподілу статистичних ймовірностей; знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей та побудувати її графік; обчислити статистичну ймовірність попадання в інтервал $[\alpha, \beta]$; знайти центр розсіювання, статистичні дисперсію і середнє квадратичне відхилення даного розподілу, коли:

1. $f_n^*(x)=\begin{cases} c, \ x\in[-2, 1] \\ 0, \ x \overline{\in} [-2, 1] \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(-1, 1)$;

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ c \ \ \sin 2x, \ 0<x\le\pi \\ 0, \ x>\pi \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$;

3. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 1 \\ x-c, \ 1<x\le 2 \\ 0, \ x>2 \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(1, 1\frac{1}{2})$;

4. $f_n^*(x)=\dfrac{2c}{1+x^2}, \quad x\in(-\infty, +\infty), \ (\alpha, \beta)=(0, 1)$;

5. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x<0 \\ c\cos x, \ 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$;

6. $f_n^*(x)=\begin{cases} cx^2, \ x\in[-1, 1] \\ 0, \ x\le -1, \ x>1 \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(0, 1)$;

7. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le\frac{\pi}{6} \\ c \ \ \sin 3x, \ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{3} \end{cases}, \ (\alpha, \beta)=(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$;

8. $f_n^*(x) = \begin{cases} c(x+1), \ x \in [-1, 1] \\ 0, \ x \overline{\in} [-1, 1] \end{cases}$, $(\alpha, \ \beta) = (0, \ 1)$;

9. Для нормального розподілу ймовірностей з параметрами a, σ знайти статистичну ймовірність попадання у заданий інтервал (α, β), коли:

1. $a = 2$, $\sigma = 1$, $(\alpha; \ \beta) = [-1, \ 2)$;
2. $a = 1$, $\sigma = 3$, $(\alpha; \ \beta) = [-2, \ 2)$;
3. $a = 1$, $\sigma = 1$, $(\alpha; \ \beta) = [-3, \ 1)$;
4. $a = 1$, $\sigma = 4$, $(\alpha, \ \beta) = (a - \sigma, \ a + \sigma)$;
5. $a = 4$, $\sigma = 1$, $(\alpha, \ \beta) = (a - 2\sigma, \ a + 2\sigma)$;

Додаток 1 Значення $\chi^2_{кр}$, які задовольняють рівність $P(\chi^2_r \le \chi^2_{кр}) = \alpha$, залежно від r і α

r \ α	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.455	1.074	1.642	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	0.554	0.752	1.145	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.05
6	0.872	1.134	1.635	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
7	1.239	1.564	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.3
8	1.646	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.1	26.1
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.7	27.9
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.2	23.2	29.6
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.6	24.7	31.3
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.0	24.1	26.2	32.9
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.4	22.5	27.7	34.6
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.3	25.0	28.3	30.6	37.7
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.6	24.8	27.6	31.0	33.4	40.8
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.6	22.8	26.0	28.9	32.3	34.8	42.3
19	7.63	8.57	10.11	11.65	13.62	15.35	18.34	21.7	23.9	27.2	30.1	33.7	36.2	43.8
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.8	25.0	28.4	31.4	35.0	37.6	45.3
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	36.3	38.9	46.8
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	37.7	40.3	78.3
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	39.0	41.6	49.7
24	10.86	11.99	13.86	15.66	18.06	19.94	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	51.2
25	11.62	12.70	14.61	16.47	18.94	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	41.7	44.3	52.6
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	42.9	45.6	54.1
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.07	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	44.1	47.0	55.5
28	13.56	14.85	16.93	18.94	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	45.4	48.3	56.9
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	46.7	49.6	58.3
30	14.95	16.31	18.49	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	48.0	50.9	59.7

Список літератури

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 440 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 448 с.
4. Жалдак М.І. Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп’ютером: Посібник для вчителів. – К.: РННЦ"ДІНІТ", 2004. – 255 с.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
6. Майстров Д.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
7. Скороход А.В. Вероятность вокруг нас. –К.: Наукова думка, 1980. – 196 с.
8. Толстов Г.П. Мера и интеграл. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 640 с.

Відповіді і вказівки

1.

1.1. Ні, оскільки, якщо результат експерименту однозначний і заздалегідь відомий, то такий експеримент не вважається випадковим.

2. Так. 3. Ні, $\Omega \neq \varnothing$. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Ні.

2.1. $\Omega = \{(x, y) : x \text{ і } y \in \{\Gamma, Ц\}\}$. 2. $\Omega = \{(x, y, z) : x, y \text{ і } z \in\} \Gamma, Ц\}\}$.

3. $\Omega = \{(x, y) : x \text{ і } y \in \overline{1,6}\}$. 4. $\Omega = \{(x, y, z) : x, y \text{ і } z \in \overline{1,6}\}$.

5. $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in \overline{1,6}$ для кожного $i \in \overline{1,6}\}$.

6. Якщо скриньки розрізняються, то $\Omega = \{(x, y) : x \in \overline{1,3},\ y \in \overline{0,3}\}$, x – номер скриньки, y – кількість предметів у скриньці. Якщо скриньки не розрізняються, то $\Omega = \{0, 1, 2, 3\} = \{y : y \in \overline{0,3}\} = \overline{0,3}$, y – кількість елементів у скриньці.

7. $\Omega = [0; +\infty)$. 8. $\Omega = \{(x, y) : x_i\ y \in [t_1; t_2]\}$.

3. 6 . **4.** Ні. **5.** $\Omega = \overline{10,99}$. **6.** 1) $\Omega_1 = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$;

2) $\Omega = \overline{10,99} \setminus \Omega_1$.

7. $\Omega = \{(1, \text{чер}),\ (2, \text{чер}),\ (3, \text{чор}),\ (4, \text{чор}),\ (5, \text{біл}),\ (6, \text{біл}),\ (7, \text{біл})\}$ або $\Omega = \{"\text{чер}", "\text{чор}", "\text{біл}"\}$.

8. $\Omega = \{(k_1, k_3), (k_1, k_4), (k_2, k_3), (k_2, k_4)\}$.

9. $\Omega = \{(k_1, k_2),\ (k_1, k_3),\ (k_1, k_4),\ (k_2, k_3),\ (k_2, k_4),\ (k_3, k_4)\}$ причому вважають, що $(k_i, k_j) = (k_j, k_i),\ i \neq j$.

10. 1) так; 2) так; 3) так.

11. $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ або $\Omega = \{(\delta, k), (c, k) : k \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$.

12. $\Omega = \{(x, y) : x_i\ y \in [18; 120]\}$.

13. 1) $\Omega = \{x_1 x_2 x_3 x_4 : x_i \in \overline{0,9}\}$; 2) $\Omega = \{x_1 x_2 x_3 x_4 : x_i \in \overline{0,9} \text{ і } x_i \neq x_j$ для $i \neq j\}$.

14. Ω утворюють усілякі сполучення з 10 претендентів по 3.

15. Ω утворюють усілякі сполучення з 1000 виробів по 5.

16. $\Omega = \{(x, y) : x$ – якесь сполучення з 100 теоретичних питань по 2, а y – якесь сполучення із 100 задач по 3$\}$.

17. 1) $\Omega_1 = \{(2,3), \ldots, (2,19), (3,5), \ldots, (3,19), \ldots, (17,19)\}$;

2) $\Omega = \Omega_1 \bigcup \{(2, 2), \ldots, (3, 3), \ldots, (19, 19)\}$.

18. 1. $\Omega_1 = \{(x, y) \in R^2 : x < 1, \text{ а } y > -1\}$.

2. $\Omega = \Omega_1 \bigcup \{(x, y) \in R^2 : x > 1, \text{ а } y < -1\}$.

19. Ω утворюють усілякі сполучення з 16 команд по 4.

20. 1) $\Omega = \{1, 01, \ldots, \underbrace{0\ldots0}_{n}1\}$ – скінченний простір;

2) $\Omega=\{1,01,\ldots,\underbrace{0\ldots0}_{k}1,\ldots\}$ – нескінченний простір.

2.

1.1. Ні, $\Omega\neq\varnothing$. 2. Взагалі кажучи, ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Так. 7. Ні. 8. Так. 9. Так. 10. Ні.

2.1.1) а) $\Omega_1=\{(1Г,2Г),(1Г,2Ц),(1Ц,2Г),(1Ц,2Ц)\}$;

б) $\Omega=\Omega_1\bigcup\{(2Г,1Г),(2Ц,1Г),(2Г,1Ц),(2Ц,1Ц\}$; 2) $\Omega=\{0,1,2\}$.

2. $\Omega=\{0,1\}$, де 0 відповідає кількості очок менша за 3, а 1 – кількість очок не менша за 3.

3. 1) а) $\Omega=\{(ri,\delta j),(\delta i,rj):i$ та $j\in\overline{1,6}\}$; б) $\Omega=\{(i,j):i$ та $j\in\overline{1,6}\}$;

2) $\Omega=\{2,3,\ldots,12\}$.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. 1) $\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\not\subset\{1,2\}$; 2) $\{1,2\}\subset\{1,2\}$; 3) $\{1,2\}\not\subset\{1,3\}\not\subset\{1,2\}$.

5. Такими є Ω та $\varnothing$.

6. Результат експерименту однозначний.

7. Придумати самому.

8. 1) так; 2) так. **9.** Ні. **10.** Один. **11.** Або події A, або жодній.

12. Події B. **13.** 1. $\Omega=\{Г,ЦГ,\ldots,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{k\text{-}1}Г,\ldots\}$. 2. $B=\overline{A},C=A$.

14. Зобразити відповідні точки на площині XOY.

3.

1. 1. Так. 2. Ні. 3. Так. 4. Ні. 5. Так. 6. Ні. 7. Ні. 8. Ні. 9. Ні. 10. Так. 11. Так. 12. Так. 13. Так. 14. Так. 15. Так.

2. 1. Влучення в круг радіуса r_6. 2. Влучення в круг радіуса r_1.

3. Влучення в кільце, визначене радіусами r_k і r_{k+1}.

4. Неможлива подія. 5. Не влучення в круг радіуса r_k.

3-5. Скористатися відповідними означеннями.

Скористатися тим, що $\overline{\bigcup\limits_k A_k}=\prod\limits_k\overline{A_k}$ і $\overline{\prod\limits_k A_k}=\bigcup\limits_k\overline{A_k}$.

6. Скористатися тим, що $AB=\varnothing$ і тому $E\in A\Rightarrow E\notin B$.

7. Ні. **8.** $A\overline{B}=A-B$. **9.** $A=B$.

10. Скористатися відповідними означеннями.

11. 1) $A\overline{B}\overline{C}$; 2) $A+B+C$; 3) $AB\overline{C}$; 4) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$;
5) $(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)\setminus ABC$; 6) $((A+B+C)\setminus(ABC))\bigcup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$; 7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

12. 1. 1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{Г,ЦЦГ,\ldots,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k\text{-}2}Г,\ldots\}$; 2) $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{Г\}$;

3) $\overline{A}_{2k}=\overline{A}_{2k-1}=\{ЦГ,\ldots,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k\text{-}1}Г,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k}Г,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k+1}Г,\ldots\}$;

4) і 5) $A_1 \setminus A_2 = A_2 \setminus A_1 = \varnothing$; 6) і 7) $A_* = A^* = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

2. 1) Ні; 2) так.

13. 1. $\Omega = \{б, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$.

2. $A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$, $B = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б, \underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$, $C = \varnothing$.

3. 1) $\overline{A} = \{б, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$; $\overline{B} = \{я, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n-2}б\}$; $\overline{C} = \Omega$;

2) $A + B = B$, $A + C = A$, $B + C = B$, $A + B + C = B$;

3) $AB = A$, $AC = BC = ABC = \varnothing$;

4) $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$, $A \setminus C = A$, $C \setminus A = \varnothing$;

$B \setminus C = B, C \setminus B = \varnothing$;

5) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \Omega$; 6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}$; 7) $\overline{A + B + C} = \overline{B}$;

8) $\overline{ABC} = \overline{\varnothing} = \Omega$; 9) $A \setminus (B + C) = A \setminus B = \varnothing$,

$B \setminus (A + C) = B \setminus A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$, $C \setminus (A + B) = \varnothing$;

10) $A \setminus (BC) = A$, $B \setminus (AC) = B$, $C \setminus (AB) = \varnothing$.

14. $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $AB = \{6\}$.

15. $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{3, 4, 5, 6\}$, $AB = \{2\}$, $A + B = \{1, 2, 4, 6\}$,
$\overline{A}\,\overline{B} = \{3, 5\}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\} = \overline{AB}$, $\overline{A}B = \{1\}$, $A\overline{B} = \{4, 6\}$.

16. $A = \{яяб, ябя, бяя, ябб, бяб, ббя, ббб\}$; $B = \{яяя\}$; $A + B = \Omega$; $AB = \varnothing$.

17. $\overline{A}$ – серед 4-х перевірених виробів бракованих немає.
$\overline{B}$ – серед 4-х перевірених виробів бракованих менше двох.
Вважати $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_i \in \{я, б\}, i \in \overline{1, 4}$.

18. 1. 1) Коли $A = \varnothing$, а $B = \Omega$. 2) Коли $A = \Omega$, а $B = \varnothing$. 3) Коли $A = B$. 2. 1) і 2) $X = \overline{B}$.

19. $D = A \cdot \sum\limits_{k=1}^{4} B_k \cdot (C_1 + C_2)$, $\overline{D} = \overline{A} + \prod\limits_{k=1}^{4} \overline{B}_k + \overline{C}_1 \overline{C}_2$.

20. 1. Ω складається з впорядкованих пар $(x, y), x$ і $y \in \overline{1,6}$.

2. Ω складається з невпорядкованих пар $\{x, y\}, x$ і $y \in \overline{1,6}$.

3. $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$ складається із сум випавших очок.

21. 1) $A \setminus (B + C)$, коли $A \not\subset (B + C)$; 2) $(AB) \setminus C$, коли $AB \not\subset C$; 3) ABC, коли $ABC \neq \varnothing$; 4) $A + B + C$; 5) $AB + AC + BC$, коли принаймні один додаток непорожній; 6) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$, коли принаймні один додаток непорожній; 7) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, коли принаймні один додаток непорожній; 8) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; 9) $(A+B+C)\setminus(ABC)$.

22. Скористатися відповідними означеннями.

23. 1) C; 2) C; 3) $AB+C$; 4) A; 5) AB; 6) AB; 7) $A+B+C$.

24 – 25. Скористатися відповідними означеннями.

26. 1) A; 2) B; 3) AC; 4) $B+C$.

27 – 28. Спростити відповідні вирази, розкривши дужки.

29. 1. Ні. 2. Так. 3. Ні. 4. Так, відповідна кількість дорівнює подвоєній кількості відповідей “Ні”.

4.

1. 1. Ні. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так. 8. Ні. 9. Так. 10. Ні. 11. Ні.

2. 1.1) $\Omega=\{+,-\}$, $S=S_*$ або $S=S^*$; 2) $\Omega=\{0,1,2\}$, $S=S_*$ або $S=S^*$, або $S=S_k=\{\varnothing,\Omega,\{k\},\Omega\setminus\{k\}\},k\in\overline{0,2}$.

3) $\Omega=\{\text{ГГ},\text{ГЦ},\text{ЦГ},\text{ЦЦ}\}$, простір S утворити самостійно.

2. 1) $\Omega=\{б,ч,з\}$; 2) $\Omega=\{+,-\}$; S утворити самостійно.

3. 1) $\Omega=\overline{2,12}$; 2) $\Omega=\{+,-\}$; S утворити самостійно.

3. 1) 2; 2) 2 або 4; 3) 2 або 4, або 8.

4. 1. Скористатися властивостями подій 1_S-3_S.

2. Твердження неправильне, коли S складається з вимірних (за Лебегом) підмножин $A\subset[a;b]$.

5. 1. 1) – 3) Так. 2. 1) – 5) – Ні.

6. Наприклад, $\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

7. Наприклад, $S=\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2,3,4,5,6\}\}$.

8. Наприклад, $S=\{\varnothing,\Omega,[0,a\}(a,1]\}$, де $a\in(0;1)$. Кількість таких просторів континуальна.

9 – 10. Скористатися відповідними означеннями.

11. 2^n. **12.** 1. Ні. 2. Так. 3. Ні.

13.* 1). $S=S_*=\{\varnothing,\Omega\}$, коли $A=\varnothing$ або $A=\Omega$, а $B=A$ або $B=\overline{A}$; 2) $S=\{\varnothing,\Omega,A,\overline{A}\}$, коли $A=B$ або $A=\overline{B}$; 3) $S=\{\varnothing,\Omega,A,B,\overline{A},\overline{B},A+B,\overline{A+B}\}$, коли не виконується умова 1) і 2), причому $AB=\varnothing$; 4) якщо не виконуються умови 1) – 3), то S складається з $\varnothing$, Ω, AB, $A\setminus AB$, $B\setminus AB$ та усіляких операцій над цими множинами.

14. 1. $\Omega=\{\text{ГГ},\text{ЦЦ},\text{ЦГГ},\text{ГЦЦ},\ldots,\underbrace{\text{ГЦ},\ldots,\text{ГЦ}}_{(k-1)\,\text{пар ГЦ}}\text{ГГ},\underbrace{\text{ЦГ},\ldots,\text{ЦГ}}_{(k-1)\,\text{пар ЦГ}}\text{ЦЦ},$

$\underbrace{\text{ЦГ},\ldots,\text{ЦГ}}_{k\,\text{пар ЦГ}}\text{Г},\underbrace{\text{ГЦ},\ldots,\text{ГЦ}}_{k\,\text{пар ГЦ}}\text{Ц},\ldots\}.$

2\. 1) $A = \{ГГ, ЦЦ, ГЦЦ, ЦГГ, ГЦГГ, ЦГЦЦ,$
$ГЦГЦЦ, ЦГЦГГ, ГЦГЦГГ, ЦГЦГЦЦ\}$;

2) $A = \{ГГ, ЦЦ, ГЦГГ, ЦГЦЦ, \ldots, \underbrace{ГЦ \ldots}_{(k-1)\,ГЦ} ГЦГГ, \underbrace{ЦГ, \ldots,}_{(k-1)\,ЦГ} ЦГЦЦ, \ldots\}$;

3) $A = \{ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦГГ, ГЦГЦЦ, \ldots, \underbrace{ЦГ \ldots,}_{k\,пар\,ЦГ} ЦГГ, \underbrace{ГЦ, \ldots,}_{k\,пар\,ГЦ} ГЦЦ, \ldots\}$.

15. 1) – 3) – властивість 3_S; 4) довести, що $A_1 \cap A_2 = \overline{(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)}$; 5) скористатися методом математичної індукції; 6) довести, що $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k)}$; 7) довести, що $A_i \setminus A_j = A_i \cdot \overline{A}_j$.

16.* Не є. Розглянути $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = S^*$.

17.* 1. Ні. 2. Ні.

18.* 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) тільки, якщо $n = 2^k$; 5) ні; 6) так.

5.

1. 1. Ні. 2. Ні. 3. Ні. 4. Ні. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так. 8. Ні. 9. Ні. 10. Так. 11. Так.

2. $m \in \overline{0,10}$, $P_n^* \in \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1\}$. **3.** $m \in \overline{0,5}$, $P_n^* \in \{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$.

4. $\Omega = \{б, ч, з\}$; $P_{1000}^*(\{б\}) = \frac{1}{2}$; $P_{1000}^*(\{ч\}) = \frac{3}{10}$; $P_{1000}^*(\{з\}) = \frac{2}{10}$, коли $S = S^*$; $P_{1000}^*(\{ч, з\}) = \frac{1}{2}$, $P_{1000}^*(\{б\}) = \frac{1}{2}$, коли $S = \{\varnothing, \Omega, \{б\}, \{ч, з\}\}$, а $P_{1000}^*(\{ч\})$ і $P_{1000}^*(\{з\})$ у даному випадку не визначено.

Аналогічно для інших просторів S.

5. $P_n^*(\{6\}) = \frac{6}{10}$; $P_n^*(\{5\}) = \frac{3}{10}$; $P_n^*(\{4\}) = \frac{5}{10}$; $P_n^*(\{1, 2, 3\}) = \frac{5}{100}$. Ці статистичні ймовірності й визначають відповідні простори S.

6. Скористатися відповідним означенням.

7. Скористатися відповідними означеннями або основними властивостями статистичної ймовірності.

8. 1. $P_{4040}^*(Г) = \frac{2048}{4040}$; $P_{12000}^*(Г) = \frac{6019}{12000}$; $P_{24000}^*(Г) = \frac{12012}{24000}$. 2. $\frac{73157}{145440}$.

3\. $P_{4040}^*(Г) = \frac{20079}{40040}$. 4. Зробить висновок самостійно.

9–10. Зробить висновок самостійно. **11.** 138.

12 – 13. Скористатися відповідним означенням. **14.** Самостійно.

15. $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(A) \le P_n^*(A+B) \le 1$ або $0 \le P_n^*(A-B) \le P_n^*(A) \le$
$\le P_n^*(A+B) \le 1$ тощо.

16. 1. $\Omega=\{(10,1),\ldots,(10,m),(2,1),\ldots,(2,3m)\}$; $P_n^*(A)=\frac{1}{4}$.

2. $\Omega=\{(25_1,25_2),(25_1,25_3),(25_2,25_1),(25_2,25_3),(25_3,25_1),(25_3,25_2)$, $(5_1,25_1),\ldots,(5_1,25_3),\ldots,(5_7,25_1),\ldots,(5_7,25_3)\}$, $P_n^*(A)=\frac{6}{27}$.

3. Ω складається із сполучень з 52 карт по 26. $P_n^*(A)=\frac{(C_{26}^{13})^2}{C_{52}^{26}}$.

4. Ω складається із сполучень з 32 карт по 10. $P_n^*(A)=\frac{C_{24}^{2}\cdot 4}{C_{32}^{10}}$.

5. Ω складається із сполучень з 32 карт по 4.

$$P_n^*(A)=\frac{C_{28}^3\cdot C_4^1+C_{28}^2\cdot C_4^2\cdot C_{28}^1\cdot C_4^3+C_{28}^0\cdot C_4^4}{C_{32}^4}.$$

6. Ω складається з 5-значних десяткових чисел від 10000 до 99999, а також з наборів від 00000 до 09999. $P_n^*(A)=0{,}6976$.

7. Ω складається з усіляких перестановок 10 кубиків. $P_n^*(A)=\frac{24}{10!}$.

8. Ω складається з усіляких перестановок 5 карток. $P_n^*(A)=\frac{1}{5!}$.

9. Ω складається з усіляких перестановок 4 книг. $P_n^*(A)=\frac{2}{4!}$.

10. Ω складається з усіляких перестановок 10 книг. $P_n^*(A)=\frac{7!\cdot 3!\cdot 8}{10!}$.

11. Ω складається з усіляких наборів букв: $x_1x_2x_3x_4x_5$, де кожна буква x_i може бути вибраною 6-ма способами. $P_n^*(A)=\frac{1}{6^5}$.

12. Ω складається з 365 днів року. $P_n^*(A)=\frac{53}{365}$.

13. Ω складається з розміщень з 5 цифр по 3. $P_n^*(A)=\frac{1}{5}$.

14. 1) Ω складається з розміщень з 10 цифр по 2, не враховуючи ті, що починаються з 0. $P_n^*(A)=\frac{5}{81}$. 2) Ω складається з розміщень з 10 цифр по 3, не враховуючи ті, що починаються з 0. $P_n^*(A)=\frac{1}{24}$.

15. Ω складається з усіляких сполучень з 15 чисел по 2. $P_n^*(A)=\dfrac{1}{21}$.

16. Ω складається з учасників зборів. $P_n^*(A)=\dfrac{7}{72}$.

17. Ω складається з усіляких перестановок 6 кульок. $P_n^*(A)=\dfrac{5!\cdot 4}{6!}$.

18. $\Omega=\{(x,y): x\in\overline{1,6},\ y\in\overline{1,6}\}$; 1) $P_n^*(A)=\dfrac{1}{6}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{5}{6}$.

19. $\Omega=\{((x,y,z),\ x+y+z): x,y$ і $z\in\overline{1,6}\}$.

1) $P_n^*(A)=\dfrac{27}{216}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{25}{216}$; 3) $P_n^*(A)=\dfrac{108}{216}=\dfrac{1}{2}$.

20. Ω складається з усіляких сполучень з 20 гравців по 10.

1) $P_n^*(A)=\dfrac{2\cdot C_{18}^{9}}{C_{20}^{10}}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{C_{16}^{8}\cdot C_4^2}{C_{20}^{10}}$.

21. Ω складається з усіляких розміщень m осіб за круглим столом, коли важливим є тільки сусіди зліва та справа. $P_n^*(A)=\dfrac{2}{m-1}$, коли $m\ge 3$. Якщо $m=2$, то $P_n^*(A)=1$.

22. Ω складається із 100 лотерейних білетів.

1) $P_n^*(A)=\dfrac{4}{100}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{99}{100}$.

23. Простір Ω складається з усіляких сполучень із 100 білетів по 3. $P_n^*(A)=\dfrac{C_{100}^3-C_{75}^3}{C_{100}^3}$.

24. Ω складається зі сполучень з 10 білетів по 3.

1) $P_n^*(A)=\dfrac{8(C_5^2+C_3^2+C_2^2)}{C_{10}^3}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{5\cdot C_3^2+2+C_5^2}{C_{10}^3}$.

25. Ω складається з $\dfrac{n}{r}$ білетів. $P_n^*(A)=\dfrac{mr}{n}$.

26. Ω складається зі сполучень з 10 білетів по 5.

1) $P_n^*(A)=\dfrac{C_8^4\cdot 2}{C_{10}^5}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^5}$; 3) $P_n^*(A)=\dfrac{C_{10}^5-C_8^5}{C_{10}^5}$.

27. Ω складається зі сполучень з $(n+m)$ білетів по k, де $k\le n+m$.

$$P_n^*(A)=\begin{cases}0, \text{ коли } S>n \text{ або } S>k \text{ або } k-S>m,\\ \dfrac{C_m^{k-S}C_n^S}{C_{n+m}^k} \text{ в іншому разі.}\end{cases}$$

28. Ω складається з усіляких сполучень з 25 осіб по 4. $P_n^*(A)=\dfrac{C_5^2\cdot C_4^2}{C_{25}^4}$.

29. Ω складається зі сполучень з $n+k$ місць по n. $P_n^*(A)=\dfrac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$.

6.

1. 1, 3, 5, 7, 17, 18, 19 – так, інші – ні. **2.** 1), 2) – так; інші – ні.
3 – 4. Скористатися відповідними означеннями та основними властивостями ймовірності.

5. 1. $\Omega=\overline{1,6}$, $P(\{i\})=\dfrac{1}{6}$, $A=\{2,3,5\}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$;

2. $\Omega=\{(x,y): x \text{ і } y\in[-a;a]\}$; S складається з вимірних (за Лебегом) фігур, що є частинами Ω, $P(B)=\dfrac{m(B)}{m(\Omega)}=\dfrac{m(B)}{4a^2}$, $B\in S$; $A=\{(x,y)\in\Omega: x^2+y^2\le r^2\}$.

$$P(A)=\begin{cases}\pi r^2/4a^2, \text{ коли } r\le a,\\ 1, \text{ коли } r\ge a\sqrt{2},\\ \dfrac{\pi r^2-8\int\limits_0^{\sqrt{r^2-a^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx}{4a^2}, \text{ коли } a<r<a\sqrt{2}.\end{cases}$$

3. Ω складається з усіляких сполучень з 16 монет по 5; $S=S^*$, $P(\{E\})=\dfrac{1}{C_{16}^5}$, $E\in\Omega$. Подія A складається з тих сполучень, для яких відповідна грошова сума має вигляд $1\cdot 50+4\cdot 10$, або $2\cdot 25+3\cdot 10$, або $1\cdot 25+4\cdot 10$, або $3\cdot 25+2\cdot 10$; $P(A)=\dfrac{4}{C_{16}^5}$.

4. $\Omega=\{10,11,\ldots,99\}$, $A=\{11,22,\ldots,88,99\}$, $P(A)=\frac{1}{10}$.

5. $\Omega=\{(k_1,k_2),(k_1,k_3),(k_1,k_4),(k_2,k_3),(k_2,k_4),(k_3,k_4)\}$,

1) $A=\{(k_1,k_2)\}$, $P(A)=\frac{1}{6}$;

2) $A=\{(k_1,k_2),(k_1,k_3),(k_1,k_4)\}$, $P(A)=\frac{1}{2}$;

3) $A=\{(k_1,k_2),(k_2,k_3),(k_2,k_4)\}$, $P(A)=\frac{1}{2}$;

4) і 5) $P(A)=\frac{1}{2}$.

6. Ω складається з перестановок 4-х команд (літер).

1) A складається з тих перестановок, де першому місці стоїть літера K_1. $P(A)=\frac{1}{4}$;

2) A складається з тих перестановок, де першому місці стоїть літера K_2, а на другому – K_1. $P(A)=\frac{1}{12}$;

3) A складається з однієї перестановки: $K_3\,K_2\,K_4\,K_1$. $P(A)=\frac{1}{24}$;

4) $P(A)=\frac{1}{24}$.

6. 1. Ω складається з трійок (x_i,k_i,t_i), $i\in\overline{1{,}500}$, де x_i – ідентифікація позичальника, k_i – сума кредиту, t_i – термін кредиту; $S=S^*$, $P_n^*(\{E\})=\frac{1}{500}$.

2. 1) $P_n^*(A)=\frac{196}{250}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{61}{500}$; 3) $P_n^*(A)=\frac{14}{125}$.

7. 1. Ω складається з трійок (x_i,S_i,P_i), $i\in\overline{1,m}$, де x_i – ідентифікація вкладника, S_i – сума вкладу, P_i – вік вкладника (у роках); $S=S^*$, $P_n^*(\{E\})=\frac{1}{n}$, $E\in\Omega$.

2. 1) $P_n^*(A)=0{,}30$; 2) $P_n^*(B)=0{,}72$; 3) $P_n^*(A+B)=0{,}80$; 4) $P_n^*(AB)=0{,}22$.

3. $A=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: S_i\ge 5\}$, $B=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: P_i\ge 30\}$,

$A\bigcup B=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: B_i\ge 5 \text{ або } P_i\ge 30\}$ і т.д.

8. 1. Ω складається з четвірок (x_i,p_i,c_i,o_i), $i\in\overline{1{,}200}$, де x_i – ідентифікація робітника, p_i – його вік, c_i – стаж роботи, o_i – освіта; простір подій – S^*, $P_n^*(\{E\})=\frac{1}{200}$, $E\in\Omega$.

2. 1) $A=\{(x_i,p_i,c_i,o_i)\in\Omega: p_i\ge 30\}$;

2) $B = \{(x_i, p_i, c_i, o_i) \in \Omega : o_i = \text{"вища"}\}$;
3) $C = \{(x_i, p_i, c_i, o_i) \in \Omega : c_i > 5\}$.

3. 1) $P_n^*(A) = \frac{2}{5}$; 2) $P_n^*(B) = \frac{31}{40}$; 3) $P_n^*(C) = \frac{3}{8}$;

4) $P_n^*(A+B) = \frac{17}{20}$; 5) $P_n^*(AC) = \frac{1}{10}$; 6) $P_n^*(\overline{A}) = \frac{3}{5}$;

7) $P_n^*(\overline{B}) = \frac{9}{40}$; 8) $P_n^*(\overline{C}) = \frac{5}{8}$; 9) $P_n^*(\overline{A+B}) = \frac{3}{20}$.

9. 1. Ω складається зі сполучень з 10 по 7; простір подій – S^*, $P(\{E\}) = \frac{1}{C_{10}^7}$, $E \in \Omega$.

2. Події A сприяють $C_6^4 \cdot C_4^3$ елементарні події.

3. $P_n^*(A) = \frac{C_6^4 C_4^3}{C_{10}^7} = \frac{1}{2} = P_n^*(\overline{A})$.

10. Ні. **11.** Ні. **12.** Скористатися формулою
$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$.

7.

1. 1, 3, 4, 8, 10 – ні; 2, 5, 6, 7, 9 – так.
2. 1) – 3) $P_n^*(A/B) = 0$; 4) – 6) $P_n^*(A/B) = 1$.
3. 1. Так. 2. Так. 3. Так.
4. Скористатися відповідним означенням.
5. Скористатися відповідним означенням і формулою (7.2).
6. Скористатися відповідними означеннями.
7. $\frac{1}{6}$. **8.** 1. 0 або $\frac{1}{6}$. 2. Ні.
9. A_1 і A_2 незалежні $\Leftrightarrow$ 1) $\exists i \in \overline{1,2} : A_i = \varnothing$ або $A_i = \Omega$; або 2) A_1 містить 2 елементи, A_2 – 3, а $A_1 A_2$ – один елемент; або 3) A_1 містить 4 елементи, A_2 – 3, а $A_1 A_2$ – два елементи.
10. Скористатися відповідними означеннями.
11. Знайти $P_n^*(A_1 \overline{A}_2)$ і $P_n^*(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$.
12. 1. Ω складається з усіляких сполучень з 25 білетів по 3.
2. A складається із сполучень з 20 білетів по 3.
3. $P_n^*(A) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = P_n^*(A_1 A_2 A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23}$.

13. 1. $\Omega = \{n, нn, \ldots, \underbrace{н \ldots н}_{9} n\}$; $S = S^*$, $P_n^*(\{E\}) = \frac{1}{10}$; 2. $\frac{3}{10}$; 3. $\frac{1}{2}$.

14. Ω складається з наборів $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де x_1 – сполучення з 15 осіб по 3, x_2 – сполучення з 12 осіб по 3, x_3 – сполучення з 9 осіб по 3, x_4 – сполучення з 6 по 3 і x_5 – сполучення з 3 осіб по 3: $P_n^*(A) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot 5 \cdot C_8^2 \cdot 4 \cdot C_6^2 \cdot 3 \cdot C_4^2 \cdot 2}{C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3}$.

15. В обох випадках $P_n^*(A) = \dfrac{15}{20}$. **16.** 1. $\dfrac{3}{4}$. 2. $\dfrac{1}{5}$.

17. 1. $P_n^*(A/(A+B)) = \dfrac{P_n^*(A)}{P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)}$.

2. $P_n^*(A/(A+B)) = \dfrac{P_n^*(A)}{P_n^*(A) + P_n^*(B)}$.

3. A і $(A+B)$ незалежні, коли $P_n^*(A+B) = 1$ або $P_n^*(A) = 0$.

18. A і B незалежні. **19.** 1. Ні. 2. Зміниться.

20. 1. $\Omega = \{(b,n),(b,b),(n,b),(n,n)\}$.

2. $A_1 = \{(b,n),(b,b)\}$, $A_2 = \{(b,b),(n,b)\}$.

3. Скористатися тим, що $\{E\} = B_1 \cap B_2$, де $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.

4. 1) $p_1 + p_2 - p_1 p_2$; 2) $P_n^*((b,n)) = p_1(1-p_2)$, $P_n^*((b,b)) = p_1 p_2$, $P_n^*((n,b)) = p_2(1-p_1)$, $P_n^*((n,n)) = (1-p_1)(1-p_2)$.

5. Лише коли $p_2 = p_1 = \dfrac{1}{2}$.

21. 1. $0{,}7^2 \cdot 0{,}8^3$. 2. $\Omega = \{(x_1 x_2 y_1 y_2 y_3)$: кожне x_i та $y_i \in \{1,0\}\}$.

3. $A = \{(1,1,1,1,1)\}$. 4. Ні.

22. $0{,}72$. **23.** 1. Так. 2. Ні. **24.** $\dfrac{1}{360}$. **25.** 1) $\dfrac{1}{22}$; 2) $\dfrac{7}{44}$; 3) $\dfrac{37}{44}$; 4) $\dfrac{21}{22}$.

8.

1. 1, 2, 4 – ні; 3, 5, 6, 7 – так. **2.** 1) $\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}$.

3. Від супротивного. **4.** 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{8}{30}$. **5.** $0{,}328$. **6.** $0{,}168$.

7. $1 - \prod_{k=1}^{10}(1-p_k)$. **8.** $0{,}9496$. **9.** $0{,}625$ і $0{,}3125$.

10. 1) $0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003$; 2) а) $\dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}98}{0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003}$; б) $\dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}02}{1-(0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003)}$.

11. $1 - \dfrac{95^5}{96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}$. **12.** 1) $0{,}126$; 2) $0{,}004$.

13. 1) $0{,}003$; 2) $1-\frac{9}{10}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{49}{50}$; 3) $0{,}0191$; 4) $0{,}997$.

14. $0{,}5$. **15.** 1. 1) $\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{51}$; 2) $\frac{1}{8}-(\frac{1}{2})^{52}$; 3) $\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{51}$. 2. $(\frac{1}{2})^{50}$.

9.

1. 1, 5, 7, 9, 11 – ні; 2, 3, 4, 6, 8, 10 – так.
2 – 8. Скористатися КЗМ, наприклад GRANом.
9. 1. 1) ні; 2) так. 2. Скористатися GRANом;
3. $P_n^*(\{0,2\})=0{,}4$; $P_n^*(\{4,6\})=0{,}6$.

10. 1.

x_i	1	2	3	4
p_i	$0{,}3$	$0{,}7\cdot 0{,}3$	$0{,}7^2\cdot 0{,}3$	$0{,}7^3$

2. Скористатися КЗМ.
3. 1) $P_n^*(\{2,3,4\})=0{,}7$; 2) $P_n^*(\{1,2,3\})=0{,}657$.

11. 1.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Скористатися КЗМ.
3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

12. 1.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. Скористатися КЗМ.
3. 1) $\frac{15}{16}$; 2) $\frac{1}{4}$.

10.

1. 1, 4 – ні; 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – так.
2 – 5. Скористатися КЗМ.

6. 1. $$f_n^*(x)=\begin{cases}5, \text{ коли } 0\le x<0{,}1,\\ 2, \text{ коли } 0{,}1\le x<0{,}2,\\ 1, \text{ коли } 0{,}2\le x<0{,}4,\\ 0{,}4, \text{ коли } 0{,}4\le x<0{,}5,\\ 0, \text{ коли } 0{,}5\le x<0{,}6,\\ 0{,}2, \text{ коли } 0{,}6\le x<0{,}7, \text{ або } 0{,}8\le x<0{,}9,\\ 0{,}1, \text{ коли } 0{,}7\le x<0{,}8, \text{ або } 0{,}9\le x<1.\end{cases}$$

2.

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\frac{1}{10})$	$[\frac{1}{10};\frac{2}{10})$	$[\frac{2}{10};\frac{3}{10})$	$[\frac{3}{10};\frac{4}{10})$	$[\frac{4}{10};\frac{5}{10})$
n_i	50	20	10	10	4
p_i	0,5	0,2	0,1	0,1	0,04

	$[\frac{5}{10};\frac{6}{10})$	$[\frac{6}{10};\frac{7}{10})$	$[\frac{7}{10};\frac{8}{10})$	$[\frac{8}{10};\frac{9}{10})$	$[\frac{9}{10};1)$
	0	2	1	2	1
	0	0,02	0,01	0,02	0,01

3. $0{,}32$.

7. 1. 1) ні; 2) так.

2. $f_n^*(x)=\begin{cases}0{,}05, \text{коли}\, 0\le x<2,\\ 0{,}2, \text{коли}\, 2\le x<3,\\ 0{,}3, \text{коли}\, 3\le x<4,\\ 0{,}4, \text{коли}\, 4\le x<5.\end{cases}$

3. Скористатися КЗМ. $f_n^*(x)$ неперервна і диференційована на $[0;5)$ за виключенням точок $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$; $\dfrac{d\, f_n^*(x)}{dx}=0$, коли $x\in[0;5)\setminus\{2,3,4\}$.

11.

1. 1, 2, 5, 7, 8 – так; 3, 4, 6 – ні.

2. 1) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли}\, x\le -1,\\ 0{,}25, \text{коли}\, -1<x\le 0,\\ 0{,}75, \text{коли}\, 0<x\le 1,\\ 1, \text{коли}\, x>1;\end{cases}$

2) скористатися КЗМ.

3. і **4.** Скористатися відповідними означеннями.

5. Скористатися КЗМ.

6. 1)

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

1. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 2, \\ \frac{1}{15}, \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{4}{15}, \text{коли } 3 < x \le 4, \\ \frac{6}{15}, \text{коли } 4 < x \le 5, \\ \frac{10}{15}, \text{коли } 5 < x \le 6, \\ 1, \text{коли } x > 6. \end{cases}$

2. Скористатися КЗМ.

3. Скрізь, крім точок 2, 3, 4, 5, 6, в яких $F_n^*(x)$ має розрив першого роду.

2)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{80}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{7}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$	$\frac{7}{80}$

1. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 1, \\ \frac{1}{80}, \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \frac{3}{80}, \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{6}{80}, \text{коли } 3 < x \le 4, \\ \frac{13}{80}, \text{коли } 4 < x \le 5, \\ \frac{28}{80}, \text{коли } 5 < x \le 6, \\ \frac{48}{80}, \text{коли } 6 < x \le 7, \\ \frac{63}{80}, \text{коли } 7 < x \le 8, \\ \frac{73}{80}, \text{коли } 8 < x \le 9, \\ 1, \text{коли } x > 9. \end{cases}$

2. Скористатися КЗМ.

3. $F_n^*(x)$ неперервна скрізь, крім точок $x \in \overline{1,9}$, в яких вона має розрив першого роду.

8. 1. $C = \frac{5}{24}$.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 1, \\ \frac{1}{2}, \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \frac{5}{8}, \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{20}{24}, \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

3. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна і диференційована, крім точок $x \in \overline{1,4}$, в яких вона має розрив першого роду; $\frac{d\, F_n^*(x)}{dx} = 0$, коли $x \notin \overline{1,4}$.

9. 1. $C_1 + C_2 = \frac{5}{9}$, $C_1 \ge 0, C_2 \ge 0$. Наприклад, $C_1 = \frac{2}{9}$, $C_2 = \frac{3}{9}$.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 1, \\ \frac{1}{3}, \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \frac{5}{9}, \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{8}{9}, \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

3. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна і диференційована, крім точок $x \in \overline{1,4}$, в яких вона має розрив першого роду; $\frac{d\, F_n^*(x)}{dx} = 0$, коли $x \notin \overline{1,4}$.

10. 1. $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{5}, \text{коли } 0<x\le 1,\\ \frac{2}{5}, \text{коли } 1<x\le 3,\\ \frac{3}{5}, \text{коли } 3<x\le 4,\\ \frac{4}{5}, \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1, \text{коли } x>6.\end{cases}$

2.

x_i	0	1	3	4	6
n_i	6	6	6	6	6
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

11 – 15. Скористатися КЗМ.

12.

1. 1, 3, 7 – так; 2, 4, 5, 6 – ні.
2. Скористатися КЗМ.
3. Скористатися відповідними означеннями.

4. Оскільки $F_n^*(x)=b_i+C_i(x-a_{i-1}), a_{i-1}\le x<a_i$, то $\frac{d\,F_n^*(x)}{dx}=C_i$, коли $a_{i-1}<x<a_i$ і тому ця похідна може не існувати лише у точках $a_i, i\in\overline{0,k}$.

5. Скористатися КЗМ.

6. 1. $C=\frac{4}{5}$.

2. $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ x, \text{коли } 0<x\le \frac{1}{3},\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{5}(x-\frac{1}{3}), \text{коли } \frac{1}{3}<x\le\frac{8}{9},\\ \frac{7}{9}+2(x-\frac{8}{9}), \text{коли } \frac{8}{9}<x\le 1,\\ 1, \text{коли } x>1.\end{cases}$

3. Скористатися КЗМ.

4. $f_n^*(x) = \dfrac{d\,F_n^*(x)}{dx}$, коли $x \notin \{0, \frac{1}{3}, \frac{8}{9}, 1\}$.

7. 1. $C_1 = \dfrac{1}{3}$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$.

2. Скористатися КЗМ.

3. $$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x < 0, \\ 2, \text{коли } 0 < x < \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}, \text{коли } \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4}{3}, \text{коли } \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}, \\ 0, \text{коли } x > \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

У точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ і 1 функція $f_n^*(x)$ не визначена, проте ці значення не впливають на $F_n^*(x)$, тому їх можна визначити довільно.

8. 1. Так.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le \dfrac{1}{4}, \\ 2\,(x - \dfrac{1}{4}), \text{коли } \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}(x - \dfrac{1}{2}), \text{коли } \dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}(x - \dfrac{3}{4}), \text{коли } \dfrac{3}{4} < x \le 1, \\ 1, \text{коли } x > 1. \end{cases}$$

3. $f_n^*(x)=\begin{cases}0,\text{коли } x<\frac{1}{4},\\ 2,\text{коли } \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2},\\ \frac{2}{3},\text{коли } \frac{1}{2}<x<\frac{3}{4},\\ \frac{4}{3},\text{коли } \frac{3}{4}<x<1,\\ 0,\text{коли } x>1.\end{cases}$

4. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна, $f_n^*(x)$ розривна лише у точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ і 1. Обидві функції недиференційовані лише у вказаних точках.

5. $\frac{d\,F_n^*(x)}{dx}=f_n^*(x)$, коли $x\notin\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$.

9. 1. $\Omega=\{(г,е),(г,м),(г,з),(\bar{г},е),(\bar{г},м),(\bar{г},з)\}$.

2. Якщо висловити відповідність $(г,е)\leftrightarrow 1$, $(г,м)\leftrightarrow 2$, $(г,з)\leftrightarrow 3$, $(\bar{г},е)\leftrightarrow 4$, $(\bar{г},м)\leftrightarrow 5$, $(\bar{г},з)\leftrightarrow 6$, то спостереженні значення можна тлумачити як числа.

3. 1) так; 2) ні.

4.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,25	0,17	0,15	0,30	0,03

Далі скористатися КЗМ.

6. 1) $P_n^*(A)=P_n^*(\{1,2,3\})=0{,}52$;

2) $P_n^*(B)=P_n^*(\{2,5\})=0{,}55$;

3) $P_n^*(\overline{A})=0{,}48=P_n^*(C)$;

7. нема. 8. 1) ні; 2) ні.

10. 1. 1) $k=\frac{1}{4}$ і розподіл неперервний; 2) $k=2$ і розподіл неперервний.

2. Скористатися КЗМ.

3. 1) $f_n^*(x)=\begin{cases}0,\text{коли } x<0,\\ \frac{1}{4},\text{коли } 0<x<3,\\ 0,\text{коли } x>3,\end{cases}$ 2) $f_n^*(x)=\begin{cases}0,\text{коли } x<0,\\ 2,\text{коли } 0<x<\frac{1}{2},\\ 0,\text{коли } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

4. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0.

11. Ні.

12 – 14. Скористатися КЗМ.

13.

1. 1, 2, 4 – так; 3, 5 – ні. **2 – 3.** Скористатися КЗМ.

4. $m_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_i (F_n^*(x_{i+1}) - F_n^*(x_i))$, де x_{k+1} – будь-яке число, що є більшим за x_k; $D_n^* = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m_n^*)^2 (F_n^*(x_{i+1}) - F_n^*(x_i))$; $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

5. 1) $m_n^* = \frac{39}{15}$; $D_n^* = \frac{39^2}{15^3} + \frac{9^2 \cdot 2}{15^3} + \frac{6^2 \cdot 4}{15^3} + \frac{21^2 \cdot 5}{15^3}$; $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

2) $m_n^* = 3{,}8$; $D_n^* = 4{,}8^2 \cdot 0{,}1 + 2{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}3$.

3) $m_n^* = \frac{14}{5}$; $D_n^* = \frac{14^2}{5^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{6^2}{5^3} + \frac{16^2}{5^3}$.

6. Скористатися відповідними означеннями.

7. 1. $m_n^* = 1 - p$; $D_n^* = p(1-p)$; $\sigma_n^* = \sqrt{p(1-p)}$.

2. $m_n^* = 2 - p$; $D_n^* = p(1-p)$; $\sigma_n^* = \sqrt{p(1-p)}$.

8. 1.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. $m_n^* = 3$; $D_n^* = 2$; $\sigma_n^* = \sqrt{2}$.

9*.

x_i	1	2	…	r
p_i	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	…	$\frac{1}{r}$

$m_n^* = \frac{r+1}{2}$; $D_n^* = \frac{1}{r}((\frac{r-1}{2})^2 + (\frac{r-3}{2})^2 + \ldots + (\frac{r-(2r-1)}{2})^2)$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

14.

1. 1, 2, 4 – так; 3, 5 – ні. **2 – 3.** Скористатися КЗМ.

4. $m_n^* = b - \int_a^b F_n^*(x)\,dx$; $D_n^* = 2\int_a^b (b-x)\,F_n^*(x)\,dx - (\int_a^b F_n^*(x)\,dx)^2$.

5. 1. $m_n^* = \frac{1}{3}$, $D_n^* = \frac{1}{81} - \frac{1}{9\cdot 12^3} + \frac{4}{9}\frac{125}{12^3} - \frac{16}{9}\frac{1}{12^3}$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

2. $m_n^* = \frac{1}{2}$, $D_n^* = \frac{1}{12}$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

3. $m_n^* = \frac{3}{2}$; $D_n^* = \frac{3}{4}$, $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $m_n^* = \frac{1}{4}$, $D_n^* = \frac{1}{48}$, $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

6. Скористатися відповідним означенням.

7. 1. Скористатися відповідними означеннями.

2. $m_n^* = \frac{1}{2}$, $D_n^* = \frac{1}{12}$; $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

15.

1. 1, 3, 5, 6 – ні; 2, 4, 7, 8 – так.

2. $1-(1-p)^m$. **3.** 1. 1) $P_n^*(B_{9,5}) = C_9^5(\frac{1}{2})^9$; 2) $P_n^*(B_{9,4}) = C_9^4(\frac{1}{2})^9$.

2. $P_n^*(B_{9,4}) = P_n^*(B_{9,5})$. 3. $P_n^*(B_{9,s}) = C_9^s(\frac{1}{2})^9, s \in \overline{0,9}$.

3. $P_n^*(B_{20,s}) = C_{20}^s(\frac{1}{2})^{20}$; $P_n^*(B_{20,5}) > P_n^*(B_{20,4})$.

4. Використати метод математичної індукції.

5. $\Omega_1^4 = \{(A,A,A,A),(A,A,A,\overline{A}),(A,A,\overline{A},A),(A,\overline{A},A,A),(\overline{A},A,A,A),$
$(A,A,\overline{A},\overline{A}),(A,\overline{A},\overline{A},A),(\overline{A},\overline{A},A,A),(A,\overline{A},A,\overline{A}),(\overline{A},A,A,\overline{A})(\overline{A},A,\overline{A},A),$
$(A,\overline{A},\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},A\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},\overline{A},A,\overline{A}),(\overline{A},\overline{A},\overline{A},A),(\overline{A},\overline{A},\overline{A},\overline{A})\}$;

$A_1 = \{(A,A,A,A),(A,A,A,\overline{A}),(A,A,\overline{A},A),(A,\overline{A},A,A),$
$(A,A,\overline{A},\overline{A}),(A,\overline{A},\overline{A},A),(A,\overline{A},A,\overline{A}),(A,\overline{A},\overline{A},\overline{A})\}$;

$A_2 = \{(A,A,A,A),(A,A,A,\overline{A}),(A,A,\overline{A},A),(\overline{A},A,A,A),$
$(A,A,\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},AA,\overline{A}),(\overline{A},A,\overline{A},A),(\overline{A},A,\overline{A},\overline{A})\}$;

$A_3 = \{(A,A,A,A),(A,A,A,\overline{A}),(A,\overline{A},A,A),(\overline{A},A,A,A),$
$(\overline{A},\overline{A},A,A),(A,\overline{A}A,\overline{A}),(\overline{A},A,A,\overline{A}),(\overline{A},\overline{A},A,\overline{A})\}$;

$A_4 = \{(A,A,A,A),(A,A,\overline{A},A),(A,\overline{A},A,A),(\overline{A},A,A,A),$

$(A,\overline{A},\overline{A},A),(\overline{A},\overline{A}A,A),(\overline{A},A,\overline{A},A),(\overline{A},\overline{A},\overline{A},A)\}$.

6. 1) $A_k=\{(E_1,\ldots,E_m)\in\Omega_1^m : E_k=A\}$, k – фіксоване, $k\in\overline{1,m}$;

2) $\overline{A}_k=\{(E_1,\ldots,E_m)\in\Omega_1^m : E_k=\overline{A}\}$;

3) $A_1+\ldots+A_m=\{E=(E_1,\ldots,E_m)\in\Omega_1^m : E\neq(\overline{A},\ldots,\overline{A})\}$;

4) $B_{m,s}$ складається з тих $E=(E_1,\ldots,E_m)\in\Omega_1^m$, у яких рівно s координат – це A, а інші $(m-s)$ координат – це $\overline{A}$.

5) $B_{m,s}=\sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_s\}}\prod\limits_{k=1}^{s}A_{i_k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{m-s}\overline{A}_{j_k}$, де сума береться по усіляким $\{i_1,\ldots,i_s\}\subset\overline{1,m}$, а $\{j_1,\ldots,j_{m-s}\}=\overline{1,m}\setminus\{i_1,\ldots,i_s\}$;

6) $\widetilde{P}_m^*(A_1+\ldots+A_m)=1-(1-p)^m$; 7) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})=C_m^s p^s(1-p)^{m-s}$.

7. Дивись задачу **6**.3.

8. $1-(\frac{5}{6})^4$. **9.** $1-(\frac{35}{36})^{24}$; $1-(\frac{5}{6})^4>1-(\frac{35}{36})^{24}$.

10. 1) $\frac{1002}{1024}$; 2) $\frac{252}{1024}$.

11. 1. $C_{10}^i(\frac{1}{5})^i(\frac{4}{5})^{10-i}, i\in\overline{0,10}$. 2. $i_0=[(10+1)\frac{1}{5}]=2$.

3. $C_{10}^1\frac{1}{5}\cdot(\frac{4}{5})^9+C_{10}^2(\frac{1}{5})^2\cdot(\frac{4}{5})^8+C_{10}^3(\frac{1}{5})^3\cdot(\frac{4}{5})^7$.

12. 1. $1-(0{,}99)^{200}-200(0{,}99)^{199}\cdot0{,}01-\frac{200\cdot199}{2}(0{,}99)^{198}\cdot(0{,}01)^2-$

$-\frac{200\cdot199\cdot198}{3!}(0{,}99)^{197}\cdot(0{,}01)^3$.

2. $s_0=2$. 3. Полігон відносних частот близький до графіка функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\cdot0{,}99}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4\cdot0{,}99}}$.

13. 1. $C_{10}^2(\frac{1}{5})^2\cdot(\frac{4}{5})^3$. 2. 1) $s_0=2$; 2) $s_0=20$.

3. $\widetilde{P}_{10}(i)=C_{10}^i(\frac{1}{5})^i(\frac{4}{5})^{10-i}, i\in\overline{0,10}$.

1) i; 2) скористатися КЗМ;

3) $m_{10}^*=2$; $D_{10}^*=\frac{8}{5}$; $\sigma_{10}^*=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

14.* $P_m^*(i)=C_m^i p^i(1-p)^{m-i}$. 2. $s_0=[(m+1)p]$.

3. 3) $m_m^*=mp$. $D_{m^*}=mp(1-p)$, $\sigma_{m^*}=\sqrt{mp(1-p)}$

15. 1) $(\frac{1}{12})^6$; 2) $C_6^3(\frac{1}{12})^3\cdot(\frac{11}{12})^3$; 3) $\frac{1}{12}C_6^2(\frac{1}{12})^i\cdot(\frac{11}{12})^{6-i}, i\in\overline{0,6}$.

16. 1. $1-(\frac{499}{500})^{500}-\frac{3}{2}-(\frac{499}{500})^{499}$.

2. $s_0=1$.

17. $n\geq\frac{2-\lg 5}{2-\lg 99}$.

18. 1) $C_5^3(0{,}51)^3\cdot(0{,}49)^2$; 2) $(0{,}49)^5+5(0{,}51)\cdot(0{,}49)^4+10(0{,}51)^2(0{,}49)^3$;

3) $C_5^3(0{,}51)^3\cdot(0{,}49)^2+C_5^4(0{,}51)^4\cdot 0{,}49+(0{,}51)^5$.

19. 1) $5\cdot(0{,}2)(0{,}8)^4$; 2) $1-(0{,}8)^5$; 3) $(0{,}8)^5$; 4) $(0{,}2)^5$.

20. 1) $C_{100}^{10}\cdot(0{,}1)^{10}\cdot(0{,}9)^{90}$; 2) $\sum_{i=5}^{9}C_{100}^{i}\cdot(0{,}1)^i\cdot(0{,}9)^{100-i}$;

3) $\sum_{i=0}^{20}C_{100}^{i}\cdot(0{,}1)^i\cdot(0{,}9)^{100-i}$.

21. 1) – 2) $p(1-p)^3$; 3) $p(1-p)^3-p(1-p)^3$.

22. 1. 1) $C_9^i(0{,}2)^i(0{,}8)^{9-i}, i\in\overline{0{,}9}$; 2) $1-(0{,}8)^9-9(0{,}2)\cdot(0{,}8)^8$;

3) $\sum_{i=0}^{3}C_9^i\cdot(0{,}2)^i\cdot(0{,}8)^{9-i}$; 4) $1-(0{,}8)^9$.

2. $s_0=1$ або $s_0-1=1$; $\widetilde{P}_9^*(\{1,2\})=3{,}6\cdot(0{,}8)^8$.

23. 1. 1) $1-(0{,}99)^{1000}$; 2) $C_{1000}^3\cdot(0{,}01)^3\cdot(0{,}99)^{997}$;

3) $\sum_{i=0}^{3}C_{1000}^i\cdot(0{,}01)^i\cdot(0{,}99)^{1000-i}$.

2. $s_0=10$; $\widetilde{P}_{1000}^*(10)=C_{1000}^{10}(0{,}01)^{10}\cdot(0{,}99)^{990}$.

24. 1 1) $C_5^i(0{,}5)^5, i\in\overline{0{,}5}$; 2) $1-(0{,}5)^5$; 3) $\sum_{i=3}^{5}C_5^i\cdot(0{,}5)^5$.

2. $s_0=3$ або $s_0-1=2$; $P_5^*(\{2,3\})=20\cdot(0{,}5)^5$;

3. $m\geq\frac{2-\lg 5}{1-\lg 5}$.

25. 1. 1) $C_{10}^i(0{,}8)^i(0{,}2)^{10-i}, i\in\overline{0{,}10}$;

2) $10\cdot(0{,}8)^9\cdot 0{,}2+(0{,}8)^{10}$; 3) $1-(0{,}8)^{10}$.

2. $s_0=80$; $\widetilde{P}_{10}^*(8)=C_{10}^8(0{,}8)^8\cdot(0{,}2)^2$.

26. $s_0=6$; $S_{\text{вип}}=72000$.

27. 1. $s_0=2$. 2. $\widetilde{P}_{20000}^*(2)=C_{20000}^2(0{,}0001)^2\cdot(0{,}9999)^{19999}$.

3. За 2 дні.

16.

1. 1, 3, 5, 6, 7 – так, 2, 4 – ні.

2. 1) $S = S^*$, $X(\Gamma) = 0$, $X(Ц) = 1$ є випадковою величиною.

2) $S \neq S^*$, $S_X = S_X^*$, $X(\Gamma) = 0$, $X(Ц) = 1$ – не є випадковою величиною.

3. 1. $S = S^*$ і тому будь-яка функція $X(E)$, $E \in \Omega$ є випадковою величиною.

2. Ні.

4. Так. **5.** Так. **6.** Дивись задачі **2-5.**

7. Якщо $S = S^*$, то $X^{-1}(B) \in S$ для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$.

8. Якщо $S \neq S^*$, то існує $B \subset \Omega : B \notin S$, а тому функція $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E \in B, \\ 0, \text{коли } E \notin B, \end{cases}$ не є випадковою величиною, коли $S_X \neq \{\varnothing, \Omega_X\}$.

9. $S_X = \{\varnothing, \{-1,1\}, \{-1\}, \{1\}\}$. 1), 2) Якщо $A \in S$, то $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, а якщо $A \notin S$, то не є; 3) $P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(A)$, $P_{nX}^*(\{-1\}) = 1 - P_n^*(A)$.

10. 1. Так, вона є S-вимірною.

2. $P_{nX}^*(\{a\}) = 0$, коли $a < 0$,

$P_{nX}^*(\{a\}) = \lim\limits_{k\to\infty}(P_n^*((-\sqrt{a+\frac{1}{k}}; \sqrt{a+\frac{1}{k}})) - P_n^*((-\sqrt{a}; \sqrt{a}))$, коли $a \geq 0$.

11. Скористатися тим, що коли $f(x)$ неперервна на $\Omega = (a;b)$, то множина $(f < c)$ є відкритою для будь-якого числа c, а тому є об'єднанням своїх складових інтервалів.

12. 1. Дивись задачу **2.** 2. Якщо $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E = \Gamma, \\ 0, \text{коли } E = Ц, \end{cases}$ то $P_{nX}^*(1) = P_n^*(\Gamma)$, $P_{nX}^*(0) = P_n^*(Ц)$.

13. 1. 1) $\Omega = \{(x,x,x), (x,x,д), (x,д,д), (д,д,д)\}$;

2) $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$; 3) $S = S^*$; 4) $S \neq S^*$, а $S_X = S_X^*$.

2. Якщо $S = S^*$ і $S_X = S_X^*$ та $P_n^*(E) = \frac{1}{4}$, $E \in \Omega$, то $P_{nX}^*(i) = \frac{1}{4}$, $i \in \overline{0,3}$.

14. 1. 1) $\Omega = \{с, нс, ннс, \ldots, \underbrace{н\ldots н}_{k-1}с, \ldots\}$.

2) $X(\underbrace{н\ldots н}_{k-1}с) = k$, тобто $\Omega_X = \{1, 2, \ldots\}$.

3) $S = S^*$; 4) $S \neq S^*$, а $S_X = S_X^*$.

2. Якщо $S = S^*$ і $S_X = S_X^*$, то $P_{nX}^*(k) = (0{,}03)^{k-1} \cdot 0{,}97$.

15. Скористатися рівністю $(X = x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} (x_0 \leq X < x_0 + \frac{1}{i})$.

16. Скористатися задачею **15** і тим, що $(X < C) = \sum_k (X = x_{i_k})$, де x_{i_k} – ті значення X, що є меншими за C.

17. 1. Якщо $\Omega_1^m = \{E = (E_1, \ldots, E_m) : E_i = A$ або $E_i = \overline{A}, i \in \overline{1,m}\}$, то $X(E) = k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, де k – кількість координат $E_i = A$.

2. $S_m = S_m^*$, $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = p^i (1-p)^{m-i}$, де i – кількість координат $E_i = A$, а $p = P_n^*(A)$,

3. $X^{-1}(x_0) = (X = x_0) = B_{m, x_0}, x_0 \in \overline{0, m}$;
$\tilde{P}_m^*(X^{-1}(x_0)) = C_m^{x_0} p^{x_0} (1-p)^{m - x_0}$.

4. Якщо змінити S так, щоб $S_m \neq S_m^*$, а $S_{mX} = S_{mX}^*$, то $X(E)$ вже не буде випадковою величиною.

17.

1. 1, 3, 6, 8, 10, 11, 14 – ні; 2, 5, 7, 9, 12, 13 – так.

2. Розглянути випадки: 1) $A = B \neq \Omega$; 2) $A = B = \Omega$; 3) $A \neq B = \Omega$; 4) $\Omega \neq A \neq B \neq \Omega$, $AB \neq \varnothing$; 5) $B \neq \Omega \neq A$, $A \bigcap B = \varnothing$.

3. $X(E) = E$, $E \in [0;1)$. **4.** $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E \in A, \\ 0, \text{коли } E \notin A, A \notin S \end{cases}$.

5. Довести, що $(|X| < C) = \begin{cases} \varnothing, \text{коли } C \leq 0, \\ (X < C) \cdot (X > -C), \text{коли } C > 0, \end{cases}$

6. 1. Скористатися відповідними означеннями. 2. Ні. 3. Так. **7.** Ні.

8. 1. $\Omega_1^3 = \{E = (E_1, E_2, E_3) : E_i = A$ або $E_i = \overline{A}, i \in \overline{1,3}\}$,

$$X_k((E_1, E_2, E_3)) = \begin{cases} 1, \text{коли } E_k = A, \\ 0, \text{коли } E_k \neq A. \end{cases}.$$

2. $\Omega_Y = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $P_{nY}^*(0) = (1-p)^3$, $P_{nY}^*(\frac{1}{3}) = 3p(1-p)^2$,
$P_{nY}^*(\frac{2}{3}) = 3p^2(1-p)$, $P_{nY}^*(1) = p^3$.

3. $Y(E)$ задає усі можливі значення $P_3^*(A)$.

9. 1. 1) – так; 4) і 7) – так або ні в залежності від простору S.
2), 3), 5), 6) – ні.

2. 1) 4)

x_k	-1	1
p_k	$P_n^*(\overline{A})$	$P_n^*(A)$

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

7)

x_k	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	m
p_k	$(1-p)^m$	$mp(1-p)^{m-1}$	$\ldots$	$C_m^k(1-p)^{m-k}$	$\ldots$	p^m

10. Довести, що $(X = x_0) = \prod_{i=1}^{\infty}(\Omega - (X < x_0) - (X < x_0 + \frac{1}{i}))$ обернене твердження не є правильним.

11. Скористатися твердженням 1 задачі **6***.

12. 1) ні; 2) так; 3) так, коли $C = 0{,}4$ та ні, коли $C \neq 0{,}4$.

13. 1)

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2)

x_i	0	1	2	3
p_i	$0{,}49 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5 +$ $+0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 +$ $+0{,}49 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 +$ $+0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 +$ $+0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5$

14. 1) $P_n^*(A_i) = p \in (0;1)$; $X(E) = X(E_1, E_2, E_3, E_4) = C_4^i p^i (1-p)^{4-i}$, де $E_k \in \{A, \overline{A}\}$ і серед E_k рівно i дорівнює A, а інші – $\overline{A}$.

x_i	$0/4$	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$
p_i	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

2)

x_i	$0/4$	$1/4$
p_i	$(1-p_1)(1-p_2)\cdot$ $(1-p_3)(1-p_n)$	$p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_n) + (1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4) +$ $+(1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4) + (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4$

$4/4$	$2/4$	$3/4$
$p_1p_2p_3p_4$	$p_1p_2(1-p_3)(1-p_4) + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4) +$ $+(1-p_1)(1-p_2)p_3p_4 + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4 +$ $+p_1(1-p_2)p_3(1-p_4) + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4$	$p_1p_2p_3(1-p_4) +$ $+(1-p_1)p_2p_3p_4 +$ $+p_1(1-p_2)p_3p_4 +$ $+p_1p_2(1-p_3)p_4$

15. а) 1)

$x_i + y_n$	-1	0	1	2	3
P_m	0,02	0,09	0,26	0,33	0,3

2)

$x_i y_n$	-2	-1	0	1	2
P_m	0,12	0,06	0,37	0,15	0,3

б) вказати розподіли не можна.

18.

1. 1. Має, проте обчислити їх можна не єдиним способом.
2, 3, 4, 6 – так; 5, 7, 8, 9 – ні.

2. 1. $M_n^*[X] = \frac{7}{2}$; $D_n^*[X] = \frac{1}{6}(\frac{50}{4} + \frac{18}{4} + \frac{2}{4}) = \frac{35}{12}$.

2. $M_n^*[X] = \frac{5}{2}$; $D_n^*[X] = \frac{5}{4}$.

3. $M_n^*[X] \approx a \approx D_n^*[X]$.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. Скористатися тим, що $m = \min x_i \le x_i \le M = \max x_i$, а $\left| x - M_n^*[X] \right| \le (M - m)$.

5. $3:1$. **6.** $3:1$. **7.** $11:5$. **8.** $M_n^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $D_n^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_n^*[X])^2$.

9. 1) $M_m^*[X] = mp$; $D_m^*[X] = mp(1-p)$; 2) $M_m^*[X] = 20$; $D_m^*[X] = 19{,}8$;

3) $M_m^*[X] = \frac{1-(1-p)^5}{p}$;

$$D_n^*[X] = \sum_{i=1}^{4}(i - M_n^*[X])^2 p(1-p)^{i-1} + (5 - M_n^*[X])^2 (1-p)^4.$$

10. $M_n^*[X] = 1{,}5$; $D_n^*[X] = 2{,}25 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}38 + 0{,}25 \cdot 0{,}56$.

11. 1. $\Omega = \{(i, j) : i \in \overline{1{,}6},\ j \in \overline{1{,}6}\}$, $S = S^*$, $P_n^*(E) = \frac{1}{36}, E \in \Omega$.

1)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) $M_n^*[X] = 7$; $D_n^*[X] = \frac{35}{6}$.

3) $A_2 = \Omega_X = \{2, 3, \ldots, 12\}$; $A_6 = \{6, 7, \ldots, 12\}$, $A_{12} = \{12\}$.

2. Якщо $S=\{\varnothing,\Omega,\{(1,1)\},\Omega-\{(1,1)\}\}$, а $S_X=S_X^*$, то $X(E), E\in\Omega$, не є випадковою величиною.

12. 1) Наприклад, $X(E)$ і $Y(E)$, $E\in\Omega$ – індикатори подій A і $\overline{A}$ відповідно;

2) $(X+Y)(E)\equiv 1$, $(X\cdot Y)(E)\equiv 0$;

3) величини X та Y залежні.

4. Лише перша рівність виконується.

13.* Скористатися тим, що $(M_n^*[XY])^2 - M_n^*[X^2]\cdot M_n^*[Y^2]$ може бути дискримінантом квадратного тричлена $M_n[X^2]\cdot t^2 - 2t\,M_n[XY]+$ $+M_n[Y^2]=f(t)$.

14.*Розкрити дужки і скористатися властивістю

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, M_n^*[X_i].$$

19.

1. 1, 2, 3, 4, 5, 7 – так; 6 – ні.

2. 1. $m>250$. 2. $m>5000$. 3. $m>25000000$.

3. Скористатися відповідними означеннями.

20.

1. 1, 2, 3, 4, 5, 7 – так, 6 – ні.

2-5. Скористатися КЗМ.

6. 1. Ω складається з усіляких сполучень з N кульок по n, $S=S^*$,

$P_n^*(E)=\dfrac{1}{C_N^n}, E\in\Omega$.

2. Скористатися формулою $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

3. $M_n^*[X]=\dfrac{N_1 n}{N}$; $D_n^*[X]=\dfrac{nN_1(N-N_1)}{N^2}(1-\dfrac{n-1}{N-1})$.

7-9. Для самостійної роботи.

Зміст