also changes in the content of labor education; updating the content of labor training based on knowledge of production, which will promote a holistic view of the industrial culture accumulated by our civilization; coverage of the contents of the invariant and variational component in the structure of labor education; the definition of labor education at school is the basis for the formation of the technological culture of students, among which the culture of work, graphic informative, entrepreneurial, ecological, consumer, project culture, design culture, human relationships and everyday life are distinguished; revealing the study of the level of formation of elements of technological culture of students, as a criterion for the effectiveness of their technological preparation.

Along with this, the study of the organization of labor education of students enabled V. Sidorenko to identify and reveal the influence of local, systemic, global and supra-system factors on the current state of labor education. The scientist saw the priority tasks for its improvement in: development, scientific substantiation, and implementation of an effective program of development of labor education in Ukraine; a large-scale explanation of the importance of work and the need for students to master the modern technological (labor) culture and the application of a variety of technological innovations; providing pedagogical teams with increasing student interest in scientific and technological activities.

Consequently, the pedagogical views of the scientist on the labor education of students reflected the realities of the development of the national education system. They were aimed at increasing the productivity of the educational process of school students and should be taken into account by theorists and practitioners whose justifications became the basis of the content of labor training in the new Ukrainian school.

Keywords: *content of education, knowledge of production, invariant component, V. Sidorenko, technological culture of students, technological education, labor training.*

УДК 378

Козяр М. М., Крівцов В. В.

ПРО ДОЦІЛЬНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПРОЕКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

В статті на прикладах побудови центральних проекцій точок прямої, паралельних прямих, нескінченно віддалених точок прямих, які лежать в одній площині, запропоновано методику пояснення утворення невласних елементів в проективному просторі у зв'язку з виконанням у ньому операцій проекціювання. Наведено приклад застосування невласних елементів при поясненні побудови перспективних зображень. Показано доцільність використання принципу двоїстості під час вивчення студентами положень нарисної геометрії.

Ключові слова: *графічна компетентність, просторова уява, мислення, проекціювання, нарисна геометрія, проективна геометрія, перспективні зображення.*

Нарисна геометрія входить до дисциплін математичного та природничого циклу підготовки бакалавра і складає основу графічної компетентності майбутнього фахівця.

Опанування теоретичними положеннями нарисної геометрії неможливо без розгляду методів проекціювання геометричних об'єктів простору, на яких ґрунтується виконання та читання різноманітних технічних та будівельних креслень. Тому важливим є виробити у студентів системний підхід до викладу методів проекціювання. Застосування елементів проективної геометрії у нарисній геометрії, дозволить систематизувати й узагальнити одержані знання, закріпити уміння і навички та перетворити процес теоретичної підготовки в його практичний досвід під час побудови перспективних зображень.

Питання графічної компетентності в наукових та педагогічних працях розглядають у різних напрямках. Так, загальні аспекти графічної підготовки майбутніх фахівців викладено в працях А. М. Гедзика, О. М. Джеджули, М. М. Козяра, І. Д. Нищака, Г. О. Райковської та ін.; основні методичні аспекти викладання нарисної геометрії викладено в працях А. В. Бубеннікова, В. М. Гордона, С. М. Ковальова, Ю. І. Короєва, В. Є. Михайленка, Н. А. Риніна, Н. Л. Рускевича, Д. І. Ткача, С. А. Фролова, М. Ф. Четверухіна тощо.

Графічні дисципліни, і зокрема нарисна геометрія, закладають фундамент графічної компетентності майбутнього фахівця, і впливає на формування прийоми мислення й просторової уяви. На їх розвиток значною мірою впливає виклад навчального матеріалу з проекціювання геометричних елементів (точок, прямих, площин, поверхонь) на площини в рамках евклідової геометрії.

Незважаючи на те, що методи проекціювання широко застосовуються у графічній підготовці майбутнього фахівця, їх обґрунтуванні під час побудови перспективних зображень об'єктів приділяється недостатньо уваги.

Метою статті є висвітлення сутності використання елементів проективної геометрії для дидактичного супроводу дисципліни "Нарисна геометрія", що забезпечує повний дидактичний цикл її навчання й призначено для оптимізації оволодіння майбутнім фахівцем графічною компетентністю у рамках навчальної дисципліни.

Найважливішим аспектом впровадження такого підходу в освітній процес є формування в майбутніх фахівців прийомів мислення й просторової уяви; оволодіння навичками алгоритмічного мислення й графічного аналізу; формування вміння логічно міркувати та розвиток здатності розуміти сутність методів проекціювання.

Вивчення нарисної геометрії в технічних вищих навчальних закладах починають з розгляду сутності методів проекціювання: центрального, паралельного та ортогонального. Їх описання здійснюється в рамках евклідової геометрії, що вивчається в школі. Відмічається, що різні методи проекціювання мають інваріантні властивості [4, 3]. Проте, якщо при центральному проекціюванні студентам зрозуміло як відбувається утворення проекцій фігури за наявністю фіксованого власного центра проекціювання, то при паралельному прокціюванні цей центр відносять в нескінченність, а проекціюючі прямі проводять паралельно до заданого напряму проекціювання. Студентам не завжди зрозумілий зв'язок між знаходженням центра проекціювання в нескінченності і утворенням при цьому паралельних проекціюючих прямих. Це приводить до формальної побудови студентами паралельних та ортогональних проекцій, без розуміння того, що наслідком віднесення центра проекціювання в нескінченність є реконструкція евклідового простору в проективний простір, який доповняється такими новими елементами як "нескінченно віддалена точка, пряма, площина" і де різниці між звичайними та нескінченно віддаленими елементами немає.

Авторами запропонована методика пояснення утворення невласних елементів в проективному просторі у зв'язку з виконанням у ньому операцій проекціювання. Зображемо апарат центрального проекціювання (рис. 1).

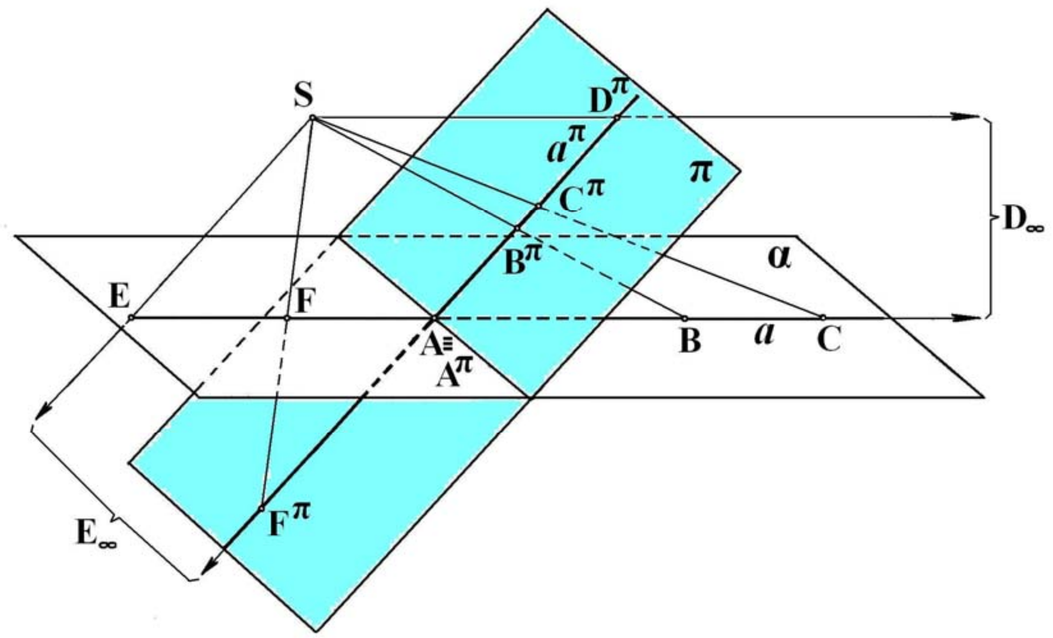

Рис. 1. Побудова центральних проекцій точок прямої а на площині проекцій π

Припустимо, що проекціювання виконується на площину π, а центром проекціювання слугуватиме точка S. З центра S будемо проекціювати точки A, B, C, F прямої a на площину проекцій π. Пряму a для більшої наочності і наступних пояснень заключаємо в площину α. Проекції A^π, B^π, C^π, F^π відповідних точок прямої *а* отримано в результаті перетину проекціюючих прямих SA, SB, SC, SF з площиною π. Маємо, що кожній точці прямої *а* відповідає точка-проекція прямої a^π. Обернено: кожній точці-проекції прямої a^π відповідає точка на прямій a. Отже, між точками прямої a і точками-проекціями прямої a^{π} встановлено взаємно-однозначну відповідність. Проте будемо мати два випадки порушення цієї відповідності.

Так, точку D^{π} на прямій a^{π} утворено в результаті перетину проекціюючої прямої SD^{π} з площиною π, причому SD^{π} // *а*. Із цього слідує, що точка D^{π} є проекцією не існуючої точки прямої a, оскільки за геометрією Евкліда, дві паралельні прямі не перетинаються, а, отже, пряма a не є безперервною. Таким чином, точечна відповідність між прямими a і a^{π} має суттєвий недолік. Для його усунення, без якого неможливо здійснювати центральне проекціювання, французький вчений Дезарг запропонував вважати, що D^{π} є проекцією нескінченно віддаленої точки D_{∞} прямої a, тобто $D_{\infty} = SD^{\pi} \parallel a$ і $D^{\pi} = SD^{\pi} \cap \pi$. Звідси випливає, що точка D_{∞} належить як прямій *а* так і проекціюючій прямій SD^{π}, тобто прямі a і SD^{π} перетинаються в спільній нескінченно віддаленій точці D_{∞}, яку називають невласною точкою прямої *а* на відміну від власних точок евклідового простору. Таке доповнення простору у вигляді невласної точки прямої дозволяє встановити повну відповідність між точками прямої і її проекціями на площині: кожна точка прямої a буде мати відповідну точку-проекцію на прямій a^{π}, причому нескінченно віддаленій точці D_{∞} прямої a відповідає звичайна точка D^{π}, а, отже, немає різниці між звичайними та нескінченно віддаленими (невласними) точками і пряма *а* є безперервною прямою. Якщо проекціююча пряма стане паралельною до a^{π} і перетне площину α в точці E, то цю точку можна розглядати як проекцію на площині α нескінченно віддаленої точки E_{∞} прямої a^{π}.

Таким чином, увівши в евклідову геометрію поняття невласних або нескінченно віддалених елементів можна констатувати, що дві паралельні прямі перетинаються в нескінченно віддаленій (невласній) точці, а площина і паралельна до неї пряма також перетинаються в нескінченно віддаленій (невласній) точці. Остання трактовка зрозуміла, якщо пригадати, що пряма, паралельна до площини, якщо вона паралельна до прямої цієї площини.

На рис. 2 в площині α проведено взаємно паралельні прямі a, b, c. На площині π будуємо їх центральні проекції a^{π}, b^{π}, c^{π}. Видно, що всі проекції прямих перетинаються в точці F^{π}, яка є проекцією нескінченно віддалених точок A_{∞}, B_{∞}, C_{∞} прямих a, b, c ($F^{\pi} = SF^{\pi} \parallel a, b, c$ і $F^{\pi} = SF^{\pi} \cap \pi$). Звідси випливає, що всі взаємно паралельні прямі перетинаються в нескінченно віддаленій точці F_{∞}, тобто мають спільну точку F_{∞}, центральною проекцією якої є точка F^{π}. Таким чином, маємо ще один узагальнений висновок: всі взаємно паралельні прямі перетинаються в спільній нескінченно віддаленій (невласній) точці, а, отже, спосіб паралельного або ортогонального проекціювання являє собою лише частковим випадком центрального проекціювання, коли центром проекціювання є невласна точка.

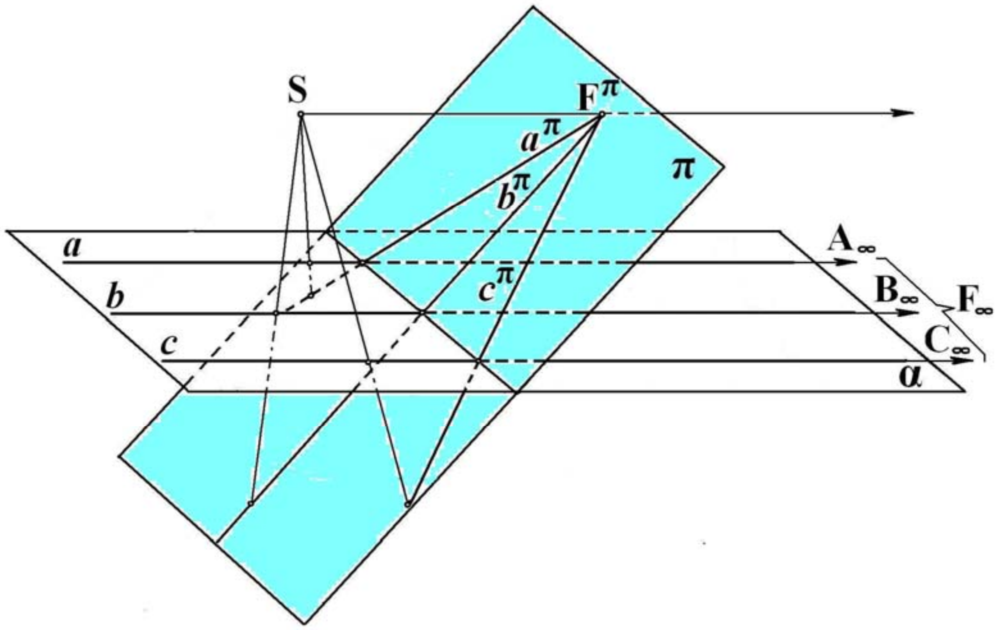

Рис. 2. Побудова центральних проекцій паралельних прямих a, b, c на площині проекцій π

Наведемо один з прикладів застосування невласних елементів під час вивчення теоретичних положень нарисної геометрії. Так, при виконанні перспективних зображень головною задачею є побудова перспективи прямої лінії. Для цього знаходять перспективи двох її характерних точок – картинного сліду прямої (точки перетину прямої з картинною площиною) і нескінченно віддаленої точки. На рис. 3 наведено побудову перспективи прямих NF_{∞}, $N_1F_{1\infty}$, паралельних між собою і до предметної площини. Враховуючи, що паралельні прямі перетинаються в одній спільній невласній точці, то можна заключити, що самі прямі NF_{∞}, $N_1F_{1\infty}$ та їх вторинні проекції $N^{/}F^{/}_{\infty}$, $N^{/}_1F^{/}_{1\infty}$, перетинаються у нескінченно віддаленій точці, центральна (перспективна) проекція якої знаходиться у точці $F^{к}$, де $F^{к} = SF^{к} {}^{//} NF_{\infty}$, $N_1F_{1\infty}$, $N^{/}F^{/}_{\infty}$, $N^{/}_1F^{/}_{1\infty}$ і $F^{к} = SF^{к} \cap К$. Отже, завдяки уведенню невласних елементів, студентам становиться зрозумілим, чому перспективи паралельних прямих мають спільну точку $F^{к}$, яку називають точкою сходу паралельних прямих.

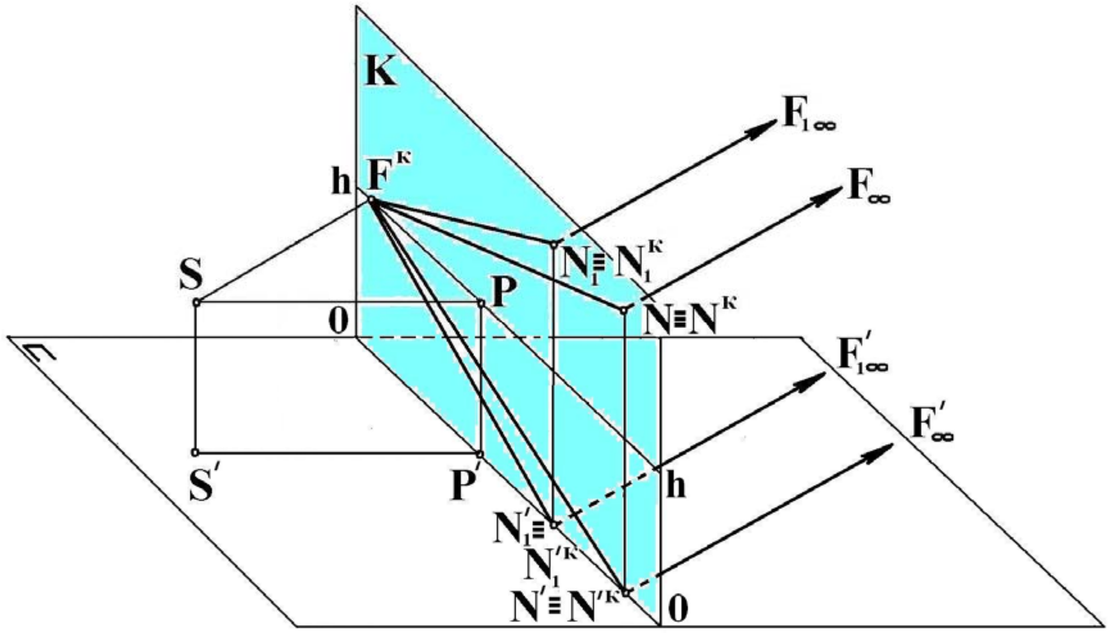

Рис. 3. Побудова перспективи нескінченно віддалених точок прямих NF_∞, $N_1F_{1\infty}$, паралельних між собою і до предметної площини

На рис. 4 в площині α проведено прямі a, b, c. На площині π отримаємо центральні проекції нескінченно віддалених точок цих прямих. Для цього з центра проекціювання S проведемо прямі, паралельні до a, b, c, які утворюють площину β, паралельну до α. Точки A^π, B^π, C^π розміщені на лінії перетину l^π площини β з площиною α, причому l^π єдина пряма площини π, яка не є проекцією якої-небудь прямої площини α. Точки A_∞, B_∞, C_∞ належать як площині α, так і площині β. Ці точки належать нескінченно віддаленій прямій l_∞, яка, в свою чергу, належить водночас площинам α і β, тобто паралельні площини α і β мають спільну невласну (нескінченно віддалену) пряму l_∞, а l^π є її центральною проекцією.

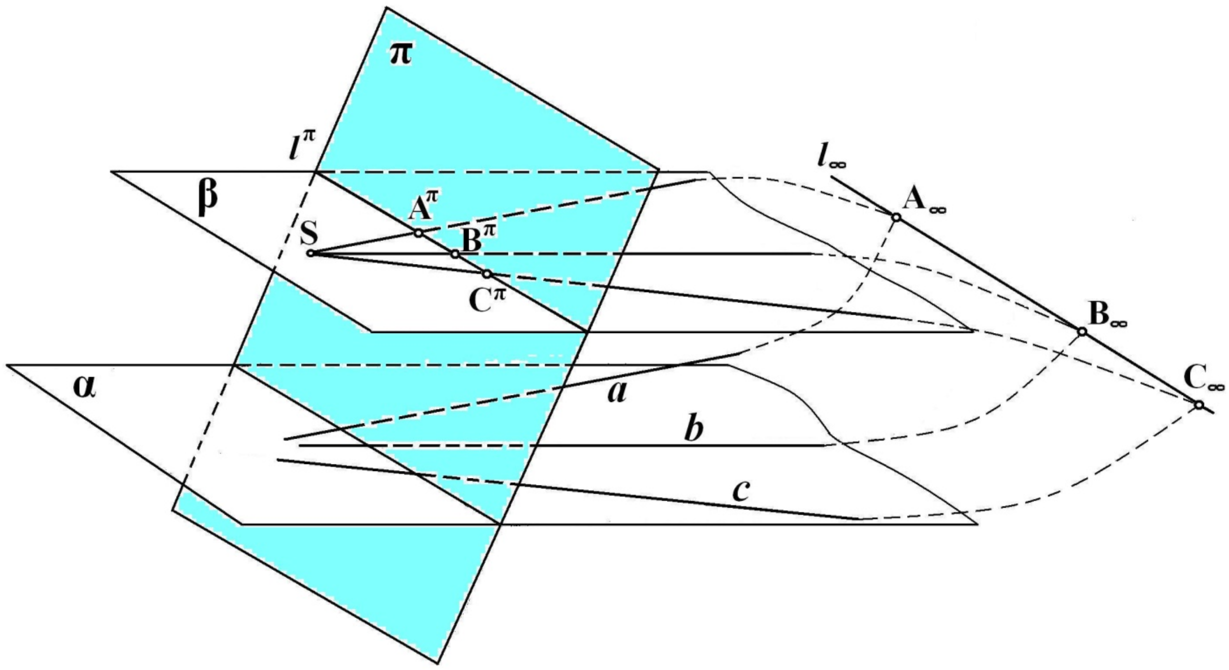

Рис. 4. Побудова на площині проекцій π центральних проекцій нескінченно віддалених точок прямих a, b, c, які лежать в площині α

Таким чином, доповнення евклідового простору невласними елементами дозволяє заключити, що дві паралельні площини перетинаються по невласній, нескінченно віддаленій, прямій лінії. Сукупність взаємно паралельних площин буде також мати одну спільну невласну пряму, по якій вони будуть перетинатися.

Одним із важливих положень проективної геометрії є принцип двоїстості, який студенти повинні знати, вивчаючи нарисну геометрію [1]. Сутність його полягає у тому, що в просторі існує строга аналогія між двома групами понять. Якщо у вірному твердженні або проективній теоремі слово "точка" замінити на "площину", "площину" – на "точку", "об'єднання або союз" – на "перетин", а слово "пряма" залишити без змін, то отримане із першого твердження інше також буде вірним. Наведемо приклади, які пояснюють студентам сутність принципу двоїстості.

Приклад 1. Через дві нетотожні точки A і B проходить пряма c (в результаті об'єднання або союзу A і B отримано c), рис. 5. За принципом двоїстості можна стверджувати: Якщо площини α і β не тотожні, то вони перетинаються по прямій c (власній або невласній), яка належить площинам α і β водночас (рис. 6).

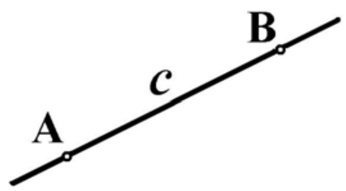

Рис. 5. Ілюстрація до твердження прикладу 1

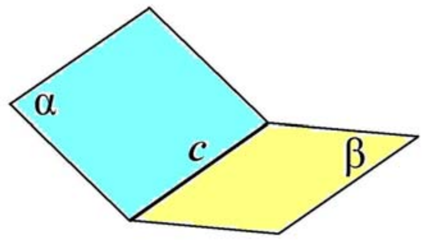

Рис. 6. Ілюстрація до двоїстого твердження прикладу1

Приклад 2. Точка A і пряма *c*, що не проходить через точку A, визначають площину α (в результаті об'єднання або союзу A і *c* утворюється α), рис. 7. За принципом двоїстості можна стверджувати: Якщо площина α не проходить через пряму *c*, то в результаті перетину α з *c* отримають точку A, яка належить α і *c* водночас (рис. 8).

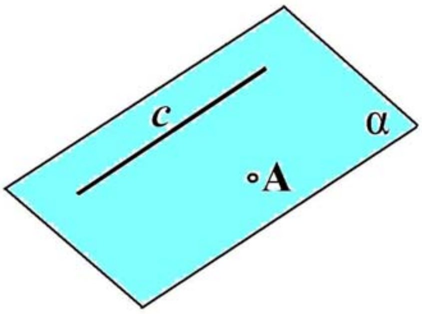

Рис.7. Ілюстрація до твердження прикладу 2

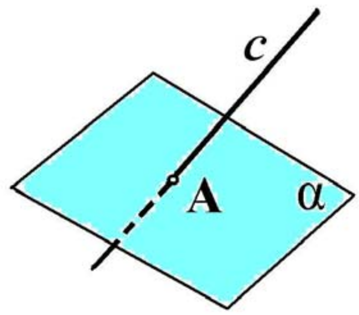

Рис. 8. Ілюстрація до двоїстого твердження прикладу 2

Приклад 3. Дві прямі *a* і *b*, що перетинаються у власній або невласній точці C, утворюють (визначають) площину ω (рис. 9). За принципом двоїстості можна стверджувати: Дві прямі *a* і *b*, що лежать в площині ω, перетинаються у власній або невласній точці C (якщо в результаті союзу *a* і *b* утворюється ω, то *a* і *b* перетинаються в точці C), рис. 9.

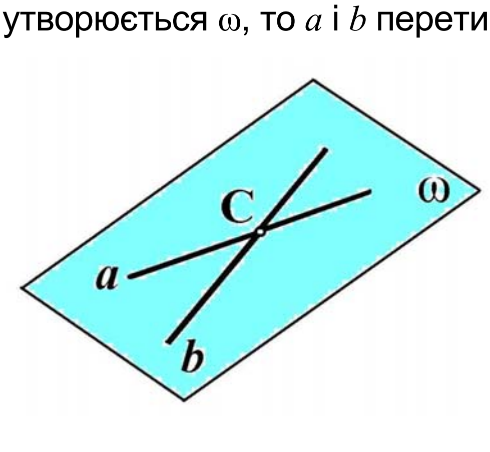

Рис. 9. Ілюстрація до твердження та двоїстому йому твердженню прикладу 3

Приклад 4. Три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій, визначають площину ω (об'єднання A, B і C утворює ω), рис. 10. За принципом двоїстості можна стверджувати: Три площини α, β і ν, що не проходять через одну пряму, визначають точку F, в якій вони перетинаються (F належить α, β і ν), рис. 11.

Приклад 5. Якщо дві точки A і B належать прямій *a* (союз A і B визначає *a*), яка, в свою чергу, належить площині α, то кожна точка C, що належить прямій *a*, буде належити площині α (рис. 12). За принципом двоїстості можна стверджувати: Якщо дві площини α і β перетинаються по прямій *c*, якій належить точка A, то кожній площині, наприклад ω, що проходить через пряму *c*, буде належити точка A (рис. 13).

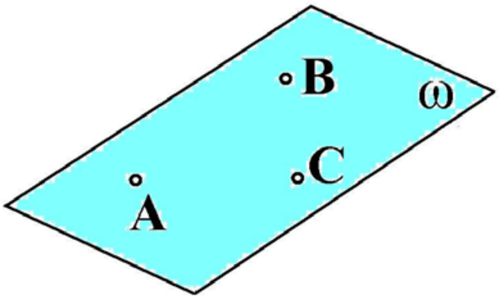

Рис. 10. Ілюстрація до твердження прикладу 4

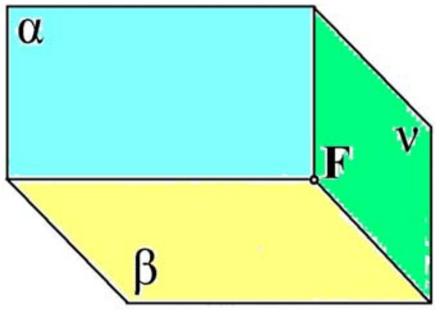

Рис. 11. Ілюстрація до двоїстого твердження прикладу 4

Принцип двоїстості вносить певний порядок в багатьох положеннях нарисної геометрії [2]. Він дає можливість здійснити їх взаємозв'язок цілком природним шляхом, що сприяє розвиту дисципліни: знаючи одну теорему, можна формально-логічно вивести двоїсту їй. Довівши істину одного положення, немає потреби доводити справедливість двоїстого йому положення, оскільки принцип двоїстості забезпечує останньому істину. Достатньо скласти план розв'язування однієї з двох двоїстих задач, а план другої можна отримати заміною слів.

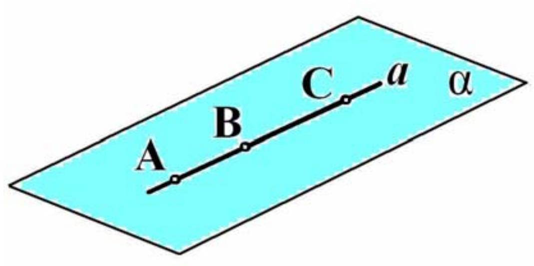

Рис. 12. Ілюстрація до твердження прикладу 5

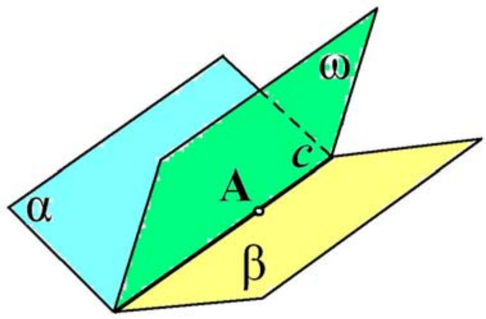

Рис. 13. Ілюстрація до двоїстого твердження прикладу 5

Висновки. Підсумовуючи вище викладене, можна зробити висновок, що важливою складовою у вивченні нарисної геометрії має стати застосування елементів проективної геометрії у навчальному процесі, адже лише за таких умов, майбутній фахівець краще розуміє сутність методів проекціювання. Цей підхід може бути використаний не лише у поясненні нового матеріалу, але й для закріплення і узагальнення знань з нарисної геометрії.

Використана література:

1. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.
2. *Королевич А. И.* Геометрия графического отображения / А. И. Королевич. – Львов : Изд-во Львовского ун-та, 1968. – 280 с.
3. *Фролов С. А.* Начертательная геометрия / С. А. Фроллов. – Москва : Машиностроение, 1983. – 240 с.
4. *Чеверухин Н. Ф.* Начертательная геометрия / Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов. – Москва : Высшая школа, 1963. – 420 с.

References:

1. *Yefimov N. V.* Vysshaya geometriya / N. V. Yefimov. – Moskva : Nauka, 1971. – 576 s.
2. *Korolevich A. I.* Geometriya graficheskogo otobrazheniya / A. I. Korolevich. – Lvov : Izd-vo Lvovskogo un-ta, 1968. – 280 s.
3. *Frolov S. A.* Nachertatelnaya geometriya / S. A. Frollov. – Moskva : Mashinostroenie, 1983. – 240 s.
4. *Cheverukhin N. F.* Nachertatelnaya geometriya / N. F. Chetverukhin, V. S. Levitskiy, Z. I. Pryanishnikova, A. M. Tevlin, G. I. Fedotov. – Moskva : Vysshaya shkola, 1963. – 420 s.

Козяр Н. Н., Кривцов В. В. О целесообразности применения элементов проективной геометрии при изучении начертательной геометрии.

В статье на примерах построения центральных проекций точек прямой, параллельных прямых, бесконечно удаленных точек прямых, лежащих в одной плоскости, предложена методика объяснения образования несобственных элементов в проективном пространстве в связи с выполнением в нем операций проецирования. Приведен пример применения несобственных элементов при объяснении построения перспективных изображений. Показана целесообразность использования принципа двойственности при изучении студентами положений начертательной геометрии.

Ключевые слова: *графическая компетентность, пространственное воображение, мышление, проецирование, начертательная геометрия, проективная геометрия, перспективные изображения.*

Kozyar M. M., Krivtsov V. V. About the accuracy of application of project geometry elements under the study of narison geometry.

For students-first-year students, the position of the written geometry is extremely difficult to master, in particular, it is difficult for them to perceive the fact that projection lines drawn from the center of projection, located at infinity, are parallel. This leads to the formal construction of parallel and orthogonal projections by students, without realizing that the reconstruction of the Euclidean space into a projective is the consequence of assigning the projection center to infinity. In the article, in the examples of constructing central projections of points of a straight line, parallel straight lines, infinitely distant straight lines, which lie in the same plane, we propose a method for explaining the formation of inefficient elements in a projective space in connection with the execution of projection operations in it. An example of the use of inappropriate elements in the explanation of the construction of perspective images is given. It is shown the expediency of using the principle of duality when students study the positions of descriptive geometry.

Keywords: *graphic competence, spatial imagination, thinking, projection, pictorial geometry, projective geometry, perspective images.*