ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

УДК 372.851

Айстраханов Д. Д.
Інститут професійно-технічної освіти
Національної академії педагогічних наук України,
Максименко Д. В.
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ПРО БАЗОВІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У статті розглядаються базові поняття аналізу: границя та похідна. Розглядаються питання виникнення цих понять. Наводяться багато прикладів використання похідної в природничих науках. Метою роботи є складання методики викладання елементів диференціального числення, яка базується на прикладах, що добре відомі учням або студентам. Як показує досвід, такий спосіб викладання є найбільш ефективним з точки зору розуміння студентами.

***Ключові слова**: вища математика, границя, похідна, застосування похідної*

Більш ніж п’яти річний досвід роботи на кафедрі вищої математики в Київському будівельному університеті поставив мене перед такою проблемою. Програма з вищої математики не змінювалася протягом кількох десятиліть, більшість викладачів пристосувалися до неї і формально правильно проводять заняття зі студентами – тобто послідовно і логічно строго викладають необхідний матеріал. Але після дворічного курсу математики більшість студентів, на жаль, не мають жодного уявлення про те, як використовувати математичний апарат на практиці, в прикладних науках – фізиці, механіці, гідравліці, опорі матеріалів тощо. Через це викладачі цих прикладних наук вимушені подавати свій матеріал примітивно, описуючи різноманітні часткові випадки замість того, щоб формулювати загальні закони, використовуючи математичний інструментарій. В чому ж корінь проблеми?

Ще 20 років назад така методика викладання математики в вищих навчальних закладах була задовільна. Але зараз ситуація змінилася. Темпи нашого життя зросли в декілька разів. Вільного часу не вистачає на освоєння знань. Щоб знайти студенту вільний час для вивчення чогось, в нашому випадку математики, необхідно його зацікавити, розповісти популярно як і для чого потрібен той чи інший математичний інструмент. Математика є абстрактною наукою, але всі свої базові поняття вона бере з природи. Викладаючи математику, потрібно завжди про це пам'ятати.

Метою роботи є розгляд понять "границя" та "похідна" – базових понять математичного аналізу, – з точки зору мотивування студентів.

Одним з базових понять у математичному аналізі і його додатках є поняття границі. У класичних курсах з вищої математики спочатку дається визначення границі числової послідовності, а потім границі функції. З технічного боку ці визначення досить складні, до того ж, вони сформульовані на так званій символьній "мові ε – δ". Для початкового ж знайомства важлива не стільки строгість визначень, скільки закладені в них ідеї. На жаль, для початкового сприйняття логічно строгий виклад матеріалу приховує ці ідеї або робить їх не достатньо ясними. Тому, для початкового знайомства, потрібно викладати ці поняття для студентів в більш природних і звичних термінах, при цьому жертвуючи, звичайно, математичною строгістю.

У підручниках з опору матеріалів, гідравліці, будівельної механіки, теорії пружності тощо поняття похідної та інтеграла використовуються досить природньо, як само собою зрозуміле, без докладних пояснень "як?" і "чому?". Адже насправді ці математичні поняття – це елементи, інструмент абстрагування різних явищ, розглянутих названими дисциплінами. У комплексі ці інструменти складають так званий математичний апарат. Використовуючи його, для початку розглянемо декілька простих прикладів різних явищ зі шкільної програми фізики, – з тим, щоб переконатися, наскільки природним чином проявляються в них ідеї похідної. Почнемо з базового поняття, яке буде постійно використовуватися надалі – поняття границі послідовності .

Границя числової послідовності.

Уявімо вільний маятник (наприклад, підвішений висок). Відхилимо його на деякий кут від вертикальної осі і відпустимо. Внаслідок тертя (об повітря, в точці підвісу) його коливання будуть, звичайно, затухаючими . Позначимо через x_n кут максимального відхилення маятника від вертикальної осі при n-му коливанні. У такій спосіб ми отримаємо послідовність дійсних чисел x_1, x_2, x_3, ... Так як коливання затухають, то зрозуміло, що зі зростанням n числа x_n будуть все менше і менше відрізнятися від числа нуль. У цьому випадку послідовність чисел x_1, x_2, x_3, ... збігається до числа нуль, або має границю рівну числу нуль , і позначають $x_n \to 0$, $n \to \infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (позначення походить від грецького слова limit, що означає "границя".

Інший приклад. Ви поклали на банківський рахунок грошову суму S під

10% річних. Припустимо, що відсотки нараховуються щомісяця, причому відсотки нараховуються не тільки на початкову суму S, але і на вже нараховані відсотки (так звана капіталізація вкладу). Тоді сума вкладу після першого місяця буде дорівнювати $S+S\,\frac{0{,}1}{12}=S\,(1+\frac{0{,}1}{12})$. Після другого місяця: $S\,(1+\frac{0{,}1}{12})+S\,(1+\frac{0{,}1}{12})\,\frac{0{,}1}{12}=S\,(1+\frac{0{,}1}{12})^2$. Після третього: $S\,(1+\frac{0{,}1}{12})^2+S\,(1+\frac{0{,}1}{12})^2\,\frac{0{,}1}{12}=S\,(1+\frac{0{,}1}{12})^3$ тощо. За рік сума стане рівнозначною $S\,(1+\frac{0{,}1}{12})^{12}$. Якщо відсотки нараховуватимуться не щомісяця, а щодня, то сума в кінці першого дня буде $S+S\,\frac{0{,}1}{365}=S\,(1+\frac{0{,}1}{365})$, в кінці другого дня $S\,(1+\frac{0{,}1}{365})+S\,(1+\frac{0{,}1}{365})\,\frac{0{,}1}{365}=S\,(1+\frac{0{,}1}{365})^2$ тощо. Наприкінці року сума дорівнюватиме $S\,(1+\frac{0{,}1}{365})^{365}$. Якщо ж відсотки нараховуються *n* раз за рік через рівні проміжки часу, то сума вкладу через рік буде дорівнювати $S\,(1+\frac{0{,}1}{n})^n$.

Припустимо тепер, що відсотки нараховуються безперервно, кожну мить, тобто число *n* необмежено зростає (такий спосіб нарахування відсотків, напевно, був би більш справедливим, оскільки грошова сума знаходиться весь час у банку. Але на практиці такий спосіб використовується вкрай рідко і причиною тому служить, певне, більш висока сума, що підлягає виплаті в кінці строку вкладу, в порівнянні із звичайним нарахуванням). Тоді, використовуючи вже відомі позначення, ми можемо що границя становить $S\,e^{0{,}1}$ (в цьому випадку число *e = 2,* записати, сума вкладу в кінці року стане рівною $\lim\limits_{n\to\infty} S\,(1+\frac{0{,}1}{n})^n$. Відомо, *71828* – основа натуральних логарифмів). Також зауважимо, що число е можна визначити як $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, що майже збігається з виразом для суми вкладу в кінці року при безперервному нарахуванні відсотків з річною ставкою в 100%.

Таким чином, послідовність чисел x_1, x_2, x_3, ... збігається (прямує) з числом *x*, якщо починати з деякого номера, де всі елементи цієї послідовності майже не відрізняються від числа *x*. Для математики фрази типу “дуже мало відрізняються”, “майже рівні” тощо. з очевидних причин не зовсім прийнятні. Щоб уникнути їх використання, доводиться конкретизувати всі деталі при описі, що призводить до досить громіздких викладок. Наприклад, загальноприйняте визначення границі послідовності виглядає так:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathrm{N} \; \forall n \geq n_0 : \left| x_n - x \right| < \varepsilon$$

де символ $\forall$, – квантор загальності – означає "для будь-кого", "для всіх" (походить від початкової букви англ. слова Any – "будь-який"), а символ $\exists$, – квантор існування – означає "існує" (походить від початкової букви англ. слова Exist – "існувати"). Таким чином, дане вище визначення границі на символьній мові читається наступним чином; "для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число n_0, що для всіх чисел n таких, що $n \geq n_0$ виконується співвідношення: $\left| x_n - x \right| < \varepsilon$. Як видно з цього прикладу, квантори $\forall$ і $\exists$ дозволяють значно спростити запис логічних виразів, які часто використовуються в математиці.

Слід зазначити, що не у всякої послідовності чисел існує границя. Наприклад, моменти часу *t_1, t_2, t_3 ,...* – моменти найбільшого відхилення маятника від вертикального положення (за початок відліку часу беремо момент початку коливань, а час вимірюємо, наприклад, в секундах) утворюють числову послідовність. Зрозуміло, що границі вона не має (послідовність *t_1, t_2, t_3 ,...* необмежено зростає). У таких випадках говорять, що послідовність розбігається .

Зауважимо, що ми вживали в математичних позначеннях символ нескінченності. Однак у реальному світі ми навряд чи зустрічаємося з нескінченністю. Використання символу дозволяє уникнути наближених рівностей, тобто рівностей типу $x \approx y$, замінивши їх на строгі рівності. Як би це не звучало парадоксально, але з наближеними рівностями у багатьох відношеннях працювати складніше, ніж з точними, оскільки відразу виникає питання: яка точність наближення, похибка, тобто виникає необхідність розгляду ще однієї величини – точності .

Границя функції.

Наступним базовим поняттям є границя функції. Але це поняття легко зводиться до вже розглянутого поняття "границя послідовності чисел". Наприклад, потрібно оцінити величину *y*, яка виражається через величину *x* за допомогою якогось (складного) співвідношення *y=F(x)*. Якщо ми знаємо, що *x* буде дуже мало відрізнятися від числа *a*, тобто *x* прямує до *a* (*x* → *a*), то що в цьому випадку ми можемо сказати про величину *y=F(x)*?

Нехай задана функція *F(x)* і число *a*. Говорять, що функція *F(x)* прямує до числа *A* при *x* → *a* (коли її аргумент *x* прямує до числа *a*), якщо для довільної послідовності *x_1, x_2, x_3, ...* , яка прямує до числа *a*, послідовність чисел *F(x_1), F(x_2), F(x_3), ...* прямує до числа *A*. Позначення: $\lim\limits_{x \to a} F(x) = A$. Це саме визначення можна сформулювати за допомогою вже знайомих вам кванторів (іноді говорять в “термінах *ε-δ*”): $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta),x\neq a:\ |F(x)-A|<\varepsilon$.

Розшифруемо: для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, щоб для довільних чисел $x\in(a-\delta,a+\delta),x\neq a$ виконувалось співвідношення $|F(x)-A|<\varepsilon$.

Іншими словами, поряд з точкою *a* завжди є точка *x* така, що значення функції *F* в цій точці *x* буде відрізнятися від числа *A* на будь-яку малу наперед задану величину.

Границі функції обчислюються аналогічно до границь числових послідовностей. При цьому перетворюють вираз для функції, якщо з’являються невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\left[\frac{0}{0}\right],[0\cdot\infty],[\infty-\infty]$.

Таким чином, поняття границі дозволяє уникнути вживання небажаних для математики фраз “майже дорівнює”, “дуже мало відрізняється” тощо.

Розглянуті поняття границі числової послідовності і границі функції служать основою для інших, більш складних математичних об’єктів, наприклад, таких як послідовність функцій, послідовність вектор-функцій (значеннями вектор-функцій є не числа, а вектори. Вектор- функції та їх послідовності зустрічаються при описі різних полів, потоків. Ідея границі тут та ж, що і для числових послідовностей, проте її реалізація для цих об’єктів виглядає складніше в технічному плані).

Похідна функції.

Розглянемо поняття “похідна функції”. Для цього звернемося до відомих понять з фізики. Наприклад, потужність. За визначенням – це зміна механічної енергії тіла за одиницю часу (робота за одиницю часу). Аналогічним є поняття швидкості – це зміна координати (пройдений шлях) за одиницю часу. Далі, сила струму – це кількість заряду, пройденого за одиницю часу через переріз провідника. Теплоємність тіла – це кількість тепла переданого тілу (прийнятого від тіла) для збільшення його температури на одиницю. Прискорення – це зміна швидкості за одиницю часу.

Неважко помітити , що ці визначення дуже схожі.

Розглянемо приклад зі швидкістю. Для цього представимо собі спідометр рухомого автомобіля. Його покази змінюються кожну мить (якщо, звичайно, швидкість автомобіля не постійна). Як він вимірює швидкість у момент часу *t*? Датчик фіксує кількість обертів валу, починаючи з моменту часу *t* до моменту $t+\Delta t$, тобто за проміжок часу рівний Δt, наприклад, *0,1* с. Оберти валу переводяться в довжину пройденого шляху Δx. Тоді швидкість авто у момент часу *t* природно визначити так: $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Але виникає питання: яке значення брати для Δt? Зрозуміло, що чим менше Δt, тим точніше ми визначимо швидкість у момент *t*, так звану “миттєву швидкість”. В ідеалі Δt має дорівнювати *0* (але це неможливо, тому що в цьому випадку шлях Δx також буде дорівнювати *0*). Щоб уникнути випадку $\Delta t = 0$, вводять таке визначення миттєвої швидкості в момент *t*:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1).$$

Якщо автомобіль рухається по прямій лінії за законом $x = x(t)$, тобто координата автомобіля в момент *t* рівна *x(t)*, тоді швидкість його в момент *t* визначається за тією ж формулою (1): $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

При цьому вираз $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ називається приростом функції $x = x(t)$ в точці *t*.

Якщо $v = v(t)$ – швидкість тіла, то **прискорення** (швидкість зміни швидкості) в момент часу *t* визначається так:

$$a(t) = \lim_{\Delta e \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta e \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Аналогічно визначають **потужність** в момент часу *t*. Якщо $W = W(t)$ – механічна енергія в момент *t*, то потужність *N* в момент *t* – це $N(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t}$.

Нагадаємо, що приріст механічної енергії ΔW називається роботою.

Також визначається **теплоємність** тіла $c(T)$ при температурі *T*. Якщо $U = U(T)$ – внутрішня енергія тіла з температурою Т., то при передачі йому тепла ΔQ (при цьому його температура збільшиться на ΔT, його внутрішня енергія отримає приріст $\Delta U = U(T + \Delta T) - U(T)$, рівний ΔQ. Тоді теплоємність визначається так:

$$c(T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{U(T + \Delta T) - U(T)}{\Delta T},$$

Аналогічно визначають силу струму в момент часу *t*. Якщо *q = q (t)* – величина заряду, що пройшла по провіднику за проміжок часу *[0, t]*, то сила струму *I (t)* у момент часу *t* визначається так:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t},$$

Неважко помітити, що всі ці величини визначені одноманітно за наступною схемою. За заданої функції *F (x)* (механічна енергія тіла *W (t)*, координата точки *x (t)*, внутрішня енергія *U (T)*, заряд *q (t)*, швидкість *v (t)*) будується нова функція, яка називається похідною функції *F (x)*, що позначається *F′(x)* або $\frac{dF}{dx}$, за правилом:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Таким чином, похідна – це відношення приросту функції ΔF до приросту аргумента Δx, коли останній прямує до нуля. Ми бачили, що приріст функції ΔF має ясну фізичну інтерпретацію. Це є однією з причин широкого застосування похідних в інженерних дослідженнях.

Коли $\Delta x \to 0$, тобто становиться нескінченно малою величиною, приріст функції $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$ також прагне до нуля (звичайно, є функції для яких останнє твердження хибне, але ми зараз розглядаємо так звані гладкі функції, які найчастіше зустрічаються в інженерних дослідженнях). У цьому випадку приріст прийнято позначати не Δx і ΔF, а dx і dF відповідно. Звідси походить інше позначення похідної: $\frac{dF}{dx}$.

Якщо ще раз подивитися на наведені вище приклади, то легко помітити, що :

1) потужність – це швидкість зміни повної механічної енергії щодо часу;

2) швидкість руху – це швидкість зміни координати щодо часу;

3) теплоємність – це швидкість зміни підведеного кількості теплоти до тіла щодо його температури;

4) сила струму – це швидкість зміни заряду, що проходить в провіднику щодо часу;

5) прискорення – це швидкість зміни швидкості щодо часу.

Тобто похідна функції *F(x)* – це швидкість зміни функції щодо параметра (змінної) *x* .

На похідну можна подивитися з дещо іншого боку. Для цього зафіксуємо довільне число *x* і візьмемо досить мале число Δx. На графіку функції *F(x)* візьмемо дві точки *M* і *P* з абсцисами *x* та *x*+Δx. Проведемо через них пряму (вона називається січна). Тоді справедливе співвідношення $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = tg\alpha$, де α – кут між додатнім напрямом осі *Ox* і січною *MP*. Тангенс цього кута називають ще кутовим коефіцієнтом прямої *MP*.

Якщо тепер зменшувати Δx – говорять, спрямувати Δx до нуля – то точка *P* буде наближатися до точки *M* і кут α, а разом з ним і $tg\alpha$ будуть змінюватися. При цьому пряма *MP* займе певне положення *MK*. Пряму *MK* називають дотичною до графіка функції в точці *x*. Таким чином, при переході до границі, коли $\Delta x \to 0$ в останньому співвідношенні, ми бачимо, що похідна функції *F(x)* в точці *x* – це $tg\varphi$, тангенс кута нахилу до додатного напрямку осі *Ox* дотичної до графіка функції, проведеної в точці з абсцисою *x*. Знаходження дотичних (дотичних прямих, дотичних площин) є важливим завданням, оскільки в досить малому околі точки дотику вони "добре" наближаються до графіка функції. При цьому криву можна розглядати як ламану лінію, що складається з величезного числа дотичних, проведених в точках, які стоять поруч. На екрані монітора, наприклад , при достатньому збільшенні, графік функції (крива) являє собою ламану лінію.

Отже, ми переконалися, що поняття похідної є математичною моделлю багатьох фізичних величин. Якщо до того ж врахувати, що більшість законів фізики (слово "фізика" походить від грецького слова "фізис", що означає "природа") пов'язують фізичні величини і швидкості їх зміни, тобто функції та їх похідні, то важливість поняття похідної стає очевидною.

Ми розглядали так звані функції однієї змінної. Але в реальному світі фізичні величини (функції) дуже рідко залежать від одного фактора (однієї змінної). Наприклад, температура в тілі залежить від часу *t* і трьох координат *x, y, z*, тобто температура є функцією чотирьох змінних *T=T(t,x,y,z)*. При дослідженні виникає, наприклад, питання про швидкість зміни температури з часом в якійсь певній точці тіла. Як і для функцій однієї змінної, тут знову виникає похідна. Оскільки змінних у функції три, то ця похідна буде називатися частинною похідною по змінній *t* і позначатися T_t' або $\frac{dT}{dt}$.

В и к о р и с т а н а л і т е р а т у р а :

1. *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд / Б. М. Болотовский. – Минск : Наука, 1985. – 256 с.
2. *Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович. – М. : АСТ, Астрель, 2001. – 656 с.

АЙСТРАХАНОВ Д. Д., МАКСИМЕНКО Д. В. О базовых понятиях математического анализа.

В статье рассматриваются базовые понятия анализа: граница и производная. Рассматриваются вопросы возникновения этих понятий. Приводятся много примеров использования производной в естественных науках. Целью данной работы является составление методики преподавания элементов дифференциального исчисления, основанной на примерах, которые хорошо известны учащимся или студентам. Как показывает опыт, такой способ преподавания является наиболее эффективным с точки зрения понимания студентами.

Ключевые слова*: высшая математика, граница, производная, применение производной.*

AYSTRAHANOV D. D., MAKSIMENKO D. V. On the basic concepts of mathematical analysis.
This article discusses the basic concepts of analysis: the boundary and the derivative. The work deals with the origin of these concepts. There are. provided many examples of the use of derivatives in the natural sciences . The aim of this work is to formulate methods of teaching the elements of the differential calculus , based on the examples that are well known to students. Experience shows that this method of teaching is the most effective in terms of students' understanding .
***Keywords**: higher mathematics , the boundary , the derivative , derivative use.*

УДК 37.013.77(092)

Антонець М. Я.
Інститут педагогіки НАПН України

ПСИХОПЕДАГОГІЧНА СУТНІСТЬ ДИДАКТИЧНИХ ПОГЛЯДІВ В. О. СУХОМЛИНСЬКОГО

У статті висвітлюється психопедагогічна сутність дидактичних поглядів В. О. Сухомлинського і показується їх актуальність для сучасного функціонування і подальшого розвитку освітньо-виховної теорії і практики.
***Ключові слова:** В. О. Сухомлинський, педагогічна спадщина, психопедагогіка, сутність, дидактичні погляди.*

Уже самі назви праць видатного українського педагога-гуманіста, публіциста і дитячого письменника Василя Олександровича Сухомлинського (1918–1970) – "Серце віддаю дітям", "Шлях до серця дитини", "Обережно: дитина!", "Людина – найвища цінність", "Як виховати справжню людину, "Як любити дітей", "Духовний світ школяра", "Людина неповторна" – свідчать про дитино- людиноцентричну спрямованість його творчого доробку.

Різні дидактичні аспекти у педагогічній спадщині В. О. Сухомлинського досліджували М. В. Богуславський, В. А. Василенко, В. Я. Волошина, М. М. Дубінка, М. І. Мухін, В. І. Лозова, А. М. Луцюк, А. Я. Розенберг, О. Я. Савченко та ін. ***Мета статті*** полягає у висвітлені психопедагогічної сутності дидактичних поглядів В. О. Сухомлинського і актуальності для сучасного функціонування і подальшого розвитку освітньо-виховної теорії і практики.

У книзі "Психопедагогіка. Психологічна теорія і практика навчання" Е. Стоунс підкреслює, що "*психопедагогіка* є застосування теоретичних принципів психології до практики навчання" [6, с. 21]. Він також стверджує, що "тільки завдяки вчителям, які будують свою діяльність у школі на певних теоретичних принципах ми можемо досягти суттєвого прогресу в теорії і практиці навчання" [там само, с. 452].