МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

ДЕКАНОВ Станіслав Якович

УДК 517.521.8

ТАУБЕРОВІ ТА МЕРСЕРОВІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Михалін Геннадій Олександрович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Київ – 2004

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. У середині XX ст. досить потужною галуззю математичного аналізу стала теорія підсумовування розбіжних рядів. На той час багато відомих математиків зробили свій внесок у цю теорію. Серед них Л. Ейлер, Н. Абель, С. Пуассон, Г. Харді, Дж. Літтлвуд, Ф. Борель, О. Гельдер, Е. Чезаро, А. Таубер, Р. Шмідт, Е. Ландау, О. Тепліц, К. Кнопп, М. Ріс, Р. Агнью, Н. Вінер, Г. Ф. Вороний, А. Г. Постніков, А. М. Колмогоров та багато інших. Монографія Г. Харді “Розбіжні ряди” [65] завершила класичний етап розвитку теорії підсумовування і дала поштовх новим дослідженням. На наступних етапах здійснювалося узагальнення класичних результатів у таких напрямах: 1) перехід від числових послідовностей та функцій до векторнозначних; 2) від однократних – до n-кратних; 3) вивчення нових видів збіжності; 4) урахування швидкості збіжності тощо. Просування в цих напрямах було нелегким, вимагало нових ідей, підходів, методів досліджень і досить часто приводило до вельми цікавих, навіть несподіваних, результатів.

Значний вклад у теорію підсумовування, зокрема, у тауберову теорію, вніс М. О. Давидов. У 1956 р. він розробив новий спосіб одержання тауберових теорем – “спосіб (c)-точок”. Давидовим було знайдено так звану (c)-властивість методів підсумовування Чезаро, з якої випливали як прості наслідки майже всі відомі раніше тауберові теореми для методів Чезаро. Постало питання про застосування аналогічного підходу до інших методів підсумовування.

Це питання продовжував вивчати М. О. Давидов разом із своїми учнями. При кафедрі математичного аналізу Київського педінституту під керівництвом Миколи Олексійовича розроблялися також такі питання як регулярність, консервативність, сумісність, включення, ефективність різних методів підсумовування, включення ядер, тауберові теореми та інші, діяв постійний семінар з теорії підсумовування розбіжних рядів. Багато результатів, отриманих представниками школи Давидова, є значно сильнішими за аналогічні результати інших математиків, у тому числі закордонних. Тому вони є, зокрема, гарним підгрунтям для проведення подальших досліджень.

Попри всю глибину і широту розробки теорії підсумовування, навіть у її центрі є ще багато нерозв'язаних питань як узагальнюючого, так і уточнюючого та доповнюючого характеру. Вкажемо деякі з них, що знайшли розв'язання у даній роботі.

По-перше, у мерсерових теоремах (тісно пов'язаних з неефективністю певних матриць) наводяться, переважно, тільки достатні умови. Природно виникає питання про послаблення цих умов і пошук необхідних або необхідних і достатніх умов у таких теоремах. З іншого боку, у мерсерових теоремах фігурують, як правило, числові параметри, котрі визначають певні класи неефективних матриць. Щоб дістати ширші класи неефективних матриць, можна спробувати замінити параметри-числа на параметри-послідовності.

По-друге, останнім часом почали з'являтися узагальнення класичних тауберових теорем шляхом заміни звичайної збіжності середніх статистичною збіжністю. Ці дослідження можна продовжувати, розглядаючи інші методи підсумовування простих і кратних послідовностей. При цьому, безумовно, доцільно застосовувати "спосіб (*c*)-точок" М. О. Давидова, який, до того ж, був удосконалений та узагальнений Г. О. Михаліним у 1989 р. і набув ширших можливостей застосування. Зрештою, і подальша розробка "способу (*c*)-точок" для різноманітних методів підсумовування є перспективною.

Прагнучи до якомога повніших результатів, бажано працювати у лінійному топологічному просторі, використовувати узагальнені види збіжності, а в тауберових теоремах досліджувати і залишки.

Все сказане обумовлює актуальність теми дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проводилося згідно з річними планами наукової роботи кафедри математичного аналізу НПУ імені М. П. Драгоманова.

Мета і завдання дослідження. Підсилення деяких мерсерових теорем, доведення (c)-властивостей деяких методів підсумовування простих і подвійних послідовностей у формі, яка дає тауберові теореми із залишком, а також одночасне узагальнення цих теорем на випадок статистичної збіжності або обмеженості середніх, причому для послідовностей, що набувають значень з дійсного віддільного, локально опуклого лінійного топологічного простору L, – все це є ***метою*** даного дисертаційного дослідження. Для досягнення мети потрібно виконати наступні ***завдання:***

1) застосовуючи нові методи доведення деяких мерсерових теорем, максимально послабити достатні умови, знайти необхідні та необхідні і достатні умови у цих теоремах;
2) в одній теоремі Рогозинських мерсерового типу замінити сталі коефіцієнти на функції;
3) сформулювати означення статистичної збіжності та обмеженості для простих і подвійних послідовностей, що набувають значень з простору L;
4) сформулювати якомога зручніше означення (c)-точок для простих і подвійних послідовностей з простору L;
5) знайти зв'язок між тауберовими умовами і (c)-точками, між статистичною збіжністю чи обмеженістю і (c)-точками, а також між статистичною і звичайною збіжністю чи обмеженістю;
6) довести статистичні (c)-властивості і тауберові теореми із залишком для деяких методів підсумовування простих і подвійних послідовностей, що набувають значень з простору L.

Об'єкт і предмет дослідження. ***Об'єктом*** даного дослідження виступають деякі матричні методи підсумовування простих і подвійних послідовностей і функцій кількох змінних, а ***предметом*** – найбільш загальні теореми типу Мерсера або типу Таубера для цих методів підсумовування.

Методи досліджень. У процесі дослідження використовувалися загальні методи класичного і функціонального аналізу, теорії підсумовування розбіжних рядів і функцій, метод (c)-точок М. О. Давидова, удосконалений Г. О. Михаліним, метод оберненого перетворення (при доведенні двох мерсерових теорем), а також метод згорток і твірних функцій, запропонований М. М. Білоцьким для одержання (c)-властивості однократних методів підсумовування Вороного. При встановленні ознак (c)-точок для L-значних послідовностей важливу роль зіграла теорема Хана – Банаха про віддільність опуклих множин.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, що визначають наукову новизну і виносяться на захист, є такі:

1) знайдено необхідні й достатні умови у мерсерових теоремах для деяких методів підсумовування банаховозначних послідовностей та функцій;
2) узагальнено одну теорему Рогозинських мерсерового типу шляхом заміни сталих коефіцієнтів лінійного перетворення на функції;
3) перенесено (c)-властивість і тауберові теореми із залишком, доведені Г. О. Михаліним для методів (H, p, α) і (C, p, α), на випадок статистичної збіжності або обмеженості середніх;
4) перенесено в загальнішій формі на L-значні послідовності (c)-властивість методів підсумовування Вороного класу W_Q, знайдену Л. Ф. Таргонським, і одержано статистично підсилені тауберові теореми із залишком для цих методів підсумовування;
5) перенесено на L-значні послідовності і статистично підсилено відомі (c)-властивості і тауберові теореми із залишком для подвійних методів Ріса;
6) вперше знайдено (c)-властивість та доведено тауберові теореми із залишком для подвійних методів підсумовування Вороного класу W_Q^2, причому одразу для L-значних послідовностей та при умові статистичної збіжності або обмеженості середніх.

Практичне значення отриманих результатів. Дана робота є теоретичним дослідженням і може мати практичний інтерес у теорії підсумовування кратних послідовностей і функцій багатьох змінних, а також у тих галузях математики, де ця теорія використовується, наприклад, у теорії чисел, теорії ймовірностей і математичній статистиці, гармонічному аналізі, спектральній теорії операторів, теорії функцій, математичній фізиці тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження і загальна постановка задач належить науковому керівникові – Г. О. Михаліну. Розв’язання поставлених задач здійснено здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на

- VII, VIII і IX Міжнародних наукових конференціях імені академіка М. П. Кравчука (1998, 2000, 2002);
- II і III Міжнародних наукових конференціях пам’яті Г. Ф. Вороного (Київ, 1998, 2003);
- семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – член-кор. НАН України О. І. Степанець);
- міжвузівському семінарі з теорії наближень при Дніпропетровському національному університеті (керівники – член-кор. НАН України В. П. Моторний і професор В. Ф. Бабенко);
- звітних наукових конференціях кафедр НПУ імені М. П. Драгоманова (1998 – 2003).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у статтях [79] – [83]. У статті [79] частинний випадок, коли $\lambda_n \equiv \sigma_n \equiv 1$, на основі поняття (c)-точки М. О. Давидова першим отримав М. М. Білоцький, постановка загальної задачі належить Г. О. Михаліну, а розв’язання її здійснено С. Я. Декановим. У статті [80] Г. О. Михаліну належить постановка задач, а С. Я. Деканову – розв’язання цих задач.

За результатами дисертаційного дослідження опубліковано сім тез доповідей на міжнародних наукових конференціях [84] – [90].

Автор висловлює велику подяку своєму науковому керівнику Г. О. Михаліну за постановку цікавих задач і постійну підтримку при написанні даної роботи.

РОЗДІЛ 1

МЕРСЕРОВІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ФУНКЦІЙ

1.1. Абстрактні поняття границі і ядра функції та методу підсумовування

1.1.1. Границя та часткова границя функції за системою множин. Нехай X – довільна непорожня множина, на якій задано систему $\{U_r : r \geq 0\}$ її непорожніх підмножин таких, що $U_0 = X$, $U_{r_1} \supset U_{r_2}$ $\forall r_1 < r_2$ і $\bigcap\limits_{r \geq 0} U_r = \varnothing$. Система $\{U_r\}$ задає напрямок на множині X [25, с. 95]. Розглянемо довільну функцію $f : X \to L$, що визначена на множині X і набуває значень з віддільного, локально опуклого лінійного топологічного простору L [50, с. 13 – 15]. Елемент $a \in L$ називають *границею функції* f *за системою* U_r, якщо для будь-якого околу G цього елемента існує $r_0 \geq 0$ таке, що $f\left(U_{r_0}\right) \subset G$. Це записують $\lim\limits_{U_r} f = a$ або $f \to a$ $\left(U_r\right)$. Зрозуміло, що

$$\lim_{U_r} f = a \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a \ \ \forall 0 \leq r_n \uparrow +\infty \ \ \forall x_n \in U_{r_n},$$

де $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ – це границя послідовності у розумінні топології простору L.

Приклади. **1.** Якщо $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, $U_0 = X$, U_r є проколеним $\frac{1}{r}$-околом точки x_0 $(r > 0)$, $L = \mathbb{R}^1$, $f : X \to L$, то $\lim\limits_{U_r} f = a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, тобто поняття границі функції в точці є частинним випадком поняття границі функції за системою U_r.

2. Нехай $X = \mathbb{N}^m$, $U_r = \left\{(n_1, n_2, \ldots, n_m) : n_k \in \mathbb{N}, n_k > r \ \forall k \in \overline{1,m}\right\}$, $L = \mathbb{R}^1$. У цьому випадку функція $f : X \to \mathbb{R}$ є m-кратною послідовністю, а її границя за системою U_r є границею у розумінні Прингсхейма:

$$\lim_{U_r} f = a \Leftrightarrow \lim_{n_1,\ldots,n_m\to\infty} f(n_1,\ldots,n_m) = a\,.$$

Якщо $a = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для деякої послідовності $x_n \in U_{r_n}$, де $0 \le r_n \uparrow +\infty$, то елемент $a \in L$ називають *частковою границею функції* f *за системою* U_r. У випадку $L = \mathbb{R}^1$ найбільша та найменша часткові границі за системою U_r називаються відповідно *верхньою* та *нижньою границями функції* f *за системою* U_r і позначаються $\overline{\lim\limits_{U_r}} f$ та $\underline{\lim\limits_{U_r}} f$. Зрозуміло, що кожна числова функція f, обмежена на множині X, має хоч би одну часткову границю за системою U_r (а також нижню та верхню границі за системою U_r, коли $L = \mathbb{R}^1$), але для функцій з довільного нормованого простору L це не так.

У зв'язку з цим назвемо лінійний топологічний простір L *обмежено компактним*, якщо в ньому кожна обмежена послідовність має збіжну підпослідовність.

Приклади. 3. Усякий скінченновимірний лінійний простір $L = L_n$ нормовний [50, т. 1.39, с. 38], а в скінченновимірному нормованому просторі збіжність і обмеженість послідовності рівносильна покоординатній збіжності чи обмеженості [67, т. 12.35(е), с. 57]. Тому простір L_n, за теоремою Больцано – Вейєрштрасса про існування часткової границі, є обмежено компактним.

□ Навпаки, нехай L – обмежено компактний нормований простір. Тоді у ньому замкнена одинична куля $S = \{x : \|x\| \le 1\}$ є компактною множиною. За теоремою Ф. Ріса [67, т. 12.36 (б), с. 59] простір L є скінченновимірним. □

Отже, *нормований простір* L *є обмежено компактним тоді і тільки тоді, коли він скінченновимірний.*

4. Задамо визначальну систему околів нуля у просторі $\mathbb{R}^\infty$ всеможливих числових послідовностей $x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ так. Кожен окіл нуля $U(k_1,\ldots,k_r;\varepsilon)$ визначається цілими числами k_1, …, k_r та числом $\varepsilon > 0$ і складається з усіх тих $x \in \mathbb{R}^\infty$, котрі задовольняють нерівності $|x_{k_i}| < \varepsilon \;\; \forall i \in \overline{1,r}$. (Цей приклад взято з

[26, с. 195]). Легко перевірити, що задання вказаної системи околів нуля перетворює $\mathbb{R}^{\infty}$ на віддільний, локально опуклий лінійний топологічний простір, і що цей простір не є локально обмеженим, а отже, і не є нормовним. У додатку А показано, що простір $L = \mathbb{R}^{\infty}$ є обмежено компактним.

Простір L називається *секвенційно повним* [19, с. 152], якщо кожна послідовність $y_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$, така, що $y_n - y_m \to \theta$ $(m, n \to \infty)$, є збіжною. Очевидно, що нормований простір L є секвенційно повним тоді і тільки тоді, коли він повний.

На прикладі гільбертового (а отже, і банахового) простору l^2 дійсних послідовностей (x_n) таких, що $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$, бачимо, що із секвенційної повноти не випливає обмежена компактність простору, оскільки не випливає його скінченновимірність (див. приклад 3). В той же час обернене твердження є справедливим (див. додаток Б).

5. Таким чином, *якщо простір* L *обмежено компактний, то він і секвенційно повний.*

В обмежено компактному просторі L кожна обмежена функція $f : X \to L$ має хоч би одну часткову границю за системою U_r.

1.1.2. Ядро функції. *Ядром функції* $f : X \to L$ (*за системою* U_r) називають множину $K(f) = \bigcap_{r \geq 0} \overline{Co} f(U_r)$, де через $\overline{Co}E$ позначено замкнену опуклу оболонку множини E. Вперше поняття ядра для випадку комплекснозначної функції дійсної змінної ввів Кнопп [65, с. 77]. Якщо функція f обмежена на множині X, то її ядро збігається із замкненою опуклою оболонкою множини E_f її часткових границь за системою U_r, тобто $K(f) = \overline{Co}E_f$ [48, с. 61, 62]. Для необмеженої функції f має місце лише включення $K(f) \supset \overline{Co}E_f$.

Приклади. 1. Якщо $L = \mathbb{R}^1$ і функція f обмежена на X, то $K(f) = \Big[\varliminf_{U_r} f;$

$\overline{\lim\limits_{U_r}} f \,\big]$. Зокрема, якщо $\lim\limits_{U_r} f = a$, то $K(f) = \{a\}$.

2. Нехай $X = \mathbb{N}_0$, $U_r = [r;+\infty) \bigcap \mathbb{N}_0$, $f_n = 0$, коли $n = 2k$, і $f_n = n$, коли $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді $\overline{Co} f(U_r) = [0;+\infty)$ $\forall r \geq 0$ і, отже, $K(f) = [0;+\infty)$.

3. Нехай X та U_r з прикладу 2, а $f_n = n\,(-1)^n$. Тоді $\overline{Co} f(U_r) = (-\infty;+\infty)$ $\forall r \geq 0 \;\Rightarrow\; K(f) = \mathbb{R}$.

4. Нехай $X = [0;+\infty)$, $U_r = [r;+\infty)$, $f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. Тоді $\forall M > 0$ $\exists r_0 > 0 : f(U_r) \subset [M;+\infty)\ \forall r \geq r_0 \Rightarrow \overline{Co} f(U_r) \subset [M;+\infty)\ \forall r \geq r_0 \Rightarrow K(f) \subset [M;+\infty)$ $\Rightarrow K(f) \subset \bigcap\limits_{M>0} [M;+\infty) = \varnothing \Rightarrow K(f) = \varnothing$.

5. Нехай X та U_r з прикладу 2, $p \in \mathbb{N}$, ε_j, $j \in \overline{1,p}$, – корені p-го степеня з числа 1, $f_n = \varepsilon_j$, коли $n = pk + j$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Тоді $E_f = \left\{\varepsilon_j : j \in \overline{1,p}\right\}$, а $K(f)$ є замкненим p-кутником на комплексній площині $\mathbb{C}$ з вершинами ε_j, $j \in \overline{1,p}$.

1.1.3. Загальне поняття методу підсумовування функцій. Критерії регулярності. Нехай X та L з пункту 1.1.1, Φ – деякий клас функцій $f : X \to L$. *Методом підсумовування функцій класу* Φ можна назвати довільний оператор $M : \Phi \to L$. Клас Φ, тобто область визначення оператора M, називається *полем підсумовування методу* M. Якщо $a = M(f)$, $f \in \Phi$, $a \in L$, то кажуть, що *функція* f *підсумовується до елемента* a *методом* M, і записують $M\text{-}\lim f = a$ або $f \to a\,(M)$. Метод M називається *лінійним*, якщо оператор M лінійний. Метод M називається *регулярним* (*регулярним на класі* $\Phi_1 \subset \Phi$), якщо $\forall f \in \Phi$ $(\forall f \in \Phi_1)$ з рівності $\lim\limits_{U_r} f = a$ випливає рівність $M\text{-}\lim f = a$.

Якщо дано два методи $M_1 : \Phi_1 \to L$ і $M_2 : \Phi_2 \to L$, то кажуть, що 1) *метод* M_1 *включає* (або *сильніший за*) *метод* M_2, і позначають $M_1 \supset M_2$, якщо $\Phi_1 \supset \Phi_2$; 2) *методи* M_1 *і* M_2 *рівносильні*, якщо $M_1 \supset M_2$ і $M_2 \supset M_1$; 3) *методи* M_1 *і* M_2 *сумісні*, якщо $M_1(f) = M_2(f)$ $\forall f \in \Phi_1 \bigcap \Phi_2 \neq \varnothing$, тобто якщо вони не можуть підсумовувати одну й ту ж саму функцію до різних елементів.

Приклади. 1. Нехай $X=\mathbb{N}_0^p$ $(p\in\mathbb{N})$, $A=(a_{n,k})$ – числова матриця, де n, $k\in X$ – мультиіндекси, (S_n) – задана p-кратна послідовність, система множин U_r – з прикладу 2 пункту 1.1.1 (вона визначає збіжність за Прингсхеймом),

$$T_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}S_k\,, \tag{1.1}$$

або в розгорнутому вигляді

$$T_{n_1,n_2,\ldots,n_p}=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_p=0}^{\infty}a_{n_1,n_2,\ldots,n_p,k_1,k_2,\ldots,k_p}S_{k_1,k_2,\ldots,k_p}\,. \tag{1.1*}$$

Якщо через Φ_A позначити клас послідовностей (S_n), для яких усі ряди (1.1), або (1.1*), збігаються за Прингсхеймом (у розумінні топології простору L) та існує $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=b$ $(b\in L)$, то дістанемо оператор $A:\Phi_A\to L$ такий, що $A(S_n)=b$. Цей оператор A називається з*агальним матричним методом підсумовування p-кратних послідовностей.* Він цілком визначається матрицею A.

2. Нехай на множині X задано систему множин U_r як у пункті 1.1.1, а на множині Y – аналогічну систему V_r. Припустимо, що Ω – σ-алгебра підмножин множини X, яка містить усі одноточкові множини та всі U_r, і на Ω задано сукупність обмежених числових мір [18] μ_y, $y\in Y$. Позначимо через Φ клас обмежених функцій $f:X\to L$, кожна з яких є рівномірною границею послідовності (φ_n) *простих* обмежених функцій, тобто функцій вигляду

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kI_{E_k}(x),\ x\in X\,,$$

де $a_k\in L$, I_{E_k} – характеристична функція множини E_k, причому $E_i\bigcap E_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. Тоді для кожної функції $f\in\Phi$ існують інтеграли

$$M(y)=\int\limits_X f\,d\mu_y\,,\ y\in Y, \tag{1.2}$$

у розумінні Бохнера [18, с. 115]. Кажуть, що *функція* f *підсумовується* (*до елемента* a) *інтегральним методом* M, що визначається рівністю (1.2), якщо $\lim\limits_{V_r} M(y)=a$. Зокрема, якщо $X=Y=\mathbb{N}_0^p$ $(p\in\mathbb{N})$, міри μ_n визначаються рівностями $\mu_n(k)=\mu_{n_1,n_2,\ldots,n_p}(k_1,k_2,\ldots,k_p)=a_{n,k}$ $\forall n\in Y$ та $\forall k\in X$, причому p-кратний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|$ збігається $\forall n\in Y$, то μ_n – обмежені міри, визначені на σ-алгебрі всіх підмножин множини X, і для будь-якої обмеженої послідовності $f=(f_k)$ маємо $M_n=\int\limits_X f\,d\mu_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{n,k}f_k$, $n\in\mathbb{N}$, тобто матричний метод підсумовування з прикладу 1 є частинним випадком інтегрального методу підсумовування, що визначається рівністю (1.2).

3. Нехай у прикладі 2 $X=Y=[0;+\infty)$, $U_r=V_r=\{x\in X:\ x>r\}$ $\forall r\geq 0$, $\mu_y(E)=\int\limits_E K(x,y)\,dx$ для будь-якої вимірної за Лебегом множини $E\subset[0;+\infty)$, де $K(x,y)$ при кожному фіксованому $y\in Y$ є інтегровною за Лебегом на $[0;+\infty)$ числовою функцією, для якої $\int\limits_0^{+\infty}\left|K(x,y)\right|dx<+\infty$. Тоді μ_y – обмежені міри, визначені на σ-алгебрі вимірних за Лебегом підмножин піввідрізка $[0;+\infty)$, а рівність (1.2) перетворюється на рівність

$$M(y)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)K(x,y)\,dx\ \ \forall y\in Y,$$

де $K(x,y)$, $x,y\in[0;+\infty)$, – ядро інтегрального перетворення.

О. Тепліц довів у 1911 р. [65, т. 2, с. 63] наступний критерій регулярності матричного методу підсумовування простих числових послідовностей.

Теорема Р1. *Для того щоб метод* A *був регулярним, необхідно і достатньо, щоб виконувалися одночасно три умови:*

I) $\exists H>0$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\leq H\ \ \forall n$;

II) $a_{n,k} \to 0 \ (n \to \infty \ \forall k)$;

III) $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \to 1 \ (n \to \infty)$.

О. І. Ревенко довів [48, с. 29] такий критерій регулярності інтегрального методу підсумовування.

Теорема Р2. *Нехай* L *– банахів простір. Для того щоб інтегральний метод* M, *що визначається рівністю* (1.2), *був регулярним на класі* Φ *з прикладу* 2, *необхідно і досить, щоб виконувалися умови:*

I) $\lim_{V_r} \mu_y(X) = 1$;

II) $\forall r^* > 0 \ i \ \forall E \in \Omega\colon \ E \subset X \setminus U_{r^*} \ \ \exists \lim_{V_r} \mu_y(E) = 0$;

III) $|\mu_y|(X) \le H \ \ \forall y \in V_{r_1}$ *для деякого* $r_1 > 0$.

Наслідком з теореми Р2 є наступний критерій регулярності загального матричного методу підсумовування:

Теорема Р3. *Для того щоб матричний метод* A, *що визначається рівністю* (1.1), *був регулярним на класі банаховозначних обмежених* p*-кратних послідовностей, необхідно й досить, щоб виконувалися умови:*

I) $\exists H > 0\colon \ \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| \le H \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0^p$;

II) $\forall r > 0 \ i \ \forall E \subset \mathbb{N}_0^p \setminus \{k \in \mathbb{N}_0^p : k > r\} \ \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in E} a_{n,k} = 0$;

III) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$.

Наступна теорема стосується включення ядер послідовностей (S_n) і (T_n) з рівності (1.1).

Теорема Р4. *Якщо метод* A *додатний* (*тобто його матриця складається тільки з невід'ємних чисел*) *і регулярний на класі* Φ_A^* *обмежених* p*-кратних банаховозначних послідовностей* (S_n), *а послідовність* (T_n) *визначається рівністю* (1.1), *то* $K(T) \subset K(S) \ \ \forall S \in \Phi_A^*$.

Для випадку $p=1$ і $L=\mathbb{C}$ теорему Р4 першим довів у 1930 р. К. Кнопп [65, т. 11, с. 77], а для загального випадку – О. І. Ревенко [47]. Є. Г. Усенко показала [44], [63], що теореми Р2 – Р4 правильні і для довільного локально опуклого, хаусдорфового, секвенційно повного простору L.

1.1.4. Методи підсумовування $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ і $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$. Нехай $p_0>0$, $p_n\geq 0$, $P_n^{(0)}=1$, $P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=0}^{n} p_i P_i^{(\alpha-1)}$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in\mathbb{N}$, причому $P_n^{(1)}\to\infty$ $(n\to\infty)$. Для довільної послідовності $S_n\in L$ позначимо $S_n^{(0)}=H_n^{(0)}=S_n$, $S_n^{(\alpha)}=\sum_{i=0}^{n} p_i S_i^{(\alpha-1)}$, $H_n^{(\alpha)}=$ $=\sum_{i=0}^{n} p_i H_i^{(\alpha-1)}/P_n^{(1)}$, $C_n^{(\alpha)}=S_n^{(\alpha)}/P_n^{(\alpha)}$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in\mathbb{N}$.

Послідовності $(H_n^{(\alpha)})$ і $(C_n^{(\alpha)})$ визначають *додатні методи підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро*, які позначаються (H,p,α) і (C,p,α) відповідно та перетворюються на класичні методи Гельдера і Чезаро, коли $p_n\equiv 1$ [65, с. 125]. Коли $p_n=\dfrac{1}{n+1}$, то (H,p,α) і (C,p,α) є так званими *логарифмічними методами типу Гельдера і Чезаро*. Крім цього, методи $(H,p,1)$ і $(C,p,1)$ збігаються один з одним і з *додатним методом Ріса* (R,p) [3, с. 104].

Припустимо, що простір L банахів. За теоремою Р1 метод (R,p) регулярний тоді і тільки тоді, $P_n^{(1)}\to\infty$, а отже, за принципом математичної індукції методи (H,p,α) регулярні $\forall\alpha\in\mathbb{N}$. Регулярність методів (C,p,α) теж за принципом математичної індукції випливає з наступних співвідношень:

$$C_n^{(\alpha)}=\frac{1}{P_n^{(\alpha)}}\sum_{i=0}^{n}\left(p_i P_i^{(\alpha-1)}\right)C_i^{(\alpha-1)}\quad \forall n\in\mathbb{N}_0,$$

$$P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=0}^{n} p_i P_i^{(\alpha-1)}\geq P_0^{(\alpha-1)}\sum_{i=0}^{n} p_i = p_0^{\alpha-1}P_n^{(1)}\to\infty\ (n\to\infty),$$

які показують, що середні $C_n^{(\alpha)}$ є середніми Ріса від середніх $C_n^{(\alpha-1)}$, причому метод Ріса $(R,pP^{(\alpha-1)})$ регулярний.

За теоремою Р4 пункту 1.1.3 для будь-якої обмеженої послідовності $S=(S_n)$ мають місце наступні включення ядер:

$$K(H^{(\alpha+1)})\subset K(H^{(\alpha)})\subset K(S) \text{ і } K(C^{(\alpha+1)})\subset K(C^{(\alpha)})\subset K(S).$$

1.1.5. Методи підсумовування Вороного класу W_Q. Нехай $p_0>0$, $p_n\geq 0$, $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$,

$$p_n/P_n\to 0 \ (n\to\infty), \tag{1.3}$$

$$p(z):=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n z^n=\frac{p_l(z)}{p_\alpha(z)} \ \ \forall z:\ |z|<1, \tag{1.4}$$

де $p_l(z)$ і $p_\alpha(z)$ – деякі многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів l і α відповідно, причому $p_l(0)>0$, $p_l(z)$ не має додатних нулів, а $p_l(z)$ і $p_\alpha(z)$ не мають спільних нулів.

Функцію $p(z)$ називають *твірною функцією додатного регулярного методу Вороного*, середні якого мають вигляд

$$W_n^{(p)}=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}S_k \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Клас методів Вороного, які задовольняють умови (1.3) і (1.4), позначатимемо W_Q, де літера “Q” підкреслює раціональність твірної функції. Цей клас введено М. М. Білоцьким. Він містить у собі всі так звані додатні поліноміальні методи Вороного, до яких належать і методи Чезаро (C,α), $\alpha\in\mathbb{N}$. *Додатні поліноміальні методи Вороного* (W,p_n) визначаються за допомогою многочлена $p(z)=a_0z^{r-1}+a_1z^{r-2}+\ldots+a_{r-1}$ степеня $r-1\geq 0$, такого, що $p(0)>0$, $p_n=p(n)\geq 0 \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$. У [59] показано, що для $|z|<1$ справедлива рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n=\frac{(-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{i}(-1)^m\binom{r}{m}p(m-i-1)\,z^{r-1-i}}{(1-z)^r},$$

причому многочлен у чисельнику не має додатних нулів. Отже, $(W,p(n))\in W_Q$.

У пункті 2.3.1 буде показано, що кожна функція вигляду $\frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{(1-z)^r}$, де $a_i \geq 0$, $a_0 > 0$, $a_m > 0$, $m \geq r \geq 1$, є твірною функцією деякого методу класу W_Q. Така функція не є твірною функцією жодного поліноміального методу, для якого як мінімум повинно бути $m < r$. Тому клас W_Q ширший за клас додатних поліноміальних методів Вороного.

Оскільки додатний метод Вороного (W, p) класу W_Q задовольняє умову (1.3), то за теоремою P3 він регулярний. Тоді за теоремою P4 $K(W^{(p)}) \subset K(S)$ для будь-якої обмеженої послідовності $S = (S_n)$.

1.1.6. Методи (H, p, α, β) і (C, p, α, β) підсумовування подвійних послідовностей. Нехай $p'_n \geq 0$, $p''_n \geq 0$, $P'_n = \sum_{k=0}^{n} p'_k > 0$, $P''_n = \sum_{k=0}^{n} p''_k > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, причому $P'_n \to \infty$ і $P''_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для подвійної L-значної послідовності $(S_{m,n})$ позначимо

$$H_{m,n}^{(0,0)} = S_{m,n}^{(0,0)} = S_{m,n}, \; H_{m,n}^{(0,\beta)} = \frac{1}{P''_n} \sum_{j=0}^{n} p''_j H_{m,j}^{(0,\beta-1)}, \; S_{m,n}^{(0,\beta)} = \sum_{j=0}^{n} p''_j S_{m,j}^{(0,\beta-1)} \quad \forall \beta \in \mathbb{N},$$

$$H_{m,n}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{P'_m} \sum_{i=0}^{m} p'_i H_{i,n}^{(\alpha-1,\beta)}, \; S_{m,n}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=0}^{m} p'_i H_{i,n}^{(\alpha-1,\beta)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \; \beta \in \mathbb{N}_0,$$

$$C_{m,n}^{(\alpha,\beta)} = S_{m,n}^{(\alpha,\beta)} / P_{m,n}^{(\alpha,\beta)} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0,$$

де $P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}$ – це $S_{m,n}^{(\alpha,\beta)}$ у випадку $S_{m,n} \equiv 1$.

Послідовності $\left(H_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\right)$ і $\left(C_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\right)$ називають відповідно *середніми типу Гельдера і Чезаро порядку* (α, β). Вони визначають методи (H, p, α, β) і (C, p, α, β), які при $p'_n \equiv p''_n \equiv 1$ перетворюються на класичні подвійні методи Гельдера і Чезаро [66, c. 185].

Використовуючи теорему P3, неважко показати, що у випадку, коли простір L банахів, умови $P'_n \to \infty$ і $P''_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ гарантують регулярність методів (H, p, α, β) і (C, p, α, β) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ на класі всіх обмежених послідовностей, а за тому теоремою Р4 мають місце включення ядер

$$K(H^{(\alpha_1,\beta_1)}) \subset K(H^{(\alpha,\beta)}) \subset K(S),\ K(C^{(\alpha_1,\beta_1)}) \subset K(C^{(\alpha,\beta)}) \subset K(S)\ \ \forall(\alpha_1,\beta_1) \geq (\alpha,\beta)$$

для будь-якої обмеженої банаховозначної послідовності $(S_{m,n})$.

1.1.7. Факторизовані методи Вороного класу W_Q^2. Нехай (W, p'_m) і (W, p''_n) – однократні методи Вороного класу W_Q, твірні функції яких мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}(x) &:= \sum_{m=0}^{\infty} p'_m x^m = (1-x)\sum_{m=0}^{\infty} P'_m x^m = \frac{\dot{p}_a(x)}{\dot{p}_\alpha(x)}, \quad |x|<1, \\ \ddot{p}(y) &:= \sum_{n=0}^{\infty} p''_n y^n = (1-y)\sum_{n=0}^{\infty} P''_n y^n = \frac{\ddot{p}_b(y)}{\ddot{p}_\beta(y)}, \quad |y|<1, \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

де $\dot{p}_a(x)$, $\dot{p}_\alpha(x)$, $\ddot{p}_b(y)$, $\ddot{p}_\beta(y)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів a, α, b та β відповідно, $\dot{p}_a(0)>0$, $\ddot{p}_b(0)>0$, $\dot{p}_a(x)$ і $\ddot{p}_b(y)$ не мають додатних нулів, а $\dot{p}_a(x)$ і $\dot{p}_\alpha(x)$ та $\ddot{p}_b(y)$ і $\ddot{p}_\beta(y)$ не мають спільних нулів. При цьому також виконуються умови

$$p'_n / P'_n \to 0 \ \text{ і } \ p''_n / P''_n \to 0 \ \ (n \to \infty). \tag{1.6}$$

Позначимо $p_{m,n} = p'_m p''_n$, $P_{m,n} = P'_m P''_n$ $\forall m,\ n \in \mathbb{N}_0$. Для довільної подвійної L-значної послідовності $(S_{m,n})$ середні

$$W_{m,n}^{(p)} = \frac{1}{P_{m,n}} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{m-i,n-j} S_{i,j} \quad \forall m,n \in \mathbb{N}_0$$

визначають *додатний факторизований метод Вороного* $(W, p_{m,n})$ *класу* W_Q^2. Функції $\dot{p}(x)$ та $\ddot{p}(y)$ з рівності (1.5) називаються його *твірними функціями.* Слово “факторизований” означає “розкладений на множники”. До класу W_Q^2 належать, зокрема, методи Чезаро (C,α,β), $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$, які мають твірні функції $\dot{p}(x) = (1-x)^{-\alpha-1}$ та $\ddot{p}(y) = (1-y)^{-\beta-1}$.

У банаховому просторі L методи Вороного $(W, p_{m,n})$, що задовольняють умову (1.6), регулярні на класі обмежених послідовностей, а тому за теоремою Р4 $K(W^{(p)}) \subset K(S)$ для будь-якої обмеженої послідовності $(S_{m,n})$.

1.2. Узагальнення мерсерових теорем М. О. Давидова

1.2.1. Поняття мерсерової теореми. Огляд результатів. Матрицю A називають [31, с. 189] *неефективною на певному класі послідовностей*, якщо вона не підсумовує жодної послідовності цього класу, а якщо вона взагалі не підсумовує жодної розбіжної (обмеженої розбіжної) послідовності, то її називають *цілком неефективною* (*обмежено неефективною*).

Для однократних матричних методів підсумовування числових послідовностей відомі такі дві загальні теореми про обмежену неефективність.

Теорема Р. Агнью [31, т. 2.7, с. 379]. *Якщо регулярна матриця* $A=(a_{n,k})$ *задовольняє умову* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(2\left|a_{n,n}\right|-\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\right)>0$, *то вона обмежено неефективна*.

Теорема А. Л. Брудно [31, т. 2.9, с. 380]. *Для того щоб регулярна матриця* $A=(a_{n,k})$ *була обмежено неефективною, необхідно й досить, щоб* $\exists\delta_0>0$: $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}S_k\right|\geq\delta_0\,\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|S_n\right|$ *для будь-якої обмеженої послідовності* (S_n).

Відомо також декілька загальних теорем (наприклад, [31, т. 7.1.І, с. 189] або [31, т. 2.8, с. 380]) про повну неефективність матриць, але вони сформульовані в термінах оберненої матриці. Застосовувати на практиці такі твердження дуже складно, як і теорему Брудно. Умова теореми Агнью при застосуванні до матриць конкретного вигляду часто виявляється занадто жорсткою.

Значний інтерес становлять твердження, в яких пропонуються зручні умови для перевірки неефективності матриць конкретного вигляду. Першу таку теорему довів у 1907 році Дж. Мерсер [74].

Теорема М1. *Якщо* $\alpha>0$ *і* $\alpha S_n+(1-\alpha)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k\to S\neq\infty$, *то* $S_n\to S$.

Ця теорема породила цілу низку узагальнень, які почали називатися *теоремами мерсерового типу*. Перш за все, І. Шур довів [65, с. 137], що теорема М1 правильна і для перетворення $\alpha S_n+(1-\alpha)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k$. Відмітимо, що за цитованою теоремою Агнью можна лише дістати обмежену неефективність перетворень, розглянутих Мерсером і Шуром, і то при $\alpha > 1/2$.

Наступні узагальнення теореми М1 було отримано шляхом заміни середніх арифметичних іншими середніми [45], [56], [52]. Декілька робіт присвячено також мерсеровим теоремам для подвійних послідовностей ([54], [55]).

Е. Г. Буданіцький [4], розглядаючи довільну регулярну матрицю M, встановив, що множина дійсних чисел α, для яких матриця $A(\alpha) = \alpha E + (1-\alpha)M$ обмежено рівносильна збіжності, відкрита. О. І. Ревенко у подальшому переніс цей результат на випадок комплексних чисел α та інтегральних перетворень M банаховозначних функцій [48, с. 44]. О. І. Соколенко [52] розглянув замість чисел α обмежені комплексні послідовності (α_n) з нормою $\|\alpha_n\| = \overline{\lim_{n\to\infty}}|\alpha_n|$.

М. О. Давидову належать наступні теореми М2 – М5.

Теорема М2 [15]. *Нехай* (α_n) *і* (β_n) *– дійсні послідовності,* $\alpha_n + \beta_n \to 1$ $(n \to \infty)$. *Якщо* $\alpha_n \geq a > 0$ $(n \geq n_0)$ *і* $t_n = \alpha_n S_n + \beta_n \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = O(1)$ $(n \to \infty)$, *то* $S_n = O(1)$ $(n \to \infty)$. *Якщо* $0 < a \leq \alpha_n \leq b < +\infty$ $(n \geq n_0)$, $S \neq \infty$ *і* $t_n \to S$ $(n \to \infty)$, *то* $S_n \to S$ $(n \to \infty)$.

Теорема М3 [60]. *Нехай* $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *– довільні дійсні функції, визначені на проміжку* $[0;+\infty)$ *і такі, що* $\alpha(x) + \beta(x) \to 1$ $(x \to +\infty)$, $0 < a \leq \alpha(x) \leq b < +\infty$ *при* $x > x_0$. *Якщо для дійсної функції* $S(x)$, *неперервної на проміжку* $[0;+\infty)$,

$\alpha(x)S(x) + \beta(x)\dfrac{1}{x}\int_0^x S(t)\,dt \to S \neq \infty$ $(x \to +\infty)$, *то* $S(x) \to S$ $(x \to +\infty)$.

Теорема М4. *Нехай* (α_n) *– задана дійсна послідовність. Для того щоб з рівності* $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n S_n + (1-\alpha_n)y_n) = a \neq \infty$, *де* (x_n) *та* (y_n) *– обмежені дійсні послідовності такі, що* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, *кожного разу випливала рівність* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *необхідно і досить, щоб* $\dfrac{1}{2} < \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n < +\infty$.

Теорема М5 [16]. *Нехай* (α_n) *і* (β_n) *– послідовності дійсних чисел,* $\alpha_n+\beta_n\to\gamma>0\ (n\to\infty)$. *Якщо* $\alpha_n\ge\alpha>0$, *то з рівності*

$$t_n=\alpha_n S_n+\beta_n\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k S_k=O(1)\ (n\to\infty),$$

де $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k$, $p_0>0$, $p_n\ge 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$, *випливає рівність* $S_n=O(1)\ (n\to\infty)$. *Якщо* $0<\alpha\le\alpha_n\le\beta<+\infty$, *то з рівності* $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\gamma S$, *де* $P_n\to\infty$, $S\ne\infty$, *випливає рівність* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

Французький математик З. Сімсон замінив у теоремі М5 дійсну послідовність (α_n) на комплексну.

Теорема М6 [78]. *Нехай* (α_n) *– послідовність комплексних чисел така, що* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\operatorname{Re}\alpha_n>0$, *і* $t_n=\alpha_n S_n+(1-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n}p_k S_k/\sum_{k=0}^{n}p_k$ ($p_k>0\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0$). *Тоді з того, що* $t_n=O(1)\ (n\to\infty)$, *випливає, що* $S_n=O(1)\ (n\to\infty)$. *Якщо, крім того,* $\alpha_n=O(1)$ *і* $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k\to\infty\ (n\to\infty)$, *то з того, що* $t_n\to S\ne\infty\ (n\to\infty)$, *випливає, що* $S_n\to S\ (n\to\infty)$.

В. І. Мельник розглянув комплексні послідовності (α_n) і середні Ріса з комплексними p_n. Йому належить наступне твердження.

Теорема М7 [35]. *Якщо* $p_n\ne 0$, $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k\ne 0$, $P_n\to\infty$, $\sum_{k=0}^{n}|p_k|=O(P_n)$, $\alpha_n=O(1)$, $\frac{1}{\alpha_n}=O(1)$, *то перетворення* $t_n=\alpha_n S_n+(1-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n}p_k S_k/P_n$ *цілком неефективне, коли* $|\arg(p_n/(\alpha_n P_{n-1}))|\le\sigma<\frac{\pi}{2}\ (n>n_0)$.

Л. Ф. Таргонський [58], [60] переніс твердження М6 на інші середні, а саме: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\frac{1}{\gamma^{k+1}}S_k\ \ (\gamma\in\mathbb{C})$, а твердження М3 – на інтеграли Стілтьєса:

$\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)$, де $\varphi(x)\nearrow$ на $[0;+\infty)$, $\varphi(0)=0$, $S(x)$ – неперервна на $[0;+\infty)$.

В. Бекман [69] переніс теорему Мерсера у формі Шура на випадок комплексного α і матричних середніх $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}S_k$ замість середніх арифметичних. При цьому вимагалося, щоб матриця $A=(a_{n,k})$ мала обернену матрицю $A^{-1}=(a_{n,k}^{-1})$, для якої виконувалися б умови: $a_{n,k}^{-1}\le 0\ (n>k)$, $a_{n,n}>0\ (n=0,1,\ldots)$. Бекман довів, що коли $\operatorname{Re}\alpha>-1$, то матриця $E+\alpha A$ рівносильна збіжності. О. І. Соколенко [52] довів аналогічне твердження, замінивши число α послідовністю (α_n). Він також отримав аналогічний результат і для перетворення вигляду $\alpha E+(1-\alpha)A$, де $\alpha=(\alpha_n)$ – послідовність дійсних чисел.

Ще один спосіб узагальнення теореми Мерсера дає наступна теорема Рогозинських, опублікована у 1965 р.

Теорема М8 [76]. *Нехай при кожному* j *запис* $\{a_k^{(j)}\}$ *означає послідовність точок евклідового простору* E_n, *причому* j *може пробігати скінченну або зчисленну множину значень. Позначимо через* A_j' *множину усіх часткових границь послідовності* $\{a_k^{(j)}\}$, *а через* $\langle A_j'\rangle$ *опуклу оболонку множини* A_j'.

Для всіх послідовностей $\{a_k^{(j)}\}$, *що задовольняють умови*: 1) $A_j'\subset\langle A_1'\rangle$; 2) $\{a_k^{(j)}\}$ *рівномірно обмежені, і для всіх* $a\in E_n$ *із співвідношень*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j\ge 1}\lambda_j a_k^{(j)}=a,\ \ \lambda_j\ne 0,\ \ \sum_{j\ge 1}\lambda_j=1,$$

випливає рівність $\lim_{k\to\infty}a_k^{(1)}=a$ *тоді й тільки тоді, коли* $\sum_{j\ge 2}|\lambda_j|<|\lambda_1|$.

Оскільки теореми М1 – М3, М5 – М7 дають лише достатні умови, то природно виникає питання наскільки ці умови можна послабити, і чи не є деякі з них необхідними. Стосовно ж теореми Рогозинських, постає завдання замінити в ній числа λ_j та послідовності $\{a_k^{(j)}\}$ на функції $\lambda_j(x)$ та $a_j(x)$. Саме цим питанням і присвячено перший розділ дисертації.

1.2.2. Необхідні та достатні умови у деяких мерсерових теоремах для послідовностей. Основними результатами даного пункту є теореми 1 і 2.

Теорема 1. *Нехай* L *– банахів простір над полем* Φ, *де* $\Phi=\mathbb{C}$ *або* $\Phi=\mathbb{R}$, $\alpha_n\in\Phi$ *і* $p_n\in\Phi$ *– фіксовані послідовності такі, що* $p_n\neq 0$, $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}p_k\neq 0$ *і* $a_n+1\neq 0$, *де* $a_n=\frac{P_{n-1}}{p_n}\alpha_n$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$ $(P_{-1}=0)$, *а* (S_n) *– довільна* L*-значна послідовність. Тоді для того щоб з рівності*

$$\alpha_n S_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_kS_k=O(1)\ \ (n\to\infty) \tag{1.7}$$

випливала рівність

$$S_n=O(1)\ \ (n\to\infty), \tag{1.8}$$

I) *достатньо, щоб*

$$\varliminf_{n\to\infty}|\alpha_n|>0 \tag{1.9}$$

і

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{a_k+1}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{a_j}{a_j+1}\right|\leq H\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0; \tag{1.10}$$

II) *якщо* $\sum\limits_{k=0}^{n}|p_k|=O(P_n)$, *то необхідно, щоб мала місце нерівність* (1.10);

III) *якщо* $(|p_n|\leq K\ \ \forall n\ \ і\ \ 1-\alpha_n=o(P_n)\ \ (n\to\infty))$ *або* $(|p_n|\leq K|p_m|\ \ \forall n\leq m\ \ і\ \ (1-\alpha_n)p_n=o(P_n)\ \ (n\to\infty))$, *то необхідно, щоб мала місце нерівність* (1.9).

□ Позначивши

$$R_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_kS_k\ ,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{1.11}$$

$$t_n=\alpha_nS_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_kS_k\ ,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{1.12}$$

дістанемо, що рівності (1.11) рівносильні рівностям

$$S_0=R_0,\ S_n=(P_nR_n-P_{n-1}R_{n-1})/p_n,\ n\in\mathbb{N}, \tag{1.13}$$

а тому з рівностей (1.11) та (1.12) випливають рівності

$$t_0 = R_0,\ t_n = (\alpha_n P_{n-1}/p_n + 1)R_n - (\alpha_n P_{n-1}/p_n)R_{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

або

$$t_0 = R_0,\ t_n = (a_n + 1)R_n - a_n R_{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

і навпаки, з рівностей (1.13) і (1.14) випливають рівності (1.11) і (1.12).

Методом математичної індукції легко встановити, що яка б не була послідовність (a_n): $a_0 = 0$, $a_n \neq -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, співвідношення (1.14) має місце тоді і тільки тоді, коли

$$R_n = \frac{t_n}{a_n + 1} + \frac{a_n t_{n-1}}{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)} + \ldots + \frac{a_n a_{n-1} \ldots a_1 t_0}{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)\ldots(a_0 + 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.15}$$

тобто перетворення (1.14) та (1.15) взаємно обернені. Звідси, зокрема, випливає, що системи $(1.11) \wedge (1.12)$ і $(1.13) \wedge (1.15)$ рівносильні.

Лінійне перетворення (1.15) має вигляд $R_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} t_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, де

$$c_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_k + 1} \prod\limits_{j=k+1}^{n} \dfrac{a_j}{a_j + 1}, & \text{коли} \quad 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{коли} \quad k > n. \end{cases}$$

Відомо [65, с. 66], що таке перетворення переводить обмежені числові послідовності в обмежені тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=0}^{n} \left| c_{n,k} \right| \le H \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, що в даному випадку рівносильно умові (1.10). Доведення цього факту зберігає силу і для довільних банаховозначних послідовностей. Тому при виконанні (1.10) $R_n = O(1)$, якщо $t_n = O(1)$ $(n \to \infty)$. Переписуючи (1.12) у вигляді

$$t_n = \alpha_n (S_n - R_n) + R_n, \tag{1.16}$$

бачимо, що послідовність (S_n) обмежена, якщо обмеженими є послідовності (t_n) і (R_n) та виконуються умови (1.9) і (1.10). Частина I) теореми 1 доведена.

Перейдемо до частини II). Якщо $\sum_{k=0}^{n} \left| p_k \right| = O(P_n)$, то

$$S_n = O(1) \Rightarrow R_n = O(1)\ (n \to \infty). \tag{1.17}$$

Нехай з (1.7) завжди випливає (1.8). Тоді в силу (1.17) з (1.7) випливає обмеженість $R_n = \dfrac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k S_k$. Враховуючи, що $(1.11)\wedge(1.12)\ \Leftrightarrow\ (1.13)\wedge(1.15)$, дістанемо, що у рівності (1.15) послідовність (R_n) обмежена завжди, коли (t_n) обмежена. Інакше кажучи, перетворення (1.15) переводить обмежені послідовності в обмежені, а тому за згаданим твердженням необхідно виконується умова (1.10). Частина II) теореми 1 доведена.

Нехай у частині III) теореми 1 ($|p_n| \le K \quad \forall n$ і $1-\alpha_n = o(P_n)$) або ($|p_n| \le K|p_m| \quad \forall n \le m$ і $(1-\alpha_n)p_n = o(P_n)$). Зауважимо, що в другому випадку теж виконується умова $1-\alpha_n = o(P_n)$.

Припустимо, що $\exists n_k \uparrow \infty:\ \alpha_{n_k} \to 0\ (k \to \infty)$. Покладемо $n_{k_0} = 0$ і виберемо номер $n_{k_1} > n_{k_0}$ таким, щоб $\left|\alpha_{n_{k_1}}\right| < 1,\ |1-\alpha_n|/|P_n| < 1/K \quad \forall n \ge n_{k_1}$, коли $|p_n| \le K$ $\forall n$, і $|(1-\alpha_n)p_n|/|P_n| < 1/K \quad \forall n \ge n_{k_1}$, коли $|p_n| \le K|p_m| \quad \forall n \le m$. Покладемо $S_{n_{k_1}} = 1$ і $S_n = 0 \ \ \forall n:\ n_{k_0} \le n < n_{k_1}$. Маємо нерівності:

$$\left|\alpha_{n_{k_1}} S_{n_{k_1}}\right| < 1,\ \frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\left|\sum_{j=0}^{n_{k_1}} p_j S_j\right| = \frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\left|p_{n_{k_1}}\right| < 1 \ \ \forall n \ge n_{k_1}.$$

Припустимо, що вже знайдено номери $n_{k_0} < n_{k_1} < \ldots < n_{k_i}$ такі, що

$$\left.\begin{array}{c} S_{n_{k_i}} = \sqrt{i},\, S_n = 0, \text{коли}\ n_{k_{i-1}} < n < n_{k_i}, \\ \left|\alpha_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{i}},\, \dfrac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\left|\sum\limits_{j=0}^{n_{k_i}} p_j S_j\right| < \dfrac{1}{\sqrt{i}} \ \forall n \ge n_{k_i}. \end{array}\right\} \tag{1.18}$$

Виберемо $n_{k_{i+1}} > n_{k_i}$ так, щоб виконувалися нерівності:

$$\left|\alpha_{n_{k_i}}\right| < \frac{1}{i+1},\ \frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\left|\sum_{j=0}^{n_{k_i}} p_j S_j\right| < \frac{1}{2\sqrt{i+1}} \quad \forall n \ge n_{k_{i+1}},$$

$$\frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|} < \frac{1}{2K(i+1)} \quad \forall n \ge n_{k_{i+1}},\ \text{коли}\ |p_n| \le K \quad \forall n,$$

$$\frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}|p_n| < \frac{1}{2K(i+1)} \quad \forall n \ge n_{k_{i+1}}, \text{ коли } |p_n| \le K|p_m| \quad \forall m \ge n.$$

Покладемо $S_{n_{k_{i+1}}} = \sqrt{i+1}$ та $S_n = 0$ при $n_{k_i} < n < n_{k_{i+1}}$. Дістанемо:

$$\left|\alpha_{n_{k_{i+1}}} S_{n_{k_{i+1}}}\right| < \sqrt{i+1}/(i+1) = 1/\sqrt{i+1},$$

а коли $n \ge n_{k_{i+1}}$, то

$$\frac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\left|p_{n_{k_{i+1}}}\right|\sqrt{i+1} \le \begin{cases} \dfrac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\cdot K \cdot \sqrt{i+1} < \dfrac{1}{2\sqrt{i+1}}, \text{ коли } |p_n| \le K \ \forall n, \\ \dfrac{|1-\alpha_n|}{|P_n|}\cdot |p_n| \cdot K \cdot \sqrt{i+1} < \dfrac{1}{2\sqrt{i+1}}, \text{коли } |p_n| \le K|p_m| \ \forall n \le m, \end{cases}$$

і тому

$$\left|\frac{1-\alpha_n}{P_n}\sum_{j=0}^{n_{k_{i+1}}} p_j S_j\right| \le \left|\frac{1-\alpha_n}{P_n}\sum_{j=0}^{n_{k_i}} p_j S_j\right| + \left|\frac{1-\alpha_n}{P_n}\right| \cdot \left|p_{n_{k_{i+1}}}\right| \cdot \sqrt{i+1} <$$

$$< 1/(2\sqrt{i+1}) + 1/(2\sqrt{i+1}) = 1/\sqrt{i+1} \quad \forall n \ge n_{k_{i+1}}.$$

Згідно з принципом математичної індукції ми побудували послідовність $n_{k_i} \uparrow \infty$ таку, що співвідношення (1.18) правильні $\forall i \in \mathbb{N}$. З (1.18) дістаємо:

$$|1-\alpha_n| \cdot |R_n| = \left|\frac{1-\alpha_n}{P_n}\sum_{j=0}^{n} p_j S_j\right| = \left|\frac{1-\alpha_n}{P_n}\sum_{j=0}^{n_{k_i}} p_j S_j\right| < \frac{1}{\sqrt{i}} \quad \forall n\colon\ n_{k_i} \le n < n_{k_{i+1}}, \text{ а}$$

$$t_n = \alpha_n S_n + (1-\alpha_n)R_n = \begin{cases} (1-\alpha_n)R_n, & \text{коли } n_{k_i} < n < n_{k_{i+1}}, \\ \alpha_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} + (1-\alpha_{n_{k_i}})R_{n_{k_i}}, & \text{коли } n = n_{k_i}. \end{cases}$$

Тому $t_n \to 0 \ (n \to \infty)$. Разом з цим $S_{n_{k_i}} = \sqrt{i} \to \infty$. Дістали протиріччя, яке і доводить частину III) теореми 1 для випадку числової послідовності (S_n).

У загальному випадку достатньо взяти побудовану числову послідовність (S_n), довільний одиничний вектор $a \in L$ і перейти до послідовності (aS_n). □

Теорема 2. *Нехай* (α_n), (p_n), (P_n), (a_n) *і* (S_n) *– послідовності з теореми* 1. *Тоді для того щоб з рівності*

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n S_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k S_k) = S \tag{1.19}$$

випливала рівність

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{1.20}$$

I) *достатньо, щоб одночасно виконувалися умови* (1.9), (1.10) *та умова*

$$\prod_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1} = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}; \tag{1.21}$$

II) *якщо* $\sum_{k=0}^{n}|p_k| = O(P_n)$ *і* $P_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$, *то необхідно, щоб були виконані умови* (1.10) *та* (1.21);

III) *якщо* $(|p_n| \le K \ \ \forall n$ *і* $1-\alpha_n = o(P_n) \ \ (n\to\infty))$ *або* $(|p_n| \le K|p_m| \ \ \forall n \le m$ *і* $(1-\alpha_n)p_n = o(P_n) \ \ (n\to\infty))$, *то необхідно, щоб мала місце нерівність* (1.9).

□ Перетворення (1.15) має вигляд $t_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} R_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тому до нього застосовна теорема Р1 пункту 1.1.3 з умовами регулярності 1) – 3). Зрозуміло, що у даному випадку умови 1) і 2) перетворюються відповідно на (1.10) і (1.21).

При доведенні теореми 1 ми встановили, що перетворення (1.14) та (1.15) взаємно обернені. Якщо в (1.14) покласти $R_n \equiv 1$, то вийде $t_n \equiv 1$. Тому і в (1.15) $t_n \equiv 1$, коли $R_n \equiv 1$. Звідси дістаємо тотожність

$$\frac{1}{a_n+1} + \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)} + \ldots + \frac{a_n a_{n-1}\ldots a_1}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)\ldots(a_0+1)} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.22}$$

Тотожність (1.22) означає, що в нашому випадку умова 3) регулярності виконується. Отже, якщо виконані умови (1.10) і (1.21), то в рівності (1.15) з умови $\lim_{n\to\infty} t_n = S$, а отже, і з (1.19), випливає, що $\lim_{n\to\infty} R_n = S$, а далі з рівності (1.16) та умови (1.9) випливає рівність $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Частина I) теореми 2 доведена.

Нехай з рівності (1.19) завжди випливає рівність (1.20). Якщо $\sum_{k=0}^{n}|p_k| = O(P_n)$ і $P_n \to \infty \ \ (n\to\infty)$, то перетворення $R_n = \sum_{k=0}^{n} p_k S_k / P_n$ регулярне в силу теореми Р1 і, отже, з (1.19) завжди випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = S$. Оскільки ж $(1.11)\wedge(1.12)\Leftrightarrow(1.13)\wedge(1.15)$, то неважко зрозуміти, що перетворення (1.15) регулярне. Звідси випливає необхідність умов (1.10) і (1.21).

Частина II) теореми 2 доведена.

Доведення частини III) теореми 1 є одночасно і доведенням частини III) теореми 2. □

1.2.3. Наслідки та їх порівняння з деякими мерсеровими теоремами. У наслідках 1 – 6 послідовність (S_n) вважається банаховозначною.

Наслідок 1. *Якщо* $\alpha_n > 0$ *і* $p_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, *то для того щоб з рівності* (1.19) *випливала рівність* (1.20),

I) *достатньо, щоб виконувалися умови* (1.9) *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n}=+\infty; \tag{1.23}$$

II) *якщо* $P_n \to \infty$ $(n\to\infty)$, *то необхідно, щоб мала місце умова* (1.23);

III) *якщо* ($p_n \le K$ $\forall n$ *і* $1-\alpha_n = o(P_n)$) *або* ($p_n \le Kp_m$ $\forall n \le m$ *і* $(1-\alpha_n)p_n =$ $= o(P_n)$), *то необхідно, щоб виконувалася умова* (1.9).

□ Якщо $\alpha_n > 0$ і $p_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, то $a_n = \alpha_n P_{n-1} / p_n > 0$ $\forall n$ і тому (1.10) випливає з (1.22). Згідно з теоремою 2, залишається довести, що $(1.21)\Leftrightarrow(1.23)$. Але це негайно випливає з таких міркувань:

$$(1.21)\Leftrightarrow\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/a_n)=\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+1/a_n)=\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\infty. \ □$$

Наслідок 2. *Якщо* $\alpha_n > 0$, $p_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $P_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ *та* ($p_n \le K$ $\forall n$ *і* $1-\alpha_n = o(P_n)$) *або* ($p_n \le Kp_m$ $\forall n \le m$ *і* $(1-\alpha_n)p_n = o(P_n)$), *то для того щоб з рівності* (1.19) *випливала рівність* (1.20), *необхідно й досить, щоб*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n > 0 \ \text{ і } \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n}=+\infty.$$

Наслідок 3. *Нехай* $\alpha_n > 0$ $\forall n$ *і* $\alpha_n = o(n)$ $(n\to\infty)$. *Тоді для того щоб з рів-*

ності $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n S_n + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k) = S$ *випливала рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *необхідно й досить, щоб* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n > 0$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\alpha_n} = +\infty$.

Наслідок 4. *Нехай* $\alpha_n > 0 \ \ \forall n$ *і* $\alpha_n = o(\ln n) \ \ (n\to\infty)$. *Тоді для того щоб з рівності* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha_n S_n + (1-\alpha_n)\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{S_k}{k+1} \Big/ \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}\right) = S$ *випливала рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *необхідно й досить, щоб* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n > 0$ *і* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_n n\ln n} = +\infty$.

Зауваження. У наслідках 2 – 4 умови, які містять символ “*o*” або “*O*”, потрібні лише для необхідності умови $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n > 0$.

□ Наслідки 2 – 4 випливають з наслідку 1. □

У наслідку 1 $p_n > 0 \ \ \forall n$. Цю нерівність можна замінити на нестрогу.

Наслідок 5. *Нехай* $p_n \ge 0$, $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k > 0$, $\alpha_n > 0 \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$. *Якщо* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n > 0$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n} = +\infty$, *то з рівності* (1.19) *випливає рівність* (1.20).

□ Занумеруємо множину $\{k\in\mathbb{N}_0 :\ p_k \ne 0\}$ (яка, очевидно, є нескінченною) у порядку зростання послідовністю $m_n \uparrow \infty$. Для довільної послідовності (f_n) введемо позначення $f_n^* = f_{m_n} \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$. Тоді $p_n^* > 0$, $P_n^* = \sum\limits_{k=0}^{m_n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k^* \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^*}{P_{n-1}^*\alpha_n^*} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{m_n}}{P_{m_n-1}\alpha_{m_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n} = +\infty \text{ і } \underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n^* > 0.$$

Нехай $t_n = \alpha_n S_n + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k S_k \to S \quad (n\to\infty)$. Тоді $t_n^* = t_{m_n} = \alpha_n^* S_n^* + {}$ $+(1-\alpha_n^*)\dfrac{1}{P_n^*}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k^* S_k^* \to S \ \ (n\to\infty)$. Звідси за наслідком 1 в частині I) випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^* = S$.

Легко бачити, що з умов $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n}=+\infty$ випливає, що $P_n\to\infty$ $\Rightarrow$ $P_n^*\to\infty$ $(n\to\infty)$ $\Rightarrow$ метод (R,p^*) регулярний. Тому якщо $S_n^*\to S$, то й $R_n^*=\frac{1}{P_n^*}\sum_{k=0}^{n}p_k^*S_k^*\to S$, або $R_{m_n}\to S$ $(n\to\infty)$. З іншого боку, $R_k=R_{m_n}$, коли $m_n\le k<m_{n+1}$, $\Rightarrow$ $R_n\to S$ $(n\to\infty)$. Тепер з рівності $t_n=\alpha_n(S_n-R_n)+R_n$ і умови $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n>0$ випливає, що $S_n-R_n\to 0$, або $S_n\to S$ $(n\to\infty)$. □

Теорема 2 та наслідки 1– 5 узагальнюють теорему Мерсера у формі Шура. Наступне твердження узагальнює безпосередньо теорему М1.

Наслідок 6. *Нехай* $p_n\ge 0$, $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k>0$, $\alpha_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$ *і* $p_n/P_n\to 0$ $(n\to\infty)$. *Якщо* $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n>0$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n}=+\infty$, *то з рівності*

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n S_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}p_kS_k)=S$$

випливає рівність $\lim_{n\to\infty}S_n=S$.

□ Якщо позначити $R_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_kS_k$, то перетворення наслідку 6 запишеться у вигляді $t_n=\alpha_nS_n+(1-\alpha_n)R_{n-1}$. З рівності $R_{n-1}=\frac{1}{P_{n-1}}(P_nR_n-p_nS_n)$ випливає:

$$t_n=\beta_nS_n+(1-\beta_n)R_n,$$

де $\beta_n=\frac{1}{P_{n-1}}(\alpha_nP_n-p_n)$. Враховуючи умови $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n}=+\infty$ (а отже, $P_n\to\infty$) та умову $p_n/P_n\to 0$, дістанемо $\beta_n\ge a>0$ $\forall n\ge n_0$ і $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{p_n}{\beta_nP_{n-1}}=+\infty$, оскільки $\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\frac{P_n}{P_{n-1}}-\frac{p_n}{\alpha_nP_{n-1}}\to 1$ $(n\to\infty)$.

Тепер твердження наслідку 6 випливає з наслідку 5. □

Теорема М5 пункту 1.2.1, яка містить у собі теорему М2, отримала повне узагальнення в наслідку 5 у випадку, коли $\beta_n \equiv 1-\alpha_n$. Легко бачити, що теорема М5 випливає з наслідку 5 і у випадку $\beta_n \equiv \gamma_n - \alpha_n$, де $\gamma_n \to \gamma > 0 \ \ (n \to \infty)$, причому умову $\alpha_n \le b < +\infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ можна послабити, замінивши її умовою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n} = +\infty .$$

□ Справді, нехай $t_n = \alpha_n S_n + \beta_n R_n \to \gamma S \ \ (n \to \infty)$. Тоді

$$t_n / \gamma_n = (\alpha_n / \gamma_n) S_n + (1 - \alpha_n / \gamma_n) R_n \to S \ \ (n \to \infty) .$$

Для послідовності (α_n / γ_n) виконуються умови наслідку 5: $\underline{\lim}_{n\to\infty} (\alpha_n / \gamma_n) > 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \gamma_n}{P_{n-1}\alpha_n} = +\infty$. Тому $S_n \to S \ \ (n \to \infty)$, що й треба було довести. □

Покажемо тепер, що теорема М6 випливає з теореми М7.

□ Нехай $\underline{\lim}_{n\to\infty} \operatorname{Re} \alpha_n > 0$. Тоді $\operatorname{Re} \alpha_n \ge \alpha > 0 \ \ \forall n > n_0$. Враховуючи, що З. Сімсон розглядає лише випадок $p_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ і $\alpha_n = O(1)$, маємо:

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\gamma_n + i\delta_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} - i \frac{\delta_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} = \lambda_n + i\mu_n \ \ \forall n > n_0 ,$$

причому $\lambda_n \ge \lambda > 0$, $|\mu_n| \le \mu < \infty \ \ \forall n > n_0$. Тоді

$$a_n^* = \frac{p_n}{P_{n-1}\alpha_n} = \frac{p_n}{P_{n-1}} (\lambda_n + i\mu_n) = |a_n^*| (\cos\sigma_n + i \sin\sigma_n) \text{, а } |\operatorname{tg}\sigma_n| = \left| \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right| \le \frac{\mu}{\lambda} \ \ \forall n > n_0 .$$

Позначаючи $\sigma = \operatorname{arctg}(\mu / \lambda)$ і враховуючи, що $\operatorname{Re} a_n^* = (p_n / P_{n-1}) \lambda_n > 0$, дістанемо потрібну нам нерівність $|\arg a_n^*| \le \sigma < \pi / 2 \ \ \forall n > n_0$, яка фігурує в теоремі М7. □

Покажемо, нарешті, що теорема М7 випливає з частини I) теореми 2.

□ Нехай виконано умови теореми М7: $p_n \ne 0$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \ne 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, $P_n \to \infty$, $\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n)$, $\alpha_n = O(1)$, $\frac{1}{\alpha_n} = O(1) \ \ (n \to \infty)$ і $|\arg a_n^*| \le \sigma < \pi / 2 \ \ \forall n \ge n_0$, де $a_n^* = p_n / (P_{n-1}\alpha_n)$. Не порушуючи загальності, вважатимемо $n_0 = 1$, а відтак

$a_n+1=1/a_n^*+1\neq 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Зрозуміло, що умова (1.9) рівносильна умові $1/\alpha_n=O(1)\ \ (n\to\infty)$. Перевіримо виконання умов (1.10) та (1.21).

Позначимо $\bar{P}_n=\sum_{k=0}^{n}|p_k|$, $b_n^*=\dfrac{|p_n|}{|\alpha_n|\bar{P}_{n-1}}=|a_n^*|\cdot\dfrac{|P_{n-1}|}{\bar{P}_{n-1}}$, $d_n^*=b_n^*\cos\sigma$, $d_n=1/d_n^*$ $\forall n\in\mathbb{N}$. У зв'язку з тим, що $\sum_{k=0}^{n}|p_k|=O(P_n)$, $\exists H\geq 1$:

$$|P_n|\leq\bar{P}_n\leq H|P_n|\ \Rightarrow\ b_n^*\leq|a_n^*|\leq Hb_n^*\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

З умови $|\arg a_n^*|\leq\sigma<\pi/2\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ випливає, що $|1+a_n^*|\geq|\mathrm{Re}(1+a_n^*)|=$
$=|1+\mathrm{Re}\,a_n^*|=1+\mathrm{Re}\,a_n^*=1+|a_n^*|\cos(\arg a_n^*)\geq 1+|a_n^*|\cos\sigma>1\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Враховуючи встановлені вище нерівності, а також те, що функція $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$, зростає, для матриці $(c_{n,k})$ перетворення (1.15) дістанемо:

$$|c_{n,k}|=\left|\frac{1}{a_k+1}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{a_j}{a_j+1}\right|=\left|\frac{a_k^*}{1+a_k^*}\right|\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{|1+a_j^*|}\leq\frac{1}{\cos\sigma}\cdot\frac{|a_k^*|\cos\sigma}{1+|a_k^*|\cos\sigma}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{1+|a_j^*|\cos\sigma}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\cos\sigma}\cdot\frac{Hb_k^*\cos\sigma}{1+Hb_k^*\cos\sigma}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{1+b_j^*\cos\sigma}\leq\frac{H}{\cos\sigma}\cdot\frac{b_k^*\cos\sigma}{1+b_k^*\cos\sigma}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{1+b_j^*\cos\sigma}=$$

$$=\frac{H}{\cos\sigma}\cdot\frac{d_k^*}{1+d_k^*}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{1+d_j^*}=\frac{H}{\cos\sigma}\cdot\frac{1}{1+d_k}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{d_j}{d_j+1}=:\frac{H}{\cos\sigma}c_{n,k}^*\quad\forall n\in\mathbb{N},\ k\in\overline{1,n}.$$

Аналогічно,

$$|c_{n,0}|=\prod_{j=1}^{n}\frac{|a_j|}{|1+a_j|}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{|1+a_j^*|}\leq\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|a_j^*|\cos\sigma}\leq$$

$$\leq\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+b_j^*\cos\sigma}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+d_j^*}=\prod_{j=1}^{n}\frac{d_j}{d_j+1}=:c_{n,0}^*\quad\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Отже, $|c_{n,k}|\leq\dfrac{H}{\cos\sigma}c_{n,k}^*\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0,\ k\in\overline{0,n}$. Оскільки матриця $(c_{n,k}^*)$ має таку саму будову, як і матриця $(c_{n,k})$, то за рівністю (1.22) $\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}^*=1\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$. Тоді

$\sum_{k=0}^{n}|c_{n,k}| \le \frac{H}{\cos\sigma}\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^{*} = \frac{H}{\cos\sigma}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, тобто виконується умова (1.10).

Крім того, оскільки $d_n^* > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\alpha_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, то при фіксованому $k \in \mathbb{N}_0$ $c_{n,k}^* \to 0$ $(n \to \infty)$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{d_k+1}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{d_j}{d_j+1} \to 0\,(n \to \infty) \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+d_n^*} = 0 \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+d_n^*) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+d_n^*) = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|p_n|\cos\sigma}{|\alpha_n|\bar{P}_{n-1}} = +\infty.$$

Згідно з відомим твердженням [64, тв. 4) с. 290], $\sum_{n=1}^{\infty}|p_n|/\bar{P}_{n-1} = +\infty$ в силу того що $P_n \to \infty$. Тому і $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^* = +\infty$ $\Rightarrow$ $c_{n,k}^* \to 0$ $(n \to \infty\ \forall k)$ $\Rightarrow$ $c_{n,k} \to 0$ $(n \to \infty\ \ \forall k)$, що рівносильно умові (1.21).

Отже, при виконанні умов теореми М7 пункту 1.2.1 виконуються всі умови частини І) теореми 2. Це означає, що теорема Мельника М7, а відтак, і теорема Сімсона М6, випливають з нашого твердження. □

Слід зазначити, що навіть для перенесення тверджень теорем М2, М5 – М7 на банаховозначні послідовності (S_n) потрібно було б шукати нові методи їх доведення. З теореми 2 усі ці твердження випливають як наслідки, ще й у підсиленому вигляді. Щоправда, відмовившись від умови $\alpha_n = O(1)$, ми втратили, взагалі кажучи, регулярність перетворення $\alpha_n S_n + (1-\alpha_n)R_n$.

1.2.4. Необхідні і достатні умови у деяких мерсерових теоремах для функцій. Маючи на меті підсилити теорему М3 пункту 1.2.1 та узагальнити її на банаховозначні функції $S(x)$, ми дістали таку теорему.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha(x)$ *і* $p(x)$ *– фіксовані неперервні функції на проміжку* $[0;+\infty)$, *причому* $\alpha(x) > 0$, $p(x) > 0$, $P(x) = \int_0^x p(y)dy$ $\forall x \ge 0$, *а функція* $S(x)$ *довільна банаховозначна, неперервна на* $[0;+\infty)$. *Тоді для того щоб з рівності*

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha(x)S(x)+(1-\alpha(x))\frac{1}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy)=S \tag{1.24}$$

випливала рівність

$$\lim_{x\to+\infty} S(x)=S\,, \tag{1.25}$$

I) *достатньо, щоб*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \alpha(x)>0 \tag{1.26}$$

і для довільного фіксованого $a>0$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{p(x)\,dx}{\alpha(x)P(x)}=+\infty\,; \tag{1.27}$$

II) *якщо* $P(x)\to\infty$ $(x\to\infty)$, *то необхідно, щоб мала місце умова* (1.27);

III) *якщо* ($P(x)\to\infty$, $\alpha(x)=O(1)$, *а* $p(x)=O(P(x))$ $(x\to+\infty)$) *або* ($p(x)=O(1)$ *і* $1-\alpha(x)=o(P(x))$ $(x\to+\infty)$), *то необхідно, щоб мала місце умова* (1.26).

Зазначимо, що диференціювання та інтегрування банаховозначних функцій здійснюється аналогічно диференціюванню та інтегруванню числових функцій (див., наприклад, [67]).

□ Позначимо

$$R(x)=\frac{1}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy\,, \tag{1.28}$$

$$t(x)=\alpha(x)S(x)+(1-\alpha(x))R(x)\ \ \forall x\in(0;+\infty)\,. \tag{1.29}$$

Оскільки функції $p(x)$ і $S(x)$ неперервні на $[0;+\infty)$, то за формулами диференціювання добутку та інтеграла зі змінною верхньою межею [67, с. 83, 91] матимемо:

$$S(x)=\frac{P(x)}{p(x)}R'(x)+R(x)\,, \tag{1.30}$$

$$t(x)=\frac{\alpha(x)P(x)}{p(x)}R'(x)+R(x)\ \ \forall x\in(0;+\infty)\,. \tag{1.31}$$

Останню рівність можна записати у вигляді

$$R' + \frac{p(x)}{\alpha(x)P(x)}R = \frac{p(x)}{\alpha(x)P(x)}t(x), \qquad (1.32)$$

а це лінійне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $R = R(x)$.

В силу неперервності $\alpha(x)$, $p(x)$, $P(x)$, а отже і $t(x)$, рівняння (1.32) при кожному $a > 0$ має єдиний розв’язок, визначений на $(0;+\infty)$, що задовольняє початкову умову $R(a) = c$, де $c = \frac{1}{P(a)}\int\limits_0^a p(y)S(y)\,dy$ (див. [67, с. 199]), а саме:

$$R(x) = e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\left(c + \int\limits_a^x \frac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}t(y)\,dy\right). \qquad (1.33)$$

Розглянемо інтегральне перетворення $\varphi(x) = \int\limits_a^{+\infty} K(x,y)t(y)\,dy$ з ядром

$$K(x,y) = \begin{cases} e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\dfrac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}, & \text{коли } a \le y \le x, \\ 0, & \text{коли } a \le x < y. \end{cases}$$

Покажемо, що для перетворення $\varphi(x)$ виконуються наступні достатні умови регулярності: а) $\int\limits_a^{+\infty}|K(x,y)|\,dy \le H \quad \forall x > X$, б) $\int\limits_a^{+\infty}K(x,y)\,dy \to 1 \ (x \to +\infty)$ і в) $\int\limits_a^b K(x,y)\,dy \to 0 \ (x \to +\infty \ \forall b > a)$ [65, т. 6, с. 71].

Справді, оскільки виконується умова (1.27) і $K(x,y) > 0 \ \ \forall x,y \ge a$, то

$$\int\limits_a^{+\infty}|K(x,y)|\,dy = \int\limits_a^{+\infty}K(x,y)\,dy = e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\int\limits_a^x \frac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}dy =$$

$$= e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\int\limits_a^x e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}d\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)} = e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\left(e^{\int\limits_a^x \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}} - 1\right) = 1 - e^{-\int\limits_a^x \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1,$$

$$\int\limits_a^b K(x,y)\,dy = e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\int\limits_a^b \frac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}dy \to 0 \ \ (x \to +\infty \ \forall b > a).$$

Отже, за теоремою 6 [65, с. 71], яка зберігає силу і для банаховозначних функцій $t(y)$, неперервних на $[a;+\infty)$, дістаємо

$$t(y)\to S \Rightarrow \varphi(x)\to S \ \ (x\to+\infty).$$

Звідси та з (1.33) завдяки умові (1.27) випливає, що

$$R(x)=ce^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}+\varphi(x)\to S \ \ (x\to+\infty).$$

Переписуючи (1.29) у вигляді

$$t(x)=\alpha(x)(S(x)-R(x))+R(x) \ \ \forall x\in(0;+\infty)$$

і враховуючи умову (1.26), дістанемо (1.25). Частина I) теореми 3 доведена.

Нехай виконуються умови частини II) теореми 3. Зафіксуємо довільне число $a\in(0;+\infty)$ і визначимо функцію $t(x)$ наступним чином: $t(x)=0$ на $[0;a]$, $t(x)=1/x$ на $[2a;+\infty)$ і $t(x)$ лінійна на $[a;2a]$.

Визначимо $R(x)$ рівністю (1.33) в інтервалі $(0;+\infty)$, вважаючи $c=0$, і покладемо $R(0)=0$. Як зазначалося, така функція є розв’язком лінійного диференціального рівняння (1.32), а отже, і (1.31), в інтервалі $(0;+\infty)$. При цьому $R(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$ і $R([0;a])=0$. З рівності (1.33) знайдемо $R'(x)$, $x>0$:

$$R'(x)=\frac{p(x)}{\alpha(x)P(x)}\left(t(x)-e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)dy}{\alpha(y)P(y)}}\int\limits_a^x \frac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}e^{\int\limits_a^y \frac{p(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)P(\tau)}}t(y)\,dy\right).$$

Крім того, $R'(0)=0$, бо $R([0;a])=0$. Звідси випливає, що функція $R'(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$ і $R'([0;a])=0$.

Визначимо тепер функцію $S(x)$ рівністю (1.30). Ця функція $S(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$ і $S([0;a])=0$. Щоб знайти вираз $R(x)$ через $S(x)$, зауважимо, що $R(x)$ має бути розв’язком рівняння (1.30) і задовольняти початкову умову $R(a)=0$, причому така функція єдина. Простою перевіркою переконуємося, що $R(x)$ має вигляд (1.28). Тепер можна стверджувати, що функція $t(x)$, визначена рівністю (1.29), є тією самою, що і в рівності (1.33), а там вона така, як ми її побудували. Тому, оскільки $t(x)\to 0 \ \ (x\to+\infty)$, то і $S(x)\to 0 \ \ (x\to+\infty)$, згідно з умовою частини II) теореми 3.

В силу умови $P(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, за вже згадуваною теоремою 6 [65, с. 71] перетворення (1.28) регулярне, а отже, $R(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$.

Повернемося тепер до рівності (1.33), де $c=0$. Границя при $x\to+\infty$ інтеграла, що стоїть у дужках, додатна, оскільки там підінтегральна функція неперервна і додатна. Через це $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\int\limits_a^x \frac{p(y)}{\alpha(y)P(y)}}=0$, тобто виконується умова (1.27).

Частина II) теореми 3 доведена.

Доведемо частину III) теореми 3 спочатку для дійсних функцій $S(x)$.

Нехай $P(x)\to\infty$, $\alpha(x)=O(1)$, а $p(x)=O(P(x))$ $(x\to+\infty)$. Всупереч тому, що треба довести, припустимо, що існує послідовність (x_n) така, що $\alpha(x_n)\to 0$, $x_n\uparrow\infty$ при $n\to\infty$. Візьмемо довільну послідовність $\varepsilon_n\downarrow 0$. В силу неперервності $\alpha(x)$ можна побудувати таку послідовність $\delta_n\downarrow 0$, що $|\alpha(x)-\alpha(x_n)|<\varepsilon_n$ $\forall x\in\overline{O_{\delta_n}(x_n)}$ і $\forall n$, причому можна вважати, що відрізки $\overline{O_{\delta_n}(x_n)}=[a_n;b_n]$ попарно не перетинаються і $\dfrac{p(x)}{P(x)}\le H$ $\forall x\ge a_1$.

Позначимо $n_0=a_0=b_0=0$. Знайдемо номер n_1: $\alpha(x_{n_1})<1/2$, $\varepsilon_{n_1}<1/4$, $b_{n_1}-a_{n_1}=2\delta_{n_1}<1/2$. Покладемо $S(x_{n_1})=1$, $S(x)=0$ $\forall x\in[0;a_{n_1}]\bigcup\{b_{n_1}\}$ і зробимо $S(x)$ лінійною окремо на кожному з відрізків $[a_{n_1};x_{n_1}]$ та $[x_{n_1};b_{n_1}]$. Маємо:

$$|\alpha(x_{n_1})S(x_{n_1})|<1,\ |\alpha(x)S(x)-\alpha(x_{n_1})S(x_{n_1})|\le S(x)|\alpha(x)-\alpha(x_{n_1})|+$$

$$+\alpha(x_{n_1})|S(x)-S(x_{n_1})|<1/2+1/2=1\ \ \forall x\in[a_{n_1};b_{n_1}],$$

$$\frac{1}{P(b_{n_1})}\int\limits_0^{b_{n_1}} p(y)S(y)\,dy\le\frac{1}{P(b_{n_1})}\int\limits_{a_{n_1}}^{b_{n_1}} p(y)\,dy=$$

$$=\frac{p(c_{n_1})}{P(b_{n_1})}(b_{n_1}-a_{n_1})\le\frac{p(c_{n_1})}{P(c_{n_1})}(b_{n_1}-a_{n_1})<\frac{H}{2},$$

де $c_{n_1}\in[a_{n_1};b_{n_1}]$.

Припустимо, що вже знайдено номери $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ такі, що

$$\alpha(x_{n_k}) < \frac{1}{k2^k},\ \varepsilon_{n_k} < \frac{1}{k2^{k+1}},\ b_{n_k} - a_{n_k} = 2\delta_{n_k} < \frac{2}{k2^{k+1}},\ S(x_{n_k}) = k,\ S(a_{n_k}) = S(b_{n_k}) = 0,$$

$S(x)$ лінійна на $[a_{n_k}; x_{n_k}]$, $[x_{n_k}; b_{n_k}]$, $S(x) = 0$, коли $b_{n_{k-1}} < x < a_{n_k}$,

$$\left|\alpha(x)S(x) - \alpha(x_{n_k})S(x_{n_k})\right| < \frac{1}{2^{k-1}}\quad \forall x \in [a_{n_k}; b_{n_k}] \text{ і } \frac{1}{P(b_{n_k})}\int_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy < \frac{H}{2^{k-1}}.$$

Виберемо номер $n_{k+1} > n_k$ так, щоб $\alpha(x_{n_{k+1}}) < \dfrac{1}{(k+1)2^{k+1}}$, $\varepsilon_{n_{k+1}} < \dfrac{1}{(k+1)2^{k+2}}$,

$$b_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}} = 2\delta_{n_{k+1}} < \frac{2}{(k+1)2^{k+2}},\ \frac{P(b_{n_k})}{P(b_{n_{k+1}})} < \frac{1}{4}.$$

Покладемо $S(x_{n_{k+1}}) = k+1$, $S(a_{n_{k+1}}) = S(b_{n_{k+1}}) = 0$, $S(x) = 0$, коли $b_{n_k} < x < a_{n_{k+1}}$, $S(x)$ лінійна на $[a_{n_{k+1}}; x_{n_{k+1}}]$ та $[x_{n_{k+1}}; b_{n_{k+1}}]$. Маємо:

$$\alpha(x_{n_{k+1}})S(x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}},\ \left|\alpha(x)S(x) - \alpha(x_{n_{k+1}})S(x_{n_{k+1}})\right| \le S(x)\left|\alpha(x) - \alpha(x_{n_{k+1}})\right| +$$

$$+\alpha(x_{n_{k+1}})\left|S(x) - S(x_{n_{k+1}})\right| < \frac{k+1}{(k+1)2^{k+1}} + \frac{k+1}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}\quad \forall x \in [a_{n_{k+1}}; b_{n_{k+1}}],$$

$$\frac{1}{P(b_{n_{k+1}})}\int_0^{b_{n_{k+1}}} p(y)S(y)\,dy = \frac{P(b_{n_k})}{P(b_{n_{k+1}})}\cdot\frac{1}{P(b_{n_k})}\int_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy + \frac{1}{P(b_{n_{k+1}})}\int_{a_{n_{k+1}}}^{b_{n_{k+1}}} p(y)S(y)\,dy <$$

$$< \frac{1}{4}\cdot\frac{H}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{P(b_{n_{k+1}})}\int_{a_{n_{k+1}}}^{b_{n_{k+1}}} p(y)\,dy = \frac{H}{2^{k+1}} + (k+1)\frac{p(c_{n_{k+1}})}{P(b_{n_{k+1}})}(b_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}}) \le$$

$$\le \frac{H}{2^{k+1}} + (k+1)\frac{p(c_{n_{k+1}})}{P(c_{n_{k+1}})}2\delta_{n_{k+1}} < \frac{H}{2^{k+1}} + \frac{(k+1)\cdot H\cdot 2}{(k+1)2^{k+2}} = \frac{H}{2^k},$$

де $c_{n_{k+1}} \in [a_{n_{k+1}}; b_{n_{k+1}}]$.

Отже, згідно з принципом математичної індукції, побудовано послідовність (n_k), для якої всі умови, перелічені в припущенні індукції, виконуються $\forall k \in \mathbb{N}$. Далі маємо:

$$R(x) = \frac{1}{P(x)}\int_0^x p(y)S(y)\,dy = \frac{1}{P(x)}\int_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy \le \frac{1}{P(b_{n_k})}\int_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy < \frac{H}{2^{k-1}}$$

$\forall x \in (b_{n_k}; a_{n_{k+1}})$ $\forall k$ і

$$R(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^{b_{n_{k-1}}} p(y)S(y)\,dy + \frac{1}{P(x)} \int_{a_{n_k}}^{x} p(y)S(y)\,dy \le$$

$$\le \frac{1}{P(b_{n_{k-1}})} \int_0^{b_{n_{k-1}}} p(y)S(y)\,dy + \frac{k}{P(x)} \int_{a_{n_k}}^{x} p(y)\,dy < \frac{H}{2^{k-2}} + k\frac{p(c)}{P(x)}(x - a_{n_k}) \le$$

$$\le \frac{H}{2^{k-2}} + k\frac{p(c)}{P(c)}(b_{n_k} - a_{n_k}) < \frac{H}{2^{k-2}} + kH\frac{1}{k2^k} < \frac{H}{2^{k-3}} \quad \forall x \in [a_{n_k}; b_{n_k}] \ \forall k.$$

В останніх міркуваннях, як і вище, ми вибирали точку $c \in [a_{n_k}; x]$, користуючись теоремою інтегрального числення про середнє.

Таким чином, $R(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. З побудови функції $S(x)$ випливає також, що $S(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$, $\alpha(x)S(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$, причому за умовою $\alpha(x) = O(1)$ $(x \to +\infty)$. Тоді $t(x) = \alpha(x)S(x) + (1-\alpha(x))R(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Проте $S(x) \ne O(1)$ $(x \to +\infty)$. Дістали протиріччя, яке доводить необхідність умови (1.26).

Нехай тепер $p(x) = O(1)$, $1 - \alpha(x) = o(P(x))$ $(x \to +\infty)$.

Припустимо, що нерівність (1.26) не правильна, а існує послідовність $x_n \uparrow +\infty$ така, що $\alpha(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Зафіксуємо довільну послідовність $\varepsilon_n \downarrow 0$. Користуючись неперервністю $\alpha(x)$, побудуємо послідовність $\delta_n \downarrow 0$ таку, що $|\alpha(x) - \alpha(x_n)| < \varepsilon_n$ $\forall x \in \overline{O_{\delta_n}(x_n)}$, причому можна вважати, що відрізки $\overline{O_{\delta_n}(x_n)} = [a_n; b_n]$ попарно не перетинаються, $p(x) \le H$ і $\dfrac{|1-\alpha(x)|}{P(x)} \le 1$ $\forall x \ge a_1$.

Позначимо $n_0 = a_0 = b_0 = 0$ і знайдемо номер n_1: $\alpha(x_{n_1}) < 1/2$, $\varepsilon_{n_1} < 1/2$, $b_{n_1} - a_{n_1} = 2\delta_{n_1} < 1/2$. Покладемо $S(x) = 0$ для $x \in [0; a_{n_1}] \cup \{b_{n_1}\}$, $S(x_{n_1}) = 1$, $S(x)$ лінійна на кожному з відрізків $[a_{n_1}; x_{n_1}]$ та $[x_{n_1}; b_{n_1}]$. Маємо:

$$|\alpha(x)S(x) - \alpha(x_{n_1})S(x_{n_1})| \le S(x)|\alpha(x) - \alpha(x_{n_1})| +$$

$$+\alpha(x_{n_1})\left|S(x)-S(x_{n_1})\right|<1/2+1/2=1 \quad \forall x\in[a_{n_1};b_{n_1}],$$

$$\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_1}} p(y)S(y)\,dy=\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_{a_{n_1}}^{b_{n_1}} p(y)S(y)\,dy<\frac{H}{2} \quad \forall x\ge a_1.$$

Згідно з методом математичної індукції припустимо, що вже вибрано номери $0=n_0<n_1<\ldots<n_k$ такі, що

$$\alpha(x_{n_k})<\frac{1}{2k},\ \varepsilon_{n_k}<\frac{1}{2k},\ b_{n_k}-a_{n_k}=2\delta_{n_k}<2\cdot\frac{1}{4k},$$

$$\left|\alpha(x)S(x)-\alpha(x_{n_k})S(x_{n_k})\right|<\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \forall x\in[a_{n_k};b_{n_k}],$$

$$\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy<\frac{H}{\sqrt{k}} \quad \forall x\ge a_{n_k},$$

а функція $S(x)$ побудована так, що $S(x)=0$, коли $x\in[b_{n_{k-1}};a_{n_k}]\cup\{b_{n_k}\}$, $S(x_{n_k})=\sqrt{k}$, $S(x)$ лінійна на $[a_{n_k};x_{n_k}]$ та $[x_{n_k};b_{n_k}]$.

Знайдемо номер $n_{k+1}>n_k$ такий, що $\alpha(x_{n_{k+1}})<\frac{1}{2(k+1)}$, $\varepsilon_{n_{k+1}}<\frac{1}{2(k+1)}$, $\delta_{n_{k+1}}<\frac{1}{4(k+1)}$, $\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy<\frac{H}{2\sqrt{k+1}}$ $\forall x\ge a_{n_{k+1}}$. Довизначимо функцію $S(x)$, поклавши $S(x)=0$ для $x\in[b_{n_k};a_{n_{k+1}}]\cup\{b_{n_{k+1}}\}$, $S(x_{n_{k+1}})=\sqrt{k+1}$, $S(x)$ лінійна на $[a_{n_{k+1}};x_{n_{k+1}}]$ і на $[x_{n_{k+1}};b_{n_{k+1}}]$. Дістанемо:

$$\left|\alpha(x)S(x)-\alpha(x_{n_{k+1}})S(x_{n_{k+1}})\right|\le S(x)\left|\alpha(x)-\alpha(x_{n_{k+1}})\right|+\alpha(x_{n_{k+1}})\left|S(x)-S(x_{n_{k+1}})\right|<$$

$$<\frac{\sqrt{k+1}}{2(k+1)}+\frac{\sqrt{k+1}}{2(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x\in[a_{n_{k+1}};b_{n_{k+1}}],$$

$$\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_{k+1}}} p(y)S(y)\,dy=\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy+\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_{a_{n_{k+1}}}^{b_{n_{k+1}}} p(y)S(y)\,dy<$$

$$<\frac{H}{2\sqrt{k+1}}+H\sqrt{k+1}(b_{n_{k+1}}-a_{n_{k+1}})<\frac{H}{2\sqrt{k+1}}+\frac{H\sqrt{k+1}}{2(k+1)}=\frac{H}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x\ge a_{n_{k+1}}.$$

Отже припущення індукції виконується $\forall k\in\mathbb{N}$. З побудови функції $S(x)$ і послідовності (n_k) дістаємо: $\alpha(x)S(x)\to 0 \ (x\to+\infty)$,

$$\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy \le \frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy < \frac{H}{\sqrt{k}} \quad \forall x\in[a_{n_k};b_{n_k}] \ \forall k,$$

$$\frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy = \frac{|1-\alpha(x)|}{P(x)}\int\limits_0^{b_{n_k}} p(y)S(y)\,dy < \frac{H}{\sqrt{k}} \quad \forall x\in(b_{n_k};a_{n_{k+1}}) \ \forall k.$$

Звідси випливає, що $\frac{1-\alpha(x)}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy \to 0 \ (x\to+\infty)$, а відтак,

$$t(x)=\alpha(x)S(x)+\frac{1-\alpha(x)}{P(x)}\int\limits_0^x p(y)S(y)\,dy \to 0 \ (x\to+\infty).$$

Проте навіть $S(x)\ne O(1) \ (x\to+\infty)$. Отримане протиріччя доводить необхідність умови (1.26). Таким чином, частина III) теореми 3 теж доведена для дійсних функцій $S(x)$.

У загальному випадку достатньо взяти довільний одиничний вектор a і розглянути функцію $aS(x)$, де $S(x)$ – дійсна функція, побудована вище. □

Зауваження. Умова $\frac{p(x)}{P(x)}=O(1) \ (x\to+\infty)$ у теоремі 3 не зайва, як може здаватися з першого погляду, якщо її порівнювати з умовою $\frac{p_n}{P_n}\le 1$, яка завжди виконується для послідовностей. Наприклад, для функції $p(x)=2xe^{x^2}$ маємо

$$P(x)=\int\limits_0^x p(y)\,dy=\int\limits_0^x 2ye^{y^2}\,dy=e^{x^2}-1 \text{ і } \frac{p(x)}{P(x)}=\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}-1}\to+\infty \ (x\to+\infty).$$

Наслідок 7. *Нехай* $\alpha(x)$, $p(x)$, $P(x)$ *і* $S(x)$ – *функції з теореми* 3, *причому* $P(x)\to\infty$ *і* ($\alpha(x)=O(1)$, $p(x)=O(P(x))$ $(x\to+\infty)$) *або* ($p(x)=O(1)$, $\alpha(x)=$ $=O(P(x))$ $(x\to+\infty)$). *Тоді для того щоб з рівності* (1.24) *випливала рівність* (1.25), *необхідно й досить, щоб* $\underline{\lim}_{x\to+\infty}\alpha(x)>0$ *і* $\int\limits_a^{+\infty}\frac{p(x)\,dx}{\alpha(x)P(x)}=+\infty \ \forall a\in(0;+\infty)$.

Зауваження. Розбіжність останнього інтеграла випливає вже з двох умов:

$P(x) \to \infty$ і $\alpha(x) = O(1)$ $(x \to +\infty)$ (див. лему 1). Тому у випадку $\alpha(x) = O(1)$ цей невласний інтеграл можна опустити взагалі.

Наслідок 8. *Нехай в умовах наслідку* 7 $p(x) \equiv 1$ і $\alpha(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$. *Тоді для того щоб з рівності* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha(x)S(x) + (1-\alpha(x))\frac{1}{x}\int\limits_0^x S(y)\,dy\right) = S$ *випливала рівність* $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = S$, *необхідно й досить, щоб*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \alpha(x) > 0 \ \ i \ \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x\alpha(x)} = +\infty \ \ \forall a \in (0;+\infty).$$

Наслідок 9. *Нехай в умовах наслідку* 7 $p(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $\alpha(x) = o(\ln x)$ $(x \to +\infty)$. *Тоді для того щоб з рівності* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha(x)S(x) + (1-\alpha(x))\frac{1}{\ln(x+1)}\int\limits_0^x \frac{S(y)}{y+1}\,dy\right) = S$ *випливала рівність* $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = S$, *необхідно й досить, щоб*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \alpha(x) > 0 \ \ i \ \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{(x\ln x)\alpha(x)} = +\infty \ \ \forall a \in (0;+\infty).$$

Зауваження. 1. Обмеження на швидкість росту функції $\alpha(x)$ у наслідках 7 – 9 потрібні лише для необхідності умови $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) > 0$.

2. Якщо $P(x) \to \infty$ $(x \to +\infty)$, то умова (1.27) слабша, ніж $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) < +\infty$, котру вказують, наприклад, М. О. Давидов (теорема М2 пункту 1.2.1) і Л. Ф. Таргонський [60]. Це випливає з наступної леми.

Лема 1. *Нехай* $p(x)$ *і* $P(x)$ *– функції з теореми* 3. *Тоді якщо* $P(x) \to \infty$ *при* $x \to +\infty$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{p(x)}{P(x)}\,dx = +\infty$ $\forall a > 0$.

☐ Відмітимо, що

$$\int\limits_a^{x_2} \frac{p(x)}{P(x)}\,dx - \int\limits_a^{x_1} \frac{p(x)}{P(x)}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{p(x)}{P(x)}\,dx \ge \frac{1}{P(x_2)} \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx =$$

$$=\frac{1}{P(x_2)}(P(x_2)-P(x_1))=1-\frac{P(x_1)}{P(x_2)}\ \ \forall x_2>x_1\geq a.$$

Звідси випливає, що $\int\limits_a^{+\infty}\frac{p(x)}{P(x)}dx=\infty$. Дійсно, якщо це не так, то існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{p(x)}{P(x)}dx$. Тому в останній нерівності ліва частина є як завгодно малою для всіх досить великих $x_1<x_2$, у той час як праву частину завдяки умові $P(x)\uparrow\infty$ можна зробити як завгодно близькою до одиниці. □

1.3. Узагальнення однієї теореми Рогозинських

У даному підрозділі будемо користуватися термінологією і позначеннями пунктів 1.1.1 та 1.1.2. В усіх твердженнях множина X довільна фіксована, і на ній задано систему $\{U_r : r\geq 0\}$ її непорожніх підмножин таких, що $U_{r_1}\supset U_{r_2}$, коли $r_1<r_2$, і $\bigcap\limits_{r\geq 0}U_r=\varnothing$.

1.3.1. Допоміжні твердження.

Лема 2. *Нехай* $\alpha_j(x)$, $j\in\mathbb{N}$, $x\in X$, *– числові функції, для яких*

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|=\alpha(x)\neq\infty\ \ \forall x\in X,$$

умова (A) *означає, що*

$$\exists c>1\ \ \exists r_0\geq 0:\ \alpha(x)\leq\frac{1}{c}\left|\alpha_1(x)\right|\ \ \forall x\in U_{r_0},$$

а умова (B) *має вигляд:*

$$\exists r_0\geq 0:\ \alpha(x)=0\ \ \forall x\in U_{r_0}\ \ \textit{або}$$

$$U_r^*=\{x\in U_r : \alpha(x)\neq 0\}\neq\varnothing\ \ \forall r\geq 0\ \ i\ \ \varliminf_{U_r^*}\frac{\left|\alpha_1(x)\right|}{\alpha(x)}>1.$$

Тоді умови (A) *і* (B) *рівносильні.*

□ Нехай виконується умова (*A*). Якщо $U_r^* = \{x \in U_r : \alpha(x) \neq 0\} \neq \varnothing \quad \forall r \geq 0$, то $\alpha(x) \leq \frac{1}{c}|\alpha_1(x)| \quad \forall x \in U_r^* \quad \forall r \geq r_0$. Звідси випливає умова (*B*).

Нехай виконується умова (*B*). Якщо $\exists r_0 \geq 0$: $\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in U_{r_0}$, то умова (*A*) виконується. Припустимо, що $\forall r \geq 0$ множина $U_r^* = \{x \in U_r : \alpha(x) \neq 0\} \neq \varnothing$.

Оскільки $\underline{\lim}_{U_r^*} \frac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)} > 1$, то $\exists c > 1$ і $r_0 \geq 0$: $\frac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)} \geq c > 1 \quad \forall x \in U_{r_0}^*$. Тому $\alpha(x) \leq \frac{1}{c}|\alpha_1(x)| \quad \forall x \in U_{r_0}^*$. На множині $U_{r_0} \setminus U_{r_0}^*$ остання нерівність також правильна, оскільки $\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in U_{r_0} \setminus U_{r_0}^*$. Таким чином, умова (*A*) виконується і лему 2 доведено. □

Лема 3. *Якщо для функцій* $\alpha_j(x)$ *з леми* 2 *виконується умова* (*B*) *та існує* $\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$, *то* $\alpha_1(x) = O(1) \ (U_r)$, *тобто* $\exists H > 0$ *і* $\exists r'$: $|\alpha_1(x)| \leq H \quad \forall x \in U_{r'}$.

□ Припустимо, що $\alpha_1(x) \neq O(1)\,(U_r)$, тобто $\exists r_k \uparrow +\infty$ і $x_k \in U_{r_k}$: $\alpha_1(x_k) \to \infty$ $(k \to \infty)$. Перша частина умови (*B*), тобто $\exists r_0 \geq 0$: $\alpha(x) = 0 \ \forall x \in U_{r_0}$, при цьому не може мати місця, оскільки тоді $\alpha_1(x) \to 1 \ (U_r)$.

Позначимо $\gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)$ і дістанемо: $\gamma(x) \to 1\,(U_r)$,

$$\alpha(x) = \sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x)| \geq \left|\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j(x)\right| = |\gamma(x) - \alpha_1(x)| \to \infty, \text{ коли } x = x_k \text{ і } k \to \infty.$$

Звідси випливає, що $x_k \in U_{r_k}^* \quad \forall k \geq k_0$, а тому за другою частиною умови (*B*) $\underline{\lim}_{k \to \infty} \frac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)} > 1$. Проте з іншого боку

$$\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)} \leq \frac{|\alpha_1(x_1)|}{\left|\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j(x_k)\right|} = \frac{\left|\gamma(x_k) - \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j(x_k)\right|}{\left|\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j(x_k)\right|} \to 1 \ (k \to \infty).$$

Дістали протиріччя, яке доводить лему 3. □

Лема 4. *Нехай* $\alpha_j(x)$, $x \in X$, $j \ge 2$, *– числові функції,* $r_n \uparrow +\infty$, $x_n \in U_{r_n}$ $\forall n$, $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *ряд* $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \left|\alpha_j(x)\right|$ *збігається на множині* E, *але нерівномірно. Тоді* $\exists r_n^* \uparrow +\infty$, $x_n^* \in U_{r_n^*} \setminus U_{r_{n+1}^*}$ *і* $\varepsilon > 0$: $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x_n^*)\right| \ge \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

□ Позначимо $R_n(x) = \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x)\right|$ $\forall n \in \mathbb{N}, x \in E$. Якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $R_{n_0}(x) < \varepsilon$ $\forall x \in E$, то $R_n(x) \le R_{n_0}(x) < \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$, тобто ряд $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \left|\alpha_j(x)\right|$ збігається рівномірно на множині E, що суперечить умові леми. Тому

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_{m_k} \in E:\ R_k(x_{m_k}) \ge \varepsilon .$$

Якщо припустити, що послідовність (m_k) має обмежену підпослідовність, то вона матиме і стаціонарну підпослідовність $m_{k_i} = m_*$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Але тоді $R_{k_i}(x_{m_*}) \ge \varepsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$ і ряд $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \left|\alpha_j(x)\right|$ буде розбіжним у точці $x_{m_*} \in E$, що суперечить умові леми. Тому $m_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

З умови $\bigcap\limits_{r \ge 0} U_r = \varnothing$ випливає, що $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_{r_{p_k}} = \varnothing$ $\forall p_k \to \infty$. Враховуючи це, побудуємо послідовність (k_n). Покладемо $k_1 = 1$. Число $k_2 \in \mathbb{N}$ виберемо таким, щоб $k_2 > k_1$, $m_{k_2} > m_{k_1}$, $x_{m_{k_1}} \notin U_{r_{m_{k_2}}}$. Припустимо, що вже побудовано члени k_{n-1} і k_n: $k_n > k_{n-1}$, $m_{k_n} > m_{k_{n-1}}$ і $x_{m_{k_{n-1}}} \notin U_{r_{m_{k_n}}}$. Тоді можна знайти номер $k_{n+1} > k_n$: $m_{k_{n+1}} > m_{k_n}$ і $x_{m_{k_n}} \notin U_{r_{m_{k_{n+1}}}}$. За принципом математичної індукції, побудовано послідовність (k_n) таку, що $k_n \uparrow \infty$, $m_{k_n} \uparrow \infty$ і $x_{m_{k_n}} \notin U_{r_{m_{k_{n+1}}}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Позначимо $r_n^* = r_{m_{k_n}}$, $x_n^* = x_{m_{k_n}}$. Оскільки $k_n \uparrow \infty$, то $k_n \ge n$ $\forall n$, а тому з нерівності $R_k(x_{m_k}) \ge \varepsilon$ $\forall k$ випливає, що $R_n(x_n^*) = R_n(x_{m_{k_n}}) \ge R_{k_n}(x_{m_{k_n}}) \ge \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Лема 5. *Нехай* L *– нормований простір,* $z_0 \in L$, $\|z_0\| = 1$, $\{\beta_k \in \mathbb{C} : |\beta_k| \le 1\}$ *– зчисленна множина, скрізь щільна у замкненій одиничній кулі простору* $\mathbb{C}$ *комплексних чисел,* $(z_k) = (z_0\beta_k)$, *а* (γ_k) *– комплекснозначна послідовність, усі часткові границі якої лежать у замкненій одиничній кулі. Тоді*

1) *кожна часткова границя послідовності* $(z_k\gamma_k)$ *є частковою границею послідовності* (z_k) *і*

2) *кожна точка вигляду* βz_0, *де* $|\beta| \le 1$, *є частковою границею послідовності* (z_k).

□ 1) Якщо $z_0\beta_k\gamma_k \to a$ $(k = k_i \to \infty)$, то можна вважати, що $\beta_k \to \beta$, $\gamma_k \to \gamma$ $(k = k_i \to \infty)$. Зрозуміло, що $|\beta| \le 1$ і $|\gamma| \le 1$, а тому $|\beta\gamma| \le 1$ і за умовою леми 5 $\exists n_k \uparrow \infty$: $\beta_{n_k} \to \beta\gamma$ $(k \to \infty)$. Отже, $z_0\beta_{n_k} - z_0\beta_k\gamma_k = z_0(\beta_{n_k} - \beta_k\gamma_k) \to \theta$, коли $k = k_i \to \infty$. Звідси випливає, що точка $a = z_0\beta\gamma$ є частковою границею послідовності $(z_0\beta_k)$.

2) Нехай $|\beta| \le 1$. Тоді $\exists k_i \uparrow \infty$: $\beta_{k_i} \to \beta$ $(i \to \infty)$. Маємо:

$$\left\|z_{k_i} - \beta z_0\right\| = \left\|\beta_{k_i} z_0 - \beta z_0\right\| = \left|\beta_{k_i} - \beta\right| \to 0 \ (i \to \infty),$$

тобто точка βz_0 є частковою границею послідовності (z_k). □

1.3.2. Основна теорема. Основною в підрозділі 1.3 є наступна теорема 4, котра узагальнює теорему Рогозинських M8 пункту 1.2.1.

Теорема 4. *Нехай* $\alpha_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in X$, *– задана послідовність числових функцій така, що ряд* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)$ *збігається на множині* X *і* $\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$, *а функції* $f_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in X$, *набувають значень з обмежено компактного нормованого простору* L. *Для того щоб для всіх послідовностей* $\left(f_j(x)\right)$, *рівномірно обмежених на* X *і таких, що* $K(f_j) \subset K(f_1)$ $\forall j \ge 2$, *з умови* $\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = a$ *випливала умова* $\lim_{U_r} f_1(x) = a$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\exists c>1\ \exists r_0\geq 0:\ \sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|=\alpha(x)\leq\frac{1}{c}\left|\alpha_1(x)\right|\ \ \forall x\in U_{r_0}$$

і щоб ряд $\sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|$ *збігався рівномірно на кожній множині*

$$E=\{x_n:\ x_n\in U_{r_n},\ r_0\leq r_n\uparrow+\infty,\ n\in\mathbb{N}\}. \tag{1.34}$$

□ Необхідність. Доведемо спочатку, що $\exists r_0\geq 0$: ряд $\sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|$ збігається до деякого числа $\alpha(x)$ $\forall x\in U_{r_0}$. Припустимо супротивне, тобто що $\exists r_k\uparrow+\infty$ і $x_k\in U_{r_k}\setminus U_{r_{k+1}}:\ \sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x_k)\right|=+\infty\ \ \forall k$. Тоді

$$\forall k\ \exists m_k:\ \frac{\left|\alpha_1(x_k)\right|}{\sum_{j=2}^{m_k}\left|\alpha_j(x_k)\right|}\leq 1. \tag{1.35}$$

Нехай (z_k) – послідовність, визначена у лемі 5. Визначимо функції f_j рівностями $f_1(x)=z_k$, коли $x=x_k$, і $f_1(x)=\theta$ в інших випадках, а $\forall j\geq 2$ покладемо $f_j(x)=-\alpha_1(x)\cdot\operatorname{sign}\alpha_j(x)\cdot f_1(x)\Big/\sum_{i=2}^{m_k}\left|\alpha_i(x)\right|$, коли $x=x_k$ і $j\leq m_k$, та $f_j(x)=\theta$ в інших випадках, де θ – нуль простору L, а $\operatorname{sign}z=\begin{cases}|z|/z, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$

Тоді $\forall j\geq 2$

$$\left\|f_j(x)\right\|=\begin{cases}\dfrac{\left|\alpha_1(x)\right|}{\sum_{i=2}^{m_k}\left|\alpha_i(x)\right|}\left\|f_1(x)\right\|, & \text{якщо } x=x_k,\ j\leq m_k \text{ і } \alpha_j(x_k)\neq 0,\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Звідси, враховуючи нерівність (1.35) та означення функції f_1, маємо: $\left\|f_j(x)\right\|\leq\left\|f_1(x)\right\|\leq 1\ \ \forall j\geq 2$ і $\forall x\in X$. Отже, функціональна послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена одиницею на множині *X*, причому за твердженням 1) леми 5 $K(f_j)\subset K(f_1)\ \ \forall j\geq 2$. Крім того, з означення функцій f_j випливає, що

$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta \ \ \forall x\in X$. Таким чином, $\lim_{U_r}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$, і за умовою теореми 4 необхідно, щоб $\lim_{U_r} f_1(x)=\theta$, але це за твердженням 2) леми 5 неможливо. Дістали протиріччя, яке доводить, що $\exists r_0\geq 0: \sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|=\alpha(x)\neq\infty \ \forall x\in U_{r_0}$.

Доведемо тепер, що має місце умова (*A*) леми 2. Припустимо, що це не так. Тоді за лемою 2 не має місця і умова (*B*). Тому

$$\exists r_k\uparrow+\infty,\ x_k\in U_{r_k}\setminus U_{r_{k+1}}:\ \alpha(x_k)\neq 0\ \ \forall k\ \text{ і }\ \lim_{k\to\infty}\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)}=\omega\leq 1.$$

Скористаємося визначеною у лемі 5 послідовністю (z_k) і покладемо $f_1(x_k)=z_k$ $\forall k$ і $f_1(x)=\theta$ коли $x\neq x_k$. А $\forall j\geq 2$ покладемо

$$f_j(x_k)=-\alpha_1(x_k)\cdot\operatorname{sign}\alpha_j(x_k)\cdot f_1(x_k)/\alpha(x_k)\ \ \forall k$$

і $f_j(x)=\theta\ \ \forall x\neq x_k$. Тоді $\forall j\geq 2$

$$\left\|f_j(x)\right\|=\begin{cases}\dfrac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)}\left\|f_1(x)\right\|, & \text{якщо } x=x_k \text{ і } \alpha_j(x_k)\neq 0,\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Звідси випливає, що коли b_j – часткова границя за системою U_r функції f_j, $j\geq 2$, то або $b_j=\theta$, або $\left\|b_j\right\|=\omega\left\|b_1\right\|$, де b_1 – деяка часткова границя за системою U_r функції f_1 (а фактично – послідовності (z_k)). Тому за лемою 5 $K(f_j)\subset K(f_1)\ \ \forall j\geq 2$.

Зрозуміло також, що послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена на множині *X* і $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta\ \ \forall x\in X$. Тому $\lim_{U_r}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$ і за умовою теореми 4 повинна виконуватися рівність $\lim_{U_r} f_1(x)=\theta$, що згідно з твердженням 2) леми 5 неможливо. Дістали протиріччя, яке доводить, що умова (*A*) має місце.

Доведемо, нарешті, що ряд $\sum_{j=2}^{\infty}\left|\alpha_j(x)\right|$ рівномірно збігається на будь-якій множині вигляду (1.34). Припустимо, що це не так. Тоді за лемою 4

$$\exists \varepsilon > 0,\ r_k^* \uparrow +\infty,\ x_k^* \in U_{r_k^*} \setminus U_{r_{k+1}^*} :\ \sum_{j=k+1}^{\infty} \left| \alpha_j(x_k^*) \right| \geq \varepsilon \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.36}$$

Взявши послідовність (z_k) з леми 5, покладемо $f_1(x_k^*) = z_k \ \ \forall k,\ f_1(x) = \theta$ $\forall x \neq x_k^*$, а $\forall j \geq 2$ покладемо

$$f_j(x_k^*) = -\alpha_1(x_k^*) \cdot \operatorname{sign} \alpha_j(x_k^*) \cdot f_1(x_k^*) \Big/ \sum_{i=k+1}^{\infty} \left| \alpha_i(x_k^*) \right|,$$

якщо $j > k$, і $f_j(x) = \theta$ в інших випадках.

Зауважимо, що за лемою 5 ядро $K(f_1)$ містить точку θ. Якщо $j \geq 2$ фіксоване, то $f_j(x) = \theta$, коли $x \neq x_k^*$ або $x = x_k^*$ і $k \geq j$. Тому $\lim\limits_{U_r} f_j(x) = \theta$, тобто $K(f_j) = \{\theta\} \subset K(f_1)$ $\forall j \geq 2$. За лемою 3 $\exists H > 0$ і $r' \geq r_0$: $\left|\alpha_1(x)\right| \leq H \ \ \forall x \in U_{r'} \Rightarrow$ можна вважати, що $\left|\alpha_1(x_k^*)\right| \leq H \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\forall j \geq 2$

$$\left\| f_j(x) \right\| = \begin{cases} \dfrac{\left|\alpha_1(x)\right|}{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i(x)} \left\| f_1(x) \right\|, & \text{якщо } x = x_k^*,\ j > k \text{ і } \alpha_j(x_k^*) \neq 0, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

то, враховуючи (1.36), маємо: $\left\| f_j(x) \right\| \leq \dfrac{H}{\varepsilon}$ $\forall j \geq 2$ і $\forall x = x_k^*$. Тому послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена на *X*. Крім того, за побудовою функцій f_j маємо: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = \theta \ \ \forall x \in X$. Отже, $\lim\limits_{U_r} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = \theta$, а тому за умовою теореми 4 і $\lim\limits_{U_r} f_1(x) = \theta$, що суперечить твердженню 2) леми 5. Дістали протиріччя, яке закінчує доведення необхідності.

Достатність. З умов теореми 4 випливає, що

$$\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)(f_j(x) - a) = \theta \tag{1.37}$$

і послідовність $(f_j(x) - a)$ рівномірно обмежена на множині *X*. Звідси і з того, що ряд $\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)|$ збігається на множині U_{r_0}, причому рівномірно на кожній множині E вигляду (1.34), маємо:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)(f_j(x)-a)=y(x) \text{ на } U_{r_0}\text{, причому рівномірно на } E. \qquad (1.38)$$

Нехай Y_j – множина часткових границь функції f_j за системою U_r $\forall j\in\mathbb{N}$. Треба довести, що $Y_1=\{a\}$. Припустимо, що це не так, і позначимо $\sup\limits_{y\in Y_1}\|y-a\|=H>0$. Візьмемо число $c>1$ з теореми 4, а число $H_1>H$ таким, щоб $H_1/c<H$. Тоді

$$\exists b_1\in Y_1:\ \frac{H}{c}<\frac{H_1}{c}<\|b_1-a\|\le H. \qquad (1.39)$$

Оскільки $K(f_j)\subset K(f_1)$ $\forall j\ge 2$, то

$$\|y-a\|\le H\ \ \forall y\in\bigcup_{j=2}^{\infty}Y_j. \qquad (1.40)$$

Точка b_1 є частковою границею функції f_1 за системою U_r, тому

$\exists r_k\uparrow+\infty,\ x_k\in U_{r_k}\ (r_k\ge r_0\ \forall k)$ і $a_1\in\overline{\mathbb{C}}:\ \alpha_1(x_k)\to a_1$ і $f_1(x_k)\to b_1\ (k\to\infty)$.

За лемою 3 число a_1 скінченне. Припустимо, що $a_1=0$. Тоді $\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)\to 1$ $(k\to\infty)$. Згадуючи умови теореми 4, дістаємо:

$$1<c\le\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)}\le\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)}\to 0\ \ (k\to\infty).$$

Це протиріччя доводить, що $|a_1|>0$.

Покладемо $\varepsilon=\frac{|a_1|}{c}\left(\frac{H_1}{H}-1\right)>0$. З умови $\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)|=\alpha(x)\le\frac{1}{c}|\alpha_1(x)|\ \forall x\in U_{r_0}$, зокрема, випливає, що

$$\sum_{j=2}^{m}|\alpha_j(x)|\le\frac{1}{c}|\alpha_1(x)|\ \ \forall m\ge 2\ \ \forall x\in U_{r_0}. \qquad (1.41)$$

З умови (1.37) випливає існування $r_* > r_0$: $\left\|\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)(f_j(x)-a)\right\| < H\varepsilon/2$ $\forall x \in U_{r_*}$, а з умови (1.38) – існування $m_* \ge 2$ і $r^* \ge r_*$:

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_*}\alpha_j(x)(f_j(x)-a)-y(x)\right\| = \left\|\sum_{j=m_*+1}^{\infty}\alpha_j(x)(f_j(x)-a)\right\| < \frac{H\varepsilon}{2} \ \ \forall x = x_k \in U_{r^*}.$$

Тому

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_*}\alpha_j(x)(f_j(x)-a)\right\| < H\varepsilon \ \ \forall x = x_k \in U_{r^*}. \tag{1.42}$$

Оскільки простір L обмежено компактний, то існує підпослідовність (x_{k_s}) послідовності (x_k) така, що $\forall j \in \overline{2,m_*}$ $f_j(x) \to b_j$ і $\alpha_j(x) \to a_j$, коли $x = x_{k_s}$ і $s \to \infty$, причому за лемою 3 та нерівністю (1.41) усі числа a_j скінченні.

З нерівності (1.42) випливає, що

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_*}a_j(b_j-a)\right\| \le H\varepsilon \Rightarrow |a_1|\cdot\|b_1-a\| - \left\|\sum_{j=2}^{m_*}a_j(b_j-a)\right\| \le H\varepsilon.$$

Звідси та з (1.39) і (1.40) дістаємо:

$$\frac{H_1}{c}|a_1| < |a_1|\cdot\|b_1-a\| \le \left\|\sum_{j=2}^{m_*}a_j(b_j-a)\right\| + H\varepsilon \le \sum_{j=2}^{m_*}|a_j|\cdot\|b_j-a\| + H\varepsilon \le H\sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + H\varepsilon.$$

Отже,

$$\frac{H_1}{Hc}|a_1| < \sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + \varepsilon. \tag{1.43}$$

Якщо у нерівності (1.41) покласти $m = m_*$, а $x = x_{k_s}$ і перейти до границі при $s \to \infty$, то дістанемо: $\sum\limits_{j=2}^{m_*}|a_j| \le \dfrac{|a_1|}{c}$. Звідси та з нерівності (1.43) випливає:

$$\frac{H_1}{H}\cdot\frac{|a_1|}{c} < \sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + \varepsilon \le \frac{1}{c}|a_1| + \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{|a_1|}{c}\left(\frac{H_1}{H}-1\right) < \varepsilon.$$

Дістали протиріччя з вибором числа ε, яке доводить достатність, а з нею і теорему 4. □

1.3.3. Наслідки з основної теореми. Перш за все, частинним випадком теореми 4 є сама теорема Рогозинських [76], а саме у випадку $X=\mathbb{N}$, $U_r=\{n:$ $n>r\}$, $L=\mathbb{R}^m$, а $\alpha_j(x)=\alpha_j \;\; \forall x\in X \;\; \forall j\in\mathbb{N}$.

Наступний наслідок узагальнює теорему М4 пункту 1.2.1.

Наслідок 10. *Нехай L – обмежено компактний нормований простір,* $\alpha(x)$, $x\in X$, *– фіксована числова функція, а* $f(x)$ *і* $g(x)$, $x\in X$, *– довільні обмежені L-значні функції, для яких* $K(g)\subset K(f)$. *Для того щоб з рівності* $\lim\limits_{U_r}\big(\alpha(x)f(x)+(1-\alpha(x))g(x)\big)=a$ *кожного разу випливала рівність* $\lim\limits_{U_r} f=a$, *необхідно і достатньо, щоб* $\exists c>1 \;\; \exists r_0\ge 0$: $|1-\alpha(x)|\le\dfrac{1}{c}|\alpha(x)| \;\; \forall x\in U_{r_0}$, *а це у випадку* $\alpha(x)\in\mathbb{R} \;\; \forall x\in X$ *рівносильно умові*

$$\frac{1}{2}<\varliminf_{U_r}\alpha(x)\le\varlimsup_{U_r}\alpha(x)<+\infty. \qquad (1.44)$$

□ Покладемо у теоремі 4 $\alpha_1(x)=\alpha(x)$, $\alpha_2(x)=1-\alpha(x)$, $f_1(x)=f(x)$ і $f_2(x)=g(x)$, а $\forall j>2$ $\alpha_j(x)=0$, $f_j(x)$ – довільні функції: $K(f_j)\subset K(f_1)$ і послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена на X. При цьому умови теореми 4 перетворюються в умови наслідку 10. Тому залишилося довести, що умова (*A*) леми 2, яка набуває вигляду

$$\exists c>1 \text{ і } r_0\ge 0:\; |1-\alpha(x)|\le\frac{1}{c}|\alpha(x)| \;\; \forall x\in U_{r_0}, \qquad (1.45)$$

рівносильна умові (1.44) при $\alpha(x)\in\mathbb{R} \;\; \forall x\in X$. Маємо:

$$|1-\alpha(x)|\le\frac{1}{c}|\alpha(x)|\Leftrightarrow\big(1-\alpha(x)\big)^2\le\frac{1}{c^2}\alpha^2(x)\Leftrightarrow 1-2\alpha(x)+\alpha^2(x)\le\frac{1}{c^2}\alpha^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\alpha^2(x)-2\alpha(x)+1\le 0\Leftrightarrow\frac{1}{1+1/c}\le\alpha(x)\le\frac{1}{1-1/c}.$$

Отже, умова (1.45) рівносильна умові

$$\exists c>1 \text{ і } \exists r_0\ge 0:\; \frac{1}{1+1/c}\le\alpha(x)\le\frac{1}{1-1/c} \;\; \forall x\in U_{r_0}. \qquad (1.46)$$

Зрозуміло, що з умови (1.46) зразу випливає умова (1.44). Нехай має місце умова (1.44). Тоді $\exists r_0 \geq 0$, $a \in (1/2;1)$ і $b \in (1;+\infty)$: $\dfrac{1}{2} < a \leq \alpha(x) \leq b \quad \forall x \in U_{r_0}$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 1/2+} \dfrac{1}{2 - 1/x} = +\infty$, то

$$\exists c^* \in (1/2;a): \ \frac{1}{2 - 1/c^*} \geq b \Rightarrow \frac{1}{2} < c^* \leq \alpha(x) \leq \frac{1}{2 - 1/c^*} \quad \forall x \in U_{r_0}.$$

Покладемо $c = \dfrac{1}{1/c^* - 1} \ \Rightarrow \ c^* = \dfrac{1}{1 + 1/c}$, $\dfrac{1}{2 - 1/c^*} = \dfrac{1}{1 - 1/c}$, причому $c > 1$, оскільки $c^* \in (1/2;1)$. Цим доведено, що з умови (1.44) випливає умова (1.46). □

Зауваження. 1. Умова обмеженої компактності простору L є суттєвою для правильності теореми 4 і наслідку 10.

□ Дійсно, якщо L – простір, елементами якого є многочлени, розглядувані як функції, неперервні на відрізку $[a;b]$, то L є підпростором простору $\mathrm{C}[a;b]$ з нормою $\|f\| = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$. Візьмемо послідовність $f_n = f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \in L$, $n \in \mathbb{N}$.

Тоді $f_n(x) \rightrightarrows e^x$ на $[a;b]$ $\Rightarrow$ (f_n) – обмежена послідовність у просторі L, яка не має жодної часткової границі, тобто $K(f) = \varnothing$. Отже, простір L не є обмежено компактним.

Візьмемо $\alpha = \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2}$, $g_n = -3f_n$ і дістанемо: $1 - \alpha = \dfrac{1}{4}$, $K(g) = K(f) = \varnothing$ і $\alpha f_n + (1-\alpha) g_n \equiv \theta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \big(\alpha f_n + (1-\alpha) g_n\big) = \theta$, де θ – нуль простору L, або многочлен, що є тотожним нулем. У той же час $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \neq \theta$, тобто у побудованому просторі L твердження наслідку 10, а тому і теореми 4, неправильні. □

2. Умова обмеженості функцій f і g у наслідку 10 суттєва.

□ Справді, якщо взяти

$$f_n = \begin{cases} (-1)^k n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases} \quad g_n = \begin{cases} (-1)^{k+1} 2n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases} \quad \alpha_n = \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то $K(f_n)=K(g_n)=(-\infty;+\infty)$,

$$\alpha_n f_n+(1-\alpha_n)g_n=\begin{cases}\frac{2}{3}(-1)^k n+\frac{1}{3}(-1)^{k+1}2n=0, & n=2k,\\ \frac{2}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0=0, & n=2k+1,\end{cases}$$

і тому $\alpha_n f_n+(1-\alpha_n)g_n\to 0$, проте $f_n\not\to 0$ $(n\to\infty)$. □

Наслідок 11. *Нехай* (α_n), $n\in\mathbb{N}^p$, *– задана* p*-кратна числова послідовність, для якої* $\exists c>1$ *і* $n_0\in\mathbb{N}^p$: $|1-\alpha_n|\le\frac{1}{c}|\alpha_n|$ $\forall n\ge n_0$, *що у випадку* $\alpha_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}^p$ *рівносильно умові* $\frac{1}{2}<\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n\le\varlimsup_{n\to\infty}\alpha_n<+\infty$. *Нехай* (S_n), $n\in\mathbb{N}^p$, *– довільна обмежена* L*-значна послідовність,* (T_n) *– послідовність відповідних їй середніх деякого додатного регулярного матричного методу підсумовування. Тоді з рівності* $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n S_n+(1-\alpha_n)T_n)=a$ *випливає рівність* $\lim_{n\to\infty}S_n=a$.

□ Дійсно, згідно з умовою I) теореми Р3 пункту 1.1.3 якщо $|S_n|\le H$ $\forall n$, то $|T_n|\le H_1 H$ $\forall n$, тобто послідовності (S_n) і (T_n) обмежені на $\mathbb{N}_0^p$. За теоремою Р4 пункту 1.1.3 $K(T)\subset K(S)$. Отже, виконані всі умови наслідку 10, звідки випливає твердження наслідку 11. □

Наслідок 11 зокрема можна безпосередньо застосувати до всіх частинних методів підсумовування, визначених у пунктах 1.1.4 – 1.1.7.

Висновки до першого розділу. Після опису основних об’єктів вивчення зроблено огляд результатів, присвячених мерсеровим теоремам, і поставлено нові задачі. Розв’язаннями цих задач стали теореми 1 – 3, котрі узагальнюють результати М. О. Давидова шляхом переходу до банаховозначних послідовностей чи функцій та аналізу необхідних і достатніх умов; а також теорема 4, що узагальнює одну теорему Рогозинських мерсерового типу шляхом заміни сталих коефіцієнтів лінійного перетворення на функції.

Основні результати розділу 1 опубліковані у роботах [80], [89].

РОЗДІЛ 2

СТАТИСТИЧНА ЗБІЖНІСТЬ ТА ОБМЕЖЕНІСТЬ І ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ ІЗ ЗАЛИШКОМ ДЛЯ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ПРОСТИХ І ПОДВІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

2.1. Тауберові умови і $D(p,\mu,\sigma)$-точки послідовності

2.1.1. Поняття тауберової теореми і тауберової умови. Огляд результатів. *Тауберова теорема* – це теорема, що дає умови (тауберові умови), накладання яких на послідовність або функцію гарантує її належність до певного класу в разі збіжності або обмеженості деяких її середніх. Сама назва "тауберова теорема" пішла від імені австрійського математика А. Таубера, котрий вперше довів таку теорему:

Теорема Т1 (А. Таубер, 1897) [65, с. 191]. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *підсумовується методом Абеля – Пуассона до числа* S (*тобто ряд* $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$, *де* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, *збігається в інтервалі* $(-1;1)$ *до* $f(x)$ *і* $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = S$) *і* $a_n = o(1/n)$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Отже, самому Тауберу належить умова $a_n = o(1/n)$. Ця теорема поклала початок численним дослідженням, які тривають і понині. Вони сформували собою так звану тауберову теорію, дуже широку і розмаїту.

Наведемо деякі з перших тауберових теорем.

Теорема Т2 (Г. Харді, 1910) [65, с. 157]. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *підсумовується до числа* S *методом Чезаро порядку* $\alpha > -1$ *і* $a_n = O(1/n)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *збігається до числа* S.

Теорема Т3 (Е. Ландау, 1910) [65, с. 157]. *Якщо ряд* $\sum a_n$ *підсумовується* *до числа S методом Чезаро порядку $\alpha > -1$ і $na_n > -H$, то ряд $\sum a_n$ збігається до числа S.*

Теорема Т4 (Р. Шмідт, 1924) [65, с. 162]. *Нехай дано ряд $\sum a_n$ з дійсними членами і нехай послідовність його частинних сум задовольняє умову $\underset{n>m\to\infty}{\underline{\lim}}(S_n - S_m) \geq 0$, коли $n/m \to 1$. Якщо середні Чезаро деякого порядку $\alpha > -1$ послідовності (S_n) обмежені, то і $S_n = O(1)$. Якщо ж ряд $\sum a_n$ підсумовується до числа S методом Чезаро порядку $\alpha > -1$, то $\sum a_n = S$.*

Умови $a_n = O(1/n)$, $na_n > -H$ і $\underset{\substack{n>m\to\infty \\ n/m\to 1}}{\underline{\lim}}(S_n - S_m) \geq 0$ називають тауберовими умовами Харді, Ландау та Шмідта, відповідно.

У двох наступних теоремах тауберові умови стосуються вже не всіх членів ряду, а лише тих, індекси яких знаходяться поблизу деякої фіксованої послідовності (n_k).

Теорема Т5 (М. А. Євграфов, 1952) [11]. *Нехай члени ряду $\sum a_n$ задовольняють умову $a_n = 0$ для $m_k \leq n \leq n_k \leq m_{k+1}$, $n_k / m_k \geq \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, де число λ і послідовності (m_k), (n_k) наперед задані. Якщо середні Чезаро порядку $\alpha > -1$ послідовності $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ обмежені, то і $S_{n_k} = O(1)$. Якщо ряд $\sum a_n$ підсумовується до числа S методом Чезаро порядку $\alpha > -1$, то $\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.*

Теорема Т6 (М. Обрєшков, 1953) [11]. *Нехай члени ряду $\sum a_n$ задовольняють умову $a_n = O(1/n)$ для $m_k \leq n \leq n_k \leq m_{k+1}$, $n_k / m_k \geq \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, де число λ і послідовності (m_k), (n_k) наперед задані. Якщо середні Чезаро деякого порядку $\alpha > -1$ послідовності $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ обмежені, то і $S_{p_k} = O(1)$, де $m_k \leq p_k \leq n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо ряд $\sum a_n$ підсумовується до числа S методом Чезаро порядку $\alpha > -1$, то $\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = S$, де $m_k \leq p_k \leq n_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

У багатьох сучасних твердженнях тауберової теорії часто навіть не помітно схожості з першими теоремами тауберового типу, бо стосуються вони різноманітних перетворень послідовностей і функцій та їх властивостей. При цьому самі функції визначені на довільних множинах і набувають значень з абстрактних просторів. Існує декілька монографій з тауберової теорії, у яких поняття тауберової теореми трактується по-різному: [65], [75], [31], [46], [3], [53], [66], [68], [10].

Разом з цим постійну увагу дослідників привертали класичні методи підсумовування (Гельдера, Чезаро, Ріса, Вороного, Ейлера, Бореля, Абеля – Пуассона та інші [65]). Так, у 1956 році М. О. Давидов відкрив новий спосіб одержання тауберових теорем для методів Чезаро – “спосіб (c)-точок”.

У роботі [11] М. О. Давидов назвав (c)-*множиною* комплексної послідовності (S_n) замкнену опуклу множину $\bar{G} \subset \mathbb{C}$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_k \uparrow \infty$, $n_k \uparrow \infty$, $\lambda > 1$: $m_{k+1} \geq n_k \geq m_k$, $n_k / m_k \geq \lambda$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і $S_n \in \bar{G}_\varepsilon$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, де $\bar{G}_\varepsilon$ – це замкнений ε-окіл множини $\bar{G}$. Якщо, зокрема, $\bar{G} = \{z_0\}$, то точка z_0 називається (c)-*точкою* послідовності (S_n). Точку $z = \infty$ він назвав (c)-*точкою* послідовності (S_n), якщо існує послідовність замкнених опуклих множин $\bar{G}_k$, відстань яких до точки $z = 0$ $\rho(G_k, 0) \to +\infty$ $(k \to \infty)$, а $S_n \in \bar{G}_k$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, де (m_k) і (n_k) ті самі, що і вище.

М. О. Давидов довів наступну теорему, яку назвав (c)-*властивістю методів Чезаро* (C, α).

Теорема Т7 (М. О. Давидов, 1956) [11]. *Якщо ряд* $\sum a_n$ *підсумовується яким-небудь методом* (C, α) *до числа* S, *а множина* $\bar{G}$ *є* (c)-*множиною послідовності* (S_n), *то* $S \in \bar{G}$. *Якщо* $z = \infty$ *є* (c)-*точкою послідовності* (S_n), *то середні Чезаро* $(C_n^{(\alpha)})$ *послідовності* (S_n) *необмежені.*

За допомогою цієї властивості М. О. Давидов довів ряд теорем, які містять у собі як частинні випадки теореми Т2 – Т6, сформульовані вище. Виявилося, що з усіх тауберових умов теорем Т2 – Т6 випливає така умова: “кожна часткова границя послідовності (S_n) є її (c)-точкою”. У цій же роботі [11] М. О. Давидов продемонстрував, як можна одержати властивість, аналогічну теоремі Т7, для методу Ріса (R, p) та для інтегрального аналога методу Ріса, а у своїй наступній роботі [12] – для інтегрального аналога методів Чезаро.

Таким чином, виник новий напрям у тауберовій теорії. А саме: ставилася задача перенести результати роботи [11] на різні методи підсумовування, насамперед класичні та їх модифікації. Цей напрям розвивали М. О. Давидов [12] – [14] та його учні: В. І. Мельник [32] – [34], Л. Ф. Таргонський [59], [60], Г. О. Михалін [36] – [43], М. О. Калаталова [20], [21], М. Ф. Бурляй [5], [6], О. П. Кохановський [27] – [29], О. І. Соколенко [51], В. І. Кузьмич [30], Л. С. Тесленко [36], [61], М. М. Білоцький [7] – [9].

Так, Л. Ф. Таргонський [59] переніс (c)-властивість на додатні поліноміальні методи Вороного, не змінюючи понять (c)-множини і (c)-точки. До речі, О. І. Кохановський [29] встановив, що на довільний метод Вороного (W, p) перенести (c)-властивість, не змінюючи означень (c)-множини і (c)-точки, не можна, а сам він виконав [28] “видозмінене” перенесення (c)-властивості на один клас методів (W, p), де (p_n) задовольняє умову: $p_n / p_{n-1} \le p_{n+1} / p_n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. До такого класу належать, наприклад, методи Чезаро (C, α), де $0 < \alpha \le 1$, і гармонічний метод (W, p) з $p_n \equiv 1/(n+1)$.

М. О. Калаталова [20] перенесла (c)-властивість на методи Чезаро (C, α, β) $(\alpha, \beta > -1)$ підсумовування подвійних рядів. М. Ф. Бурляй [6] досліджував методи Ріса, Бореля і Абеля підсумовування подвійних послідовностей. Він розглядав особливий вид збіжності – так звану λ-збіжність подвійних послідовностей, і для названих методів знайшов (c)-властивості, відповідні λ-збіжності.

Пізніше В. М. Алданов і Г. О. Михалін [2] дістали (c)-властивість і тауберові теореми із залишком для методів (H, p, α, β) і (C, p, α, β) підсумовування подвійних послідовностей та для інтегральних аналогів цих методів.

Окрім (C)-точок М. О. Давидов та його учні досліджували так звані (C^*)-точки, означення яких відрізняється від означення (C)-точок лише тим, що n_k / $/ m_k \to \infty$. Ці (C^*)-точки пов'язані з тауберовими умовами типу $o(1/n)$, тоді як (C)-точки пов'язані з умовами типу $O(1/n)$. Виявляється (див. роботи [17], [38], [51], [62], [63]), що за допомогою (C^*)-точок можна сформулювати критерії співпадання ядер послідовності та її середніх або умови рівнозбіжності послідовності та її середніх.

Потрібно відмітити, що для одних методів (наприклад, для методу Ріса) (c)-властивість доводиться досить просто, в той час як для інших – складно. Для методів Чезаро (C,α) доведення було настільки складним, що поставало природне запитання про існування простішого способу. Л. Ф. Таргонський [59] хоч і довів (c)-властивість для ширшого класу методів, ніж клас методів Чезаро, але не на принципово новій основі, а лише звів свою задачу до теореми Т7. Клас методів Вороного, досліджуваний О. П. Кохановським, не містить методів (C,α) при $\alpha > 1$ (хоча доведення у Кохановського нескладне). Отже, питання простішого доведення теореми Т7, а особливо результатів М. О. Калаталової, залишалося відкритим.

Г. О. Михалін та Л. С. Тесленко вивчали поведінку (C)-множини і нескінченної (C)-точки при перетворенні типу Гельдера (H, p, α) [36] та деяких інших перетвореннях [61]. У роботі [39] Г. О. Михалін за допомогою (p)-точок одержує тауберові теореми із залишковим членом для методів (H, p, α) і цим узагальнює результати Г. Кангро [22], [23] та І. Таммерайда [57].

Під *тауберовими теоремами із залишком* (залишковим членом) ми розуміємо теореми, в яких на послідовність (S_n) накладено такі умови, що із збіжності до нуля або обмеженості послідовності $(\lambda_n t_n)$ випливає збіжність до нуля чи обмеженість послідовності $(\mu_n S_n)$ або її підпослідовності, де (λ_n) і (μ_n) – фіксовані послідовності, а (t_n) – деякі середні послідовності (S_n).

У 1989 році Г. О. Михаліну [43] вдалося настільки удосконалити "спосіб

(c)-точок” М. О. Давидова, що доведення (c)-властивості методів Чезаро стало напрочуд простим. Одночасно була показана ефективність цього способу для одержання тауберових теорем із залишком, причому для послідовностей у лінійному топологічному просторі. Г. О. Михалін помітив, що для доведення всіх попередніх тверджень, пов’язаних з поняттям (C)-множини, достатньо мати, крім нескінченно віддаленої (C)-точки, всього одну (c^{**})-точку $z=0$. А саме: точку $z=0$ він назвав (c^{**})-*точкою* послідовності (S_n), якщо $\exists(m_k)$, (n_k), (θ_k): $m_{k+1}\geq n_k\geq m_k\uparrow\infty$, $\theta_k\in(-\pi;\pi]$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_k}{m_k}>1$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_{m_k\leq n\leq n_k}\operatorname{Re}e^{i\theta_k}S_n=\omega>0$.

Виявилося, що (c^{**})-точка $z=0$ передається у спадок від послідовності (S_n) до її середніх Гельдера $(H_n^{(\alpha)})$ та Чезаро $(C_n^{(\alpha)})$ так само, як і (C)-точка $z=\infty$. Цим зумовлена простота нового доведення (c)-властивості М. О. Давидова (див., наприклад, доведення наслідку 15 пункту 2.3.2).

Сформулюємо результат Михаліна, зауваживши, що означення $(p,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-точок буде наведено в пункті 2.1.3.

Теорема Т8 (Г. Михалін, 1989) [43]. *Нехай* $\lambda_n>0$, $\sigma_n\geq\gamma>0$ $\forall n$, $0<c_1\leq\leq\lambda_m/\lambda_n$, $\sigma_m/\sigma_n\leq c_2<\infty$, *коли* $0<d_1\leq P_m^{(1)}/P_n^{(1)}\leq d_2<\infty$, $\mu_n^{(\alpha)}=\lambda_n/\sigma_n^{\alpha}$, $\alpha,n\in\mathbb{N}_0$, $\sigma_n p_n/P_n^{(1)}\to 0$ $(n\to\infty)$. *Якщо* $z=\theta$ $(z=\infty)$ *є* $(p,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-*точкою послідовності* (S_n) *і* $\alpha\geq 1$, *то* $z=\theta$ $(z=\infty)$ *є* $(p,\mu^{(\alpha-1)},\sigma)$-*точкою послідовності* $(H_n^{(1)})$.

Наслідок [43]. *При виконанні умов теореми* Т8 $z=\theta$ $(z=\infty)$ *є* (p,λ,σ)-*точкою послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ і $(C_n^{(\alpha)})$. *Зокрема,* $\lambda_n H_n^{(\alpha)}\neq o(1)$ $(\neq O(1))$ *і* $\lambda_n C_n^{(\alpha)}\neq o(1)$ $(\neq O(1))$.

На честь М. О. Давидова твердження, аналогічні останньому наслідку, називатимуться надалі *D*-***властивостями*** відповідних методів підсумовування.

Останні два твердження дозволять нам одержати *D*-властивості і тауберові теореми, в яких звичайну збіжність чи обмеженість середніх замінено статистичною збіжністю чи обмеженістю. Такий вид теорем виник після введення у 1951 році польським математиком Х. Фастом [70] поняття статистичної збіжності послідовності. А саме: послідовність (S_n) він назвав *статистично збіжною* до числа A, якщо $\forall\varepsilon > 0 \ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k\le n:|S_k - A|\ge\varepsilon} 1 = 0$.

Дж. Фрайді [71] починає досліджувати статистичну збіжність як окремий метод підсумовування. Він показує, що цей метод не включається в жоден матричний метод підсумовування, і що із статистичної збіжності не випливає збіжність $(C,1)$ (хоча при додатковій умові обмеженості (S_n), як показав Скоенберг [77], – випливає). Тут же Фрайді доводить три тауберові теореми, у яких припускається статистична збіжність послідовності (S_n), а висновок робиться про звичайну збіжність (S_n).

Пізніше Дж. Фрайді разом з М. Ханом [72] вводять поняття A-статистичної збіжності послідовності (S_n) у метричному просторі (X,ρ):

$$A\text{-st-}\lim S_n = S \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k:\rho(S_n,S)\ge\varepsilon} a_{n,k} = 0,$$

де $A = (a_{n,k})$ – задана додатна матриця.

У нещодавній роботі [73] Дж. Фрайді і М. Хан поєднують деякі методи підсумовування із статистичною збіжністю. У такий спосіб вони узагальнюють класичні тауберові теореми для методу Чезаро $(C,1)$, Бореля і матричного аналога методу Абеля – Пуассона. Зокрема, вони доводять наступні дві теореми.

Теорема Т9 (Дж. Фрайді, М. Хан, 2000) [73]. *Якщо послідовність* $C_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ *статистично збігається до числа* S *і* $\Delta S_k = O(1/k)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Теорема Т10 (Дж. Фрайді, М. Хан, 2000) [73]. *Якщо в теоремі* Т9 *умову* $\Delta S_k = O(1/k)$ *замінити умовою* $\Delta S_{k+1} \ge -C/k$ *для деякого* $C > 0$ *і всіх* k, *то твердження залишиться правильним.*

Бачимо, що американські математики Фрайді і Хан не враховують результатів Давидова та його учнів. Вони йдуть тим же шляхом, що і Харді, Ландау, Шмідт та інші, встановлюючи спочатку простіші твердження, а потім підсилюючи їх, але так і не досягають того рівня узагальнення, якого можна досягти методом (c)-точок.

Другий розділ дисертації присвячено D-властивостям і тауберовим теоремам із залишком, при умові статистичної збіжності чи обмеженості середніх, для методів підсумовування (H, p, α), (C, p, α) і методів Вороного класу W_Q, а також для методів підсумовування подвійних послідовностей $(R, p_{m,n})$ і методів Вороного класу W_Q^2.

2.1.2. Ілюстрація співвідношень між деякими тауберовими умовами. У наведених в пункті 2.1.1 теоремах T1 – T8, в їхній спільній частині, стверджується, що при виконанні певної тауберової умови ряд $\sum a_n$ або збігається (до числа S), або він не підсумовується (до числа S) жодним з методів Чезаро (C, α), $\alpha > 0$. Для ілюстрації зв'язку між основними тауберовими умовами наведемо приклади рядів $\sum a_n$, що задовольняють їх. Через S_n позначено частинну суму ряду $\sum a_n$.

1. $a_n = O(1/n)$ (Харді): $a_n = \varepsilon_n / n$, $\varepsilon_n = \pm 1$.
2. $a_n \geq -H/n$ (Ландау): $a_{2k} = \varepsilon_k / 2k$, $a_{2k+1} = (\varepsilon_k^* \ln k)/k$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $\varepsilon_k^* \in \{0,1\}$.
3. $\lim\limits_{n>m\to\infty} (S_n - S_m) = 0$, коли $1 < n/m \to 1$, (Шмідт): $a_n = \varepsilon_n / \sqrt{n}$ при $2^k + 1 \leq n \leq$ $\leq 2^k + k$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$, $a_n = \varepsilon_n^* / n$ $(\varepsilon_n^* = \pm 1)$ в інших випадках.
4. $\underline{\lim}\limits_{n>m\to\infty} (S_n - S_m) \geq 0$, коли $1 < n/m \to 1$, (Шмідт): $a_n = 1$ при $2^k + 1 \leq n \leq 2^k + k$, $a_n = \varepsilon_n / n$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$ в інших випадках.
5. Кожна часткова границя послідовності (S_n) є (c)-точкою (S_n) (Давидов): $S_n = (-1)^n$ при $2^k + 1 \leq n \leq 2^k + 2^{k-1}$, $S_n = 0$ при $2^k + 2^{k-1} < n \leq 2^{k+1}$.
6. $S_n \to 0$ $(n \to \infty)$ або $z = 0$ є (c^{**})-точкою послідовності (S_n) (Михалін): $S_n = (-1)^n + 2$.

Легко довести, що $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$, $2 \Rightarrow 4$, $3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 5$, а $5 \Rightarrow 6$. Наведені приклади показують, що жодне з обернених тверджень не правильне.

2.1.3. Поняття $D(p,\mu,\sigma)$-точок послідовності. Припустимо, що L – дійсний, віддільний, локально опуклий лінійний топологічний простір, L^* – спряжений з L простір [50, с. 67], θ – нуль простору L, $S_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$, (μ_n) і (σ_n) – задані послідовності з додатними членами, (p_n) і $(P_n^{(\alpha)})$ – послідовності з пункту 1.1.4. Для скорочення записів позначимо $P_n = P_n^{(1)}$ $\forall n$.

У роботі [43] Г. О. Михаліним введено означення (p,μ,σ)-точок $z=\theta$ і $z=\infty$ (див. додаток В). Сформулюємо це означення трохи в іншій формі і на честь М. О. Давидова (p,μ,σ)-точки називатимемо у подальшому $D(p,\mu,\sigma)$-точками. Велика літера D вказує на зв'язок з тауберовими умовами типу "O".

Точку $z=\theta$ (точку $z=\infty$) назвемо $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* послідовності (S_n), якщо існують послідовності номерів (m_k), (n_k), послідовність функціоналів $\varphi_k \in L^*$, послідовність чисел $a_k \geq 0$ та абсолютно опуклий окіл нуля U такі, що $m_{k+1} \geq n_k > m_k \uparrow \infty$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$ і для деякого $\varepsilon > 0$ (для будь-якого $\varepsilon > 0$) $\exists k_0$: $\varphi_k(\varepsilon U) < a_k \leq \varphi_k(\mu_{m_k} S_n)$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k > k_0$.

Рівносильність означень (p,μ,σ)- і $D(p,\mu,\sigma)$-точок доведено у додатку В.

Для комплексної послідовності (S_n) це означення набуває наступного вигляду. Точка $z=0$ (точка $z=\infty$) називається $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою комплексної послідовності* (S_n), якщо існують (m_k), (n_k) і (θ_k), для яких $m_{k+1} \geq n_k > m_k \uparrow \infty$, $\theta_k \in (-\pi;\pi]$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \min\limits_{m_k \leq n \leq n_k} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} \mu_{m_k} S_n = \omega > 0$ $(\omega = +\infty)$.

Зауваження. 1. З означення $D(p,\mu,\sigma)$-точок зрозуміло, що коли точка $z=\infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою послідовності (S_n), то такою є і точка $z=\theta$.

2. З умови $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$ при додатковій умові $\sigma_n p_n / P_n \to 0$ $(n \to \infty)$ випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty}(n_k - m_k) = +\infty$.

3. Якщо послідовність (σ_n) задовольняє дві умови:

$$\sigma_n p_n / P_n \to 0 \ (n\to\infty) \text{ і } \sigma_n \ge \gamma > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

то в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точок послідовності (m_k) і (n_k) можна вважати такими, що $P_{n_k} / P_{m_k} \le 2 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

4. В означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точок комплексної послідовності можна вважати, що $\theta_k \equiv 0$ або $\theta_k \equiv \pi$, якщо послідовність (S_n) дійсна.

5. Якщо послідовність (σ_n) із зауваження 3, а послідовність (μ_n) задовольняє умову

$$0 < c_1 \le \mu_n / \mu_m \le c_2 < +\infty, \text{ коли } 0 < d_1 \le P_n / P_m \le d_2 < +\infty,$$

то в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точок замість нерівності $\varphi_k(\mu_{m_k} S_n) \ge a_k$ можна брати нерівність $\varphi_k(\mu_{n_k} S_n) \ge a_k$.

6. Якщо послідовність (σ_n) задовольняє дві умови зауваження 3 і умову

$$0 < c_1 \le \sigma_n / \sigma_m \le c_2 < +\infty, \text{ коли } 0 < d_1 \le P_n / P_m \le d_2 < +\infty,$$

то в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точок замість нерівності $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$ можна вимагати нерівність $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sigma_{m_k}(1 - P_{m_k} / P_{n_k}) > 0$.

7. Якщо $z=\infty$ є (R,p)-точкою у розумінні М. О. Давидова [11] числової послідовності (S_n), то $z=\infty$ є $D(p,1,1)$-точкою (S_n), а якщо замкнена опукла множина $\bar{G}$ не містить точки $z=0$ і є (R,p)-множиною послідовності (S_n) [11], то точка $z=0$ є $D(p,1,1)$-точкою цієї послідовності.

2.1.4. Ознаки $D(p,\mu,\sigma)$-точок. Припустимо, що додатні послідовності (μ_n) і (σ_n) задовольняють умови

$$\mu_m \asymp \mu_n \text{ і } \sigma_m \asymp \sigma_n, \text{ коли } P_m \asymp P_n, \tag{2.1}$$

$$\sigma_n \ge \gamma > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ і } \sigma_n p_n / P_n \to 0 \ (n\to\infty). \tag{2.2}$$

Умова (2.1) для послідовності (μ_n) означає, що $0 < d_1^* \le \mu_n / \mu_m \le d_2^* < +\infty$, як тільки $d_1 \le P_n / P_m \le d_2$. Аналогічно для послідовності (σ_n). Зокрема, умова

(2.1) для послідовності (μ_n) має місце, якщо виконується умова

$$0 < a \le \mu_n / \mu_m \le b(P_n / P_m)^c, \ \forall n \ge m \in \mathbb{N}_0, \qquad (2.1^*)$$

де $c \in (0;1)$, a, b – сталі числа. Така умова використовувалась у роботах [22], [23], [39]. Прикладами послідовностей, які задовольняють умову (2.1*), можуть бути: $\mu_n = P_n^c$ або $\mu_n = \ln^c P_n$ $(0 < c < 1)$.

Введемо два позначення. Якщо $S_n \in L$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $M \subset \mathbb{N}_0$, то будемо записувати: 1) $S_n = O(\alpha_n)$ $(n \in M)$, якщо для будь-якого околу нуля U існує $\lambda_0 > 0$: $S_n \in \lambda \alpha_n U$ $\forall n \in M$ $\forall \lambda$: $|\lambda| > \lambda_0$; 2) $S_n = o(\alpha_n)$, якщо для будь-якого околу нуля U існує n_0: $S_n \in \alpha_n U$ $\forall n > n_0$.

Розглянемо низку умов, які можна назвати ознаками $D(p,\mu,\sigma)$-точок. Вони майже без змін будуть взяті з робіт Г. О. Михаліна [39] і [43], але доповнені показом зв'язків між ними (у лемі 6). Послідовність $n_k \uparrow \infty$ вважатимемо заданою послідовністю номерів. В умовах 5), 6) передбачається, що простір L нормований, а в умовах 7), 8), 12) $L = \mathbb{R}$.

1) Існує обмежена множина $G \subset L$: $\theta \in G$ і для будь-якого абсолютно опуклого околу $U(G)$ множини G $\exists(\nu_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$, для яких $\mu_{n_k}(S_n - S_{n_k}) \in$ $\in U(G)$, якщо $n_k \le n \le \nu_k$ або $\nu_k \le n \le n_k$, причому відповідно $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\nu_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge$ $\ge \delta$ або $\sum\limits_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall k > k_0$;

2) $\exists r \ge 0$, $t_k \in L$: $t_k = O(1)$, $\mu_{n_k} S_{n_k} = b_k^* t_k$, де $b_k^* \in \mathbb{R}$, і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists(m_k)$, (l_k), $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{n_k}(S_m - S_{n_k}) = b_{m,k}^{(1)} t_k$, де $b_{m,k}^{(1)} \ge -r - \varepsilon$ $(n_k \le m \le m_k)$, $\mu_m(S_{n_k} - S_m) = b_{m,k}^{(2)} t_k$, де $b_{m,k}^{(2)} \ge -r - \varepsilon$ $(l_k \le m \le n_k)$, причому $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ і $\sum\limits_{\nu=l_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall k > k_0$;

3) $\exists \delta > 0$, (ν_k) і $k_0 \in \mathbb{N}$: $\mu_n(S_n - S_{n-1}) = O(\sigma_n p_n / P_n)$ для $n_k \le n \le \nu_k$ або $\nu_k \le n \le$

$\le n_k$, причому відповідно $\sum_{\nu=n_k+1}^{\nu_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \ge \delta$ або $\sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \ge \delta\ \ \forall k>k_0$;

4) $\exists r>0$, $t_k \in L$, $\delta>0$, (m_k), (l_k) і $k_0\in\mathbb{N}$: $t_k=O(1)$, $\mu_{n_k}S_{n_k}=b_k^* t_k$, $b_k^*\in\mathbb{R}$, $\mu_n(S_n-S_{n-1})=b_{n,k}\dfrac{\sigma_n p_n}{P_n}t_k$, $b_{n,k}\ge -r$ для $l_k\le n\le m_k$, причому $\sum_{\nu=l_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta\ \ \forall k>k_0$;

5) $\exists r\ge 0$: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists(\nu_k)$, k_0 і $\delta>0$: $\mu_{n_k}\left\|S_n-S_{n_k}\right\|\le r+\varepsilon$, якщо $n_k\le n\le \nu_k$ або $\nu_k\le n\le n_k$, причому відповідно $\sum_{\nu=n_k+1}^{\nu_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ або $\sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ $\forall k>k_0$;

6) $\exists r\ge 0$: $\overline{\lim}\,\mu_{n_k}\left\|S_n-S_{n_k}\right\|=r$, коли ($n>n_k\to\infty$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{n}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\to 0$) або ($n_k> >n\to\infty$ і $\sum_{\nu=n+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\to 0$);

7) $\exists r\ge 0$, $\beta\in\{0,1\}$: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists(m_k),(l_k)$, $k_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$: $(-1)^\beta\mu_{n_k}(S_m-S_{n_k})\ge -r-\varepsilon$, коли $n_k\le m\le m_k$, і $(-1)^\beta\mu_m(S_{n_k}-S_m)\ge -r-\varepsilon$, коли $l_k\le m\le n_k$, причому $\sum_{\nu=l_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta\ \ \forall k>k_0$;

8) $\exists r\ge 0$, $\beta\in\{0,1\}$:

$$\underline{\lim}_{m>n_k\to\infty}(-1)^\beta\mu_{n_k}(S_m-S_{n_k})\ge -r, \text{ коли } \sum_{\nu=n_k+1}^{m}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\to 0,$$

і

$$\underline{\lim}_{n_k>m\to\infty}(-1)^\beta\mu_m(S_{n_k}-S_m)\ge -r, \text{ коли } \sum_{\nu=m+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\to 0;$$

9) $S_n=S_{n-1}$ для $m_k<n\le n_k<m_{k+1}$, де $\sum_{\nu=m_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta>0\ \ \forall k\in\mathbb{N}$;

10) $S_n = S_{n-1}$ для $n \ne n_k$, причому $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$;

11) $S_n = S_{n-1}$ для $n \ne n_k$, а $\mu_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) = O(\sum\limits_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu)$;

12) $S_n = S_{n-1}$ для $n \ne n_k$, а $\mu_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) \ge -H \sum\limits_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, де $H > 0$.

Лема 6. *Мають місце наступні співвідношення між умовами* 1) – 12):

10) $\Rightarrow$ 9) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) *з* $G = \{\theta\}$; 5) $\Leftrightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1); 11) $\Rightarrow$ 6) *з* $r = 0 \Rightarrow$ 1) *з* $G = \{\theta\}$; 4) $\Rightarrow$ 2) *з* $r = 0$; 7) $\Leftrightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 2); 12) $\Rightarrow$ 8) *з* $r = \beta = 0$.

Отже, як бачимо, серед усіх цих умов найзагальнішими є 1) і 2).

□ ◄ Покажемо, що умова 3) гарантує виконання умови 1) з множиною $G = \{\theta\}$. Нехай виконується другий випадок умови 3), з якого випливає, що для будь-якого абсолютно опуклого околу нуля $U \ \ \exists \lambda_0 > 0$: $\mu_n(S_n - S_{n-1}) \in$ $\in (\sigma_n p_n / P_n)\lambda_0 U \ \ \forall n \in \overline{\nu_k, n_k} \ \ \forall k > k_0$. Послідовність (ν_k) можна вважати такою, що $P_{n_k} / P_{\nu_k} \le 2 \ \ \forall k > k_0$. Справді, якщо $P_{n_k} / P_{\nu_k} > 2 \ \ \forall k = k_i \uparrow \infty$, то покладемо

$$\nu'_k = \max\{m \in \overline{\nu_k, n_k} : P_{n_k} / P_m > 2\}, \ \nu^*_k = \nu'_k + 1 \ \ \forall k = k_i .$$

Дістанемо: $P_{n_k} / P_{\nu'_k} > 2 \ \ \forall k = k_i \Rightarrow$ (див. умову (2.2))

$$\sum_{\nu=\nu'_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \gamma \sum_{\nu=\nu'_k+1}^{n_k} p_\nu / P_\nu \ge \frac{\gamma}{P_{n_k}} \sum_{\nu=\nu'_k+1}^{n_k} p_\nu =$$

$$= \frac{\gamma}{P_{n_k}}(P_{n_k} - P_{\nu'_k}) = \gamma(1 - P_{\nu'_k} / P_{n_k}) > \gamma(1 - 1/2) = \gamma / 2 > 0 \ \ \forall k = k_i \Rightarrow$$

$$\sum_{\nu=\nu^*_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu = \sum_{\nu=\nu'_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu + \sigma_{\nu^*_k+1} p_{\nu^*_k+1} / P_{\nu^*_k+1} \ge \gamma / 4 \ \ \forall k = k_i .$$

Крім того, $P_{n_k} / P_{\nu^*_k} \le 2 \ \ \forall k = k_i$. Тепер достатньо перевизначити (ν_k), поклавши $\nu_k = \nu^*_k \ \ \forall k = k_i$.

Нехай $c > 0$ з умови (2.1) таке, що $\mu_n / \mu_m \le c$, коли $1 \le P_n / P_m \le 2$. Збільшуючи деякі ν_k, можна зробити, щоб $\sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \le \frac{1}{c\lambda_0}$ $\forall k > k_0$. А саме, якщо $\sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > \frac{1}{c\lambda_0}$ $\forall k = k_i \uparrow \infty$, то покладемо

$$\nu'_k = \max\{m \in \overline{\nu_k, n_k} : \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > \frac{1}{c\lambda_0}\},\ \nu^*_k = \nu'_k + 1\ \forall k = k_i.$$

Матимемо $\sum_{\nu=\nu_k^*+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \le \frac{1}{c\lambda_0}$ $\forall k = k_i$, а з означення номерів ν'_k внаслідок (2.2) буде $\varliminf_{k=k_i\to\infty} \sum_{\nu=\nu_k^*+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$. Покладаючи $\nu_k = \nu_k^*$ $\forall k = k_i$, дістанемо, що $0 < \delta <$ $< \sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \le \frac{1}{c\lambda_0}$, $P_{n_k} / P_{\nu_k} \le 2$ $\forall k > k_0$. Зрозуміло, що тут (ν_k), (k_0) і δ вже не ті, що в самій умові 3).

Далі маємо, згідно з лемою 1 [49, с. 16]:

$$\mu_{n_k}(S_m - S_{n_k}) = \mu_{n_k} \sum_{\nu=m+1}^{n_k} (S_{\nu-1} - S_\nu) = \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_{n_k}}{\mu_\nu} \cdot \mu_\nu (S_{\nu-1} - S_\nu) \in$$

$$\in \left(\sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_{n_k}}{\mu_\nu} \cdot \frac{\sigma_\nu p_\nu}{P_\nu} \right) \lambda_0 U \subset \left(\sum_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \frac{\sigma_\nu p_\nu}{P_\nu} \right) c\lambda_0 U \subset U \quad \forall m \in \overline{\nu_k, n_k}\ \ \forall k > k_0,$$

тобто виконується умова 1), в якій $G = \{\theta\}$.

Таким чином, ми довели, що з умови 3) випливає умова 1) у випадку $\nu_k < n_k$ $\forall k > k_0$. Коли ж в умові 3) $\nu_k > n_k$ $\forall k > k_0$, то аналогічно доводиться, що виконується умова 1), в якій $\nu_k > n_k$ $\forall k > k_0$. ►

Покажемо, що умова 2) з числом $r = 0$ є наслідком з умови 4).

◄ Нехай має місце умова 4). Як і для умови 3), спочатку перевизначимо (m_k) і (l_k) так, щоб $P_{n_k} / P_{l_k} \le 2$ і $P_{m_k} / P_{n_k} \le 2$ $\forall k > k_0$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. За умовою (2.1) $\exists c > 0$: $\mu_n / \mu_m \ge c$, коли $1 \le P_n / P_m \le 2$. Якщо $\sum_{\nu=l_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \frac{\varepsilon}{cr}$ для $k = k_i \uparrow \infty$, то покладемо

$$l'_k = \max\{m \in \overline{l_k, n_k}: \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \frac{\varepsilon}{cr}\},\ l_k^* = l'_k + 1\ \ \forall k = k_i.$$

Після цього виконуватимуться нерівності

$$\sum_{\nu=l_k^*+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \frac{\varepsilon}{cr}\ \ \forall k = k_i,\ \ \varliminf_{k=k_i\to\infty} \sum_{\nu=l_k^*+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0.$$

Якщо тепер перевизначити (l_k), поклавши $l_k = l_k^*\ \ \forall k = k_i$, дістанемо, що

$$0 < \delta \leq \sum_{\nu=l_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \frac{\varepsilon}{cr}\ \ \forall k > k_0,$$

де $\delta > 0$ і $k_0 \in \mathbb{N}$ вже відрізняються від тих, що були спочатку в умові 4), а r залишається тим самим.

Далі, за умовою 4)

$$\mu_m(S_{n_k} - S_m) = \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_m}{\mu_\nu} \cdot \mu_\nu (S_\nu - S_{\nu-1}) = \left(\sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_m}{\mu_\nu} b_{\nu,k} \frac{\sigma_\nu p_\nu}{P_\nu} \right) t_k = b_{m,k}^{(1)} t_k,$$

де

$$b_{m,k}^{(1)} = \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_m}{\mu_\nu} b_{\nu,k} \frac{\sigma_\nu p_\nu}{P_\nu} \geq -r \sum_{\nu=m+1}^{n_k} \frac{\mu_m}{\mu_\nu} \cdot \frac{\sigma_\nu p_\nu}{P_\nu} > -rc \cdot \frac{\varepsilon}{cr} = -\varepsilon\ \ \forall m \in \overline{l_k, n_k}\ \ \forall k > k_0.$$

Так само доводиться, що $\mu_{n_k}(S_m - S_{n_k}) = b_{m,k}^{(2)}(-t_k)$, причому $b_{m,k}^{(2)} > -\varepsilon$ $\forall m \in \overline{n_k, m_k^*}\ \ \forall k > k_* > k_0$, де $n_k < m_k^* \leq m_k\ \ \forall k > k_*$, а $\sum_{\nu=n_k+1}^{m_k^*} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta_1 > 0\ \ \forall k > k_*$, тобто має місце умова 2), в якій $r = 0$. ►

◄ Умова 5) у нормованому просторі L є частинним випадком умови 1), коли $G = \{x \in L: \|x\| \leq r\}$. Зокрема, якщо в 5) $r = 0$, то в 1) $G = \{\theta\}$. ►

Доведемо рівносильність умов 5) та 6).

◄ Нехай виконується перша частина умови 5). Візьмемо послідовності $k_i \uparrow \infty$ та $n_i \uparrow \infty$: $n_i > n_{k_i}\ \ \forall i$, $\sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to 0\ \ (i \to \infty)$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. За умовою 5) $\exists (\nu_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{n_k} \left\| S_n - S_{n_k} \right\| \leq r + \varepsilon\ \ \forall n \in \overline{n_k, \nu_k}\ \ \forall k > k_0$, причому $\sum_{\nu=n_k+1}^{\nu_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta > 0 \ \ \forall k > k_0$. Звідси маємо, що $n_{k_i} < n_i < \nu_{k_i} \ \ \forall i > i_0$, а тому $\mu_{n_{k_i}} \left\| S_{n_i} - S_{n_{k_i}} \right\| \le r + \varepsilon \ \ \forall i > i_0$. Це рівносильно умові $\overline{\lim_{i\to\infty}} \mu_{n_{k_i}} \left\| S_{n_i} - S_{n_{k_i}} \right\| \le r$. Цим доведена перша частина умови 6).

Нехай тепер виконується перша частина умови 6), тобто $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{n_k} \left\| S_n - S_{n_k} \right\| < r + \varepsilon$, як тільки $k > k_0$, $n > n_k$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta$. Позначимо $\nu_k = \max\{n > n_k : \sum_{\nu=n_k+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta\} \ \ \forall k > k_0$. Такі номери існують завдяки умові $\sigma_n p_n / P_n \to 0$ та умовам $\sigma_n \ge \gamma$ і $P_n \to \infty$, з яких випливає, що $\sum_{\nu=n_k+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to +\infty \ (n \to \infty)$ [64, п. 375(4), с. 290]. Оскільки $\sum_{\nu=n_k+1}^{\nu_k+1} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall k > k_0$, то в силу умови $\sigma_n p_n / P_n \to 0$ сума $\sum_{\nu=n_k+1}^{\nu_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta/2 \ \ \forall k > k_* > k_0$, тобто послідовність (ν_k) така, як у першій частині умови 5).

Цим доведена рівносильність перших частин умов 5) та 6). Аналогічно доводиться рівносильність других частин. ►

◄ Доведення рівносильності умов 7) та 8) таке саме, як і умов 5) та 6). ►

◄ Умова 7) у просторі $L = \mathbb{R}$ є частинним випадком умови 2) з $t_k \equiv 1$ або $t_k \equiv -1$. Отже, $7) \Leftrightarrow 8) \Leftrightarrow 2)$. ►

◄ Умови 9), 10) є окремими випадками умови 3). А саме, щоб отримати 9), треба у 3) покласти $\nu_k = m_k < n_k$, а щоб отримати 10) – то $\nu_k = n_{k+1} - 1$. ►

Покажемо, що у нормованому просторі L $11) \Rightarrow 6)$ з $r = 0$.

◄ Візьмемо довільні послідовності $k_i \uparrow \infty$ та $m_i \uparrow \infty$: $m_i > n_{k_i} \ \ \forall i \in \mathbb{N}$, $\sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{m_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to 0 \ (i \to \infty)$. Оскільки $S_n = S_{n-1} \ \forall n \ne n_k$, то $\forall i \in \mathbb{N} \ \exists l_i = \max\{k \in \mathbb{N} :$ $n_k \le m_i$, $S_{n_k} = S_{m_i}\}$, причому $n_{k_i} \le n_{l_i} \le m_i$, зокрема, $k_i \le l_i$.

Користуючись умовою (2.1), виберемо сталу $C>0$ так, щоб $\mu_{m_{k_i}}/\mu_n \le C$ $\forall n\in\overline{n_{k_i},m_i}$ $\forall i$. Така стала існує, бо відношення $P_{m_i}/P_{n_{k_i}}$ обмежене, що випливає з наступних співвідношень:

$$0 \leftarrow \sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{m_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \gamma \sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{m_i} p_\nu / P_{m_i} = \gamma(1-P_{n_{k_i}}/P_{m_i}).$$

Нарешті, число $H>0$ візьмемо з умови 11), вважаючи, що

$$\mu_{n_k}\left\|S_{n_k}-S_{n_{k-1}}\right\| \le H\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Дістанемо

$$\mu_{n_{k_i}}\left\|S_{m_i}-S_{n_{k_i}}\right\| = \mu_{n_{k_i}}\left\|S_{n_{l_i}}-S_{n_{k_i}}\right\| \le \mu_{n_{k_i}}\left(\left\|S_{n_{l_i}}-S_{n_{l_i-1}}\right\| + \left\|S_{n_{l_i-1}}-S_{n_{l_i-2}}\right\| + \ldots +\right.$$

$$\left.+\left\|S_{n_{k_i+1}}-S_{n_{k_i}}\right\|\right) \le C\left(\mu_{n_{l_i}}\left\|S_{n_{l_i}}-S_{n_{l_i-1}}\right\| + \mu_{n_{l_i-1}}\left\|S_{n_{l_i-1}}-S_{n_{l_i-2}}\right\| + \ldots +\right.$$

$$\left.+\mu_{n_{k_i+1}}\left\|S_{n_{k_i+1}}-S_{n_{k_i}}\right\|\right) \le CH\left(\sum_{\nu=n_{l_i-1}+1}^{n_{l_i}} + \sum_{\nu=n_{l_i-2}+1}^{n_{l_i-1}} + \ldots + \sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{n_{k_i+1}}\right)\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \le$$

$$\le CH\sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{n_{l_i}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \le CH\sum_{\nu=n_{k_i}+1}^{m_i}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu \to 0 \ \ (i\to\infty).$$

Цим доведено, що виконується умова 6) з $r=0$. ▶

Аналогічно доводиться, що з умови 12) випливає умова 8) з $r=\beta=0$. □

Наступна лема 7 розкриває зв’язок між наведеними вище умовами і $D(p,\mu,\sigma)$-точками послідовності (S_n).

Лема 7. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє одну з умов* 1) – 12). *Тоді*

I) *якщо* $\mu_{n_k}S_{n_k}\ne O(1)$, *то* $z=\infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n);

II) *якщо в* 1) $G=\{\theta\}$, *у* 2), 5) – 8) $r=0$ *і при цьому* $\mu_{n_k}S_{n_k}\ne o(1)$, *то* $z=\theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n).

□ Ця лема для умов 1) – 4) сформульована в роботі [43] і доведена вона там лише для умови 1) у частині II). Згідно з нашою лемою 6 достатньо довести лему 7 тільки для умов 1) і 2). Проведемо міркування для умови 1) у частині I).

Припустимо, що виконується умова 1) і $\mu_{n_k} S_{n_k} \ne O(1)$. Тоді існує абсолютно опуклий окіл нуля U і послідовності k_i, $r_i \uparrow \infty$: $\mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} \notin r_i U$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Оскільки множина G обмежена, то $\exists \lambda > 0$: $G \subset \lambda U = U_1$. Множина U_1 є абсолютно опуклим околом нуля, тому за умовою 1) $\exists (\nu_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{n_k}(S_n - S_{n_k}) \in U_1$, коли $\nu_k \le n \le n_k$, $k > k_0$, або коли $n_k \le n \le \nu_k$, $k > k_0$, причому відповідно $\sum\limits_{\nu=\nu_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ або $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\nu_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall k > k_0$. Для визначеності припустимо, що (ν_k) реалізовує перший варіант в умові 1).

Оскільки $\sigma_n \ge \gamma > 0$ $\forall n$, $P_n \to \infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k / P_k \to \infty$ $(n \to \infty)$ [64, п. 375(4) с. 290], а тому $\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to +\infty$ $(n \to \infty \, \forall m)$. Через це можна вважати послідовність (k_i) такою, що $k_i > k_0$, а $\sum\limits_{\nu=n_{k_i}+1}^{n_{k_{i+1}}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall i$. Якщо при якомусь i буде $\nu_{k_i} \le n_{k_{i-1}}$, то ми покладемо $\nu_{k_i} = n_{k_{i-1}}$. В результаті матимемо $\nu_{k_i} < n_{k_i} \le \nu_{k_{i+1}}$ і $\sum\limits_{\nu=\nu_{k_i}+1}^{n_{k_i}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$ $\forall i$ тобто послідовності (ν_{k_i}) та (n_{k_i}) такі, як (m_k) та (n_k) в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точок. Окрім цього, будемо вважати, що $\lambda > 1$, а $r_i \ge 2\lambda$ $\forall i$. При цьому $U \subset U_1 = \lambda U$, $\mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} \notin \frac{r_i}{\lambda} U_1$ і ми покажемо зараз, що

$$\frac{r_i}{2\lambda} U_1 \bigcap (\mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} + U_1) = \varnothing \ \ \forall i.$$

Припустимо, що це не так, а для деякого $i \in \mathbb{N}$ $\exists u$, $v \in U_1$:

$$\frac{r_i}{2\lambda} u = \mu_{n_{k_1}} S_{n_{k_1}} + v \Rightarrow \mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} = \frac{r_i}{2\lambda} u - v \in \frac{r_i}{2\lambda} U_1 - U_1 = \frac{r_i}{2\lambda} U_1 + U_1 \subset$$

$$\subset \frac{r_i}{2\lambda} U_1 + \frac{r_i}{2\lambda} U_1 = \frac{r_i}{2\lambda}(U_1 + U_1) = \frac{r_i}{\lambda} U_1,$$

в силу абсолютної опуклості U_1. Дістали протиріччя.

Отже, множини $\frac{r_i}{2\lambda}U_1$ та $\mu_{n_{k_i}}S_{n_{k_i}}+U_1$ не перетинаються $\forall i$. Вони відкриті і опуклі у віддільному, локально опуклому просторі L. За теоремою Хана – Банаха [50, т. 3.4, с. 70] $\forall i\in\mathbb{N}\ \exists\varphi_i\in L^*$: $\varphi_i(r_i/(2\lambda)U_1)<a_i\le\varphi_i(\mu_{n_{k_i}}S_{n_{k_i}}+U_1)$.

Покажемо, що окіл U_1, послідовності (φ_i) та (a_i) такі, як в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точки $z=\infty$. Згідно з умовою 1) $\mu_{n_{k_i}}S_n\in\mu_{n_{k_i}}S_{n_{k_i}}+U_1$ $\forall n\in\overline{\nu_{k_i},n_{k_i}}$ $\forall i$, тому $\varphi_i(\mu_{n_{k_i}}S_n)\ge a_i$ $\forall n\in\overline{\nu_{k_i},n_{k_i}}$ $\forall i$. Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Тоді $\exists i_0$: $r_i/(2\lambda)>\varepsilon$ $\forall i>i_0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon U_1\subset r_i/(2\lambda)U_1$ $\Rightarrow$ $\varphi_i(\varepsilon U_1)<a_i$ $\forall i>i_0$. Враховуючи зауваження 5 пункту 2.1.3, можна стверджувати, що точка $z=\infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою (S_n). Частина I) леми 7 для умови 1) доведена.

Доведення леми 7 для умови 2) міститься у додатку Г. □

Згідно з [50, с. 78] послідовність $x_n\in L$, $n\in\mathbb{N}$, називають *слабо обмеженою* (*слабо збіжною до нуля*) і записують $x_n\overset{C}{=}O(1)$ (відповідно $x_n\overset{C}{=}o(1)$), якщо $\forall f\in L^*$ $f(x_n)=O(1)$ ($f(x_n)=o(1)$). Вкажемо тепер ще дві умови, пристосовані до слабкої збіжності або обмеженості послідовності $(\mu_{n_k}S_{n_k})$:

13) $\forall f\in L^*$ $\exists r\ge 0$ і $\beta=\beta(f)\in\{0,1\}$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists(m_k)$, (l_k), $k_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$: $(-1)^\beta\mu_{n_k}f(S_m-S_{n_k})\ge -r-\varepsilon$ $(n_k\le m\le m_k)$ і $(-1)^\beta\mu_m f(S_{n_k}-S_m)\ge -r-\varepsilon$ $(l_k\le m\le n_k)$, причому $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=l_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ $\forall k>k_0$;

14) $\forall f\in L^*$ $\exists\beta=\beta(f)\in\{0,1\}$, $H>0$, (m_k), (l_k), $k_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$: $l_k<n_k<m_k$ $\forall k>k_0$, $(-1)^\beta\mu_n f(S_n-S_{n-1})\ge -H\sigma_n p_n/P_n$, коли $l_k\le n\le n_k$, $k>k_0$, причому $\sum\limits_{\nu=l_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ $\forall k>k_0$.

Лема 8. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє умову* 13) *або умову* 14). *Тоді якщо* $\mu_{n_k}S_{n_k}\overset{C}{\ne}O(1)$, *то* $z=\infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n). *Якщо ж в умові* 13)

$r=0$ *і* $\mu_{n_k} S_{n_k} \overset{C}{\neq} o(1)$, *то* $z=\theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n).

□ Нехай $\mu_{n_k} S_{n_k} \overset{C}{\neq} O(1)$ ($\mu_{n_k} S_{n_k} \overset{C}{\neq} o(1)$) і виконується умова 13) (для випадку $\mu_{n_k} S_{n_k} \overset{C}{\neq} o(1)$ в умові 13) припускаємо $r=0$). Тоді $\exists f \in L^*$: $\mu_{n_k} f(S_{n_k}) \neq O(1)$ ($\neq o(1)$). Умова 13) є частинним випадком умови 7) для дійсної послідовності $(f(S_n))$. Тому точка $z=\infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою послідовності $(f(S_n))$. Отже, враховуючи зауваження 4 пункту 2.1.3, $\exists (m_k^*)$, (n_k^*), (θ_k): $m_{k+1}^* \geq n_k^* > m_k^* \uparrow \infty$, $\varliminf_{k\to\infty} \sum_{\nu=m_k^*+1}^{n_k^*} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu > 0$, $\theta_k \equiv \alpha$, $\alpha \in \{0,\pi\}$, і $\forall \varepsilon > 0$ ($\exists \varepsilon > 0$) $\exists k_0$:

$$a_k = \min_{m_k^* \leq n \leq n_k^*} e^{i\alpha} \mu_{m_k^*} f(S_n) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \overline{m_k^*, n_k^*} \quad \forall k > k_0 .$$

Позначимо $\varphi(x) = e^{i\alpha} f(x) \quad \forall x \in L$, $U = \{x \in L : |f(x)| < 1\}$. Тоді $\varphi \in L^*$, $\varphi(\mu_{m_k^*} S_n) \geq a_k \quad \forall n \in \overline{m_k^*, n_k^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, а $\varphi(\varepsilon U) = e^{i\alpha} \varepsilon f(U) < \varepsilon \leq a_k \quad \forall k > k_0$. При цьому легко показати за означенням, що U – абсолютно опукла множина, яка містить нуль. В силу неперервності функціонала f, U – відкрита множина, тобто U – абсолютно опуклий окіл нуля. Таким чином, точка $z=\infty$ (точка $z=\theta$) є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою послідовності (S_n).

Лема 8 доведена для умови 13). Вона буде повністю доведена, коли ми покажемо, що з умови 14) випливає умова 13), причому з $r=0$. Зробимо це.

Нехай виконується умова 14). За зауваженням 3 пункту 2.1.3 можна вважати, що $P_{m_k} / P_{l_k} \leq 2 \ \forall k$. Оскільки послідовність (μ_n) задовольняє умову (2.1), то $\exists c > 0$: $\mu_m / \mu_n \leq c$, коли $1 \leq P_n / P_m \leq 2$.

Візьмемо довільний функціонал $f \in L^*$. Для скорочення записів позначимо $x_n = f(S_n) \ \forall n$. За умовою 14) $(-1)^\beta \mu_n (x_n - x_{n-1}) \geq -H \sigma_n p_n / P_n \quad \forall n \in \overline{l_k, m_k}$, причому $H > 0$, $\sum_{\nu=l_k+1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta > 0$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{m_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$, як того вимагає умова 13), причому вважатимемо $0<\varepsilon<\delta cH$. Оскільки $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$, а $\frac{\varepsilon}{cH}<\delta$, то

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \ \exists m_k'=\min\{m>n_k:\ \sum_{\nu=n_k+1}^{m}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu>\frac{\varepsilon}{cH}\},$$

причому $n_k<m_k'\le m_k$. Позначимо $m_k^*=m_k'-1$. Оскільки $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k'}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu>\frac{\varepsilon}{cH}$ $\forall k$, то в силу умови (2.2) $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k^*}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu>\delta_1$ $\forall k>k_0$, де $\delta_1<\frac{\varepsilon}{cH}$, звідки випливає (див. зауваження 2 п. 2.1.3), що $m_k^*-n_k\to\infty$, а отже, $n_k<m_k^*<m_k$ $\forall k>k'>k_0$. Разом з цим, за означенням номерів m_k', $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{m_k^*}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\le\frac{\varepsilon}{cH}$ і тому

$$(-1)^\beta\mu_{n_k}(x_m-x_{n_k})=(-1)^\beta\mu_{n_k}\sum_{\nu=n_k+1}^{m}(x_\nu-x_{\nu-1})=\sum_{\nu=n_k+1}^{m}\frac{\mu_{n_k}}{\mu_\nu}(-1)^\beta\mu_\nu(x_\nu-x_{\nu-1})\ge$$

$$\ge-cH\sum_{\nu=n_k+1}^{m}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge-cH\cdot\frac{\varepsilon}{cH}=-\varepsilon\ \ \forall m\in\overline{n_k,m_k^*}\ \ \forall k>k'.$$

Це означає, що перша частина умови 13) виконується. Аналогічно доводиться і друга частина. □

Зауваження. 1. У довільному віддільному, локально опуклому просторі L слабка обмеженість і просто обмеженість послідовності (S_n) рівносильні [50, с. 8]. Отже, в лемі 8 замість “$\overset{C}{\ne}O(1)$” можна писати просто “$\ne O(1)$”.

2. Якщо простір L обмежено компактний (див. пункт 1.1.1), то легко довести, що в ньому поняття збіжності і слабкої збіжності рівносильні, і тому для такого простору L лема 8 залишиться правильною і після того, як у ній замість “$\overset{C}{\ne}o(1)$” написати просто “$\ne o(1)$”.

Ми розглянули тауберові умови 1) – 14), які накладалися на члени послідовності (S_n), номери яких розміщені біля фіксованої послідовності $n_k\uparrow\infty$.

Умови 1) – 8) можна переформулювати так, щоб вони стосувалися усієї послідовності (S_n).

1*) Існує обмежена множина $G \subset L$: $\theta \in G$ і для будь-якого абсолютно опуклого околу $U(G)$ множини G існують $n_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_m(S_n - S_m) \in U(G)$ $\forall n > m > n_0$: $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta$;

2*) $\exists r \geq 0$, $t_n \in L$: $t_n = O(1)$, $\mu_n S_n = b_n^* t_n$, де $b_n^* \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_m(S_n - S_m) = b_{m,n} t_n$, $b_{m,n} \geq -r - \varepsilon$ $\forall n > m > n_0$: $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta$;

3*) $\mu_n(S_n - S_{n-1}) = O(\sigma_n p_n / P_n)$;

4*) $\exists r \geq 0$, $t \in L$: $\mu_n S_n = b_n^* t$, де $b_n^* \in \mathbb{R}$, а $\mu_n(S_n - S_{n-1}) = b_n \dfrac{\sigma_n p_n}{P_n} t$, причому $b_n \geq -r$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$;

5*) $\exists r \geq 0$: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \delta > 0: \mu_m \|S_n - S_m\| \leq r + \varepsilon\, \forall n > m > n_0$: $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta$;

6*) $\overline{\lim_{n>m\to\infty}} \mu_m \|S_n - S_m\| = r < +\infty$, коли $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to 0$;

7*) $\exists r \geq 0$, $\beta \in \{0,1\}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \delta > 0$: $(-1)^\beta \mu_m(S_n - S_m) \geq -r - \varepsilon$ $\forall n > m > n_0$: $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta$;

8*) $\exists r \geq 0$, $\beta \in \{0,1\}$: $\underline{\lim}_{n>m\to\infty} (-1)^\beta (S_n - S_m) \geq -r$, коли $\sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \to 0$.

Відмітимо, що умова 9) не має відповідного аналога, зате умови 10) – 12) без змін підходять і для всієї послідовності (S_n).

Лема 9. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє принаймні одну з умов* 1*) – 8*), 10) – 12). *Тоді*

I) *якщо* $\mu_n S_n \neq O(1)$, *то* $z = \infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* (S_n);

II) *якщо в* 1*) $G = \{\theta\}$, *у* 2*), 5*) – 8*) $r = 0$ *і при цьому* $\mu_n S_n \neq o(1)$, *то* $z = \theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* (S_n).

□ При виконанні якої-небудь з умов a^*) виконується відповідна їй умова a) для підпослідовності $n_k = k$, тому лема 9 правильна для умов 1^*) – 8^*), в силу леми 7.

Для умов 10) – 12) лема 9 теж випливає з леми 7, оскільки в умовах 10) – 12) послідовність $n_k \uparrow \infty$ має таку будову, що $\mu_{n_k} S_{n_k} \neq O(1)$ $(\neq o(1))$, коли $\mu_n S_n \neq O(1)$ $(\neq o(1))$. □

Для слабкої збіжності аналогами умов 13) і 14) є наступні умови 13^*) і 14^*).

13^*) $\forall f \in L^*$ $\exists r \geq 0$ і $\beta = \beta(f) \in \{0,1\}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $(-1)^\beta \mu_m f(S_n - S_m) \geq$

$$\geq -r - \varepsilon \ \ \forall n > m > n_0 : \ \sum_{\nu=m+1}^{n} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu < \delta ;$$

14^*) $\forall f \in L^*$ $\exists \beta = \beta(f) \in \{0,1\}$ і $H > 0$: $(-1)^\beta \mu_n f(S_n - S_{n-1}) \geq -H \sigma_n p_n / P_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

З леми 8 випливає наступна лема 10.

Лема 10. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє умову* 13^*) *або умову* 14^*). *Тоді якщо* $\mu_n S_n \overset{C}{\neq} O(1)$, *то* $z = \infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n), *а якщо у* 13^*) $r = 0$ *і* $\mu_n S_n \overset{C}{\neq} o(1)$, *то* $z = \theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* (S_n).

□ Все пояснюється тим, що при виконанні умови 13^*) або 14^*) виконується відповідна умова 13) або 14) для $n_k = k$. □

2.2. Статистична збіжність і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро

У даному підрозділі зафіксовано послідовність (p_n): $p_n \geq 0$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, і додатні послідовності (μ_n) і (σ_n), що задовольняють умови (2.1) та (2.2). Послідовність (S_n) набуває значень з дійсного, віддільного, локально опуклого лінійного топологічного простору L.

2.2.1. Поняття (p,μ,σ)-статистичної збіжності та обмеженості послідовності. Казатимемо, що послідовність (S_n) (p,σ)*-статистично збігається* *до нуля*, і писатимемо $S_n = o(1)\ ((p,\sigma)\text{-st})$, якщо кожен абсолютно опуклий окіл U нуля θ простору L є таким, що $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{k\le n:\, S_k\notin\varepsilon U}\sigma_k p_k = 0. \tag{2.3}$$

Замінивши в цьому реченні символ “$\forall$” символом “$\exists$”, дістанемо означення (p,σ)*-статистичної обмеженості* послідовності (S_n).

Ще один вид збіжності та обмеженості послідовності (S_n) ми можемо дістати, вимагаючи, щоб замість умови (2.3) виконувалася умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{P_n}\sum_{k\le n:\, S_k\notin\varepsilon U} p_k = 0. \tag{2.4}$$

Таку збіжність або обмеженість назвемо $(p,\sigma)^*$*-статистичною* і позначатимемо $S_n = o(1)\ ((p,\sigma)^*\text{-st})$ або $S_n = O(1)\ ((p,\sigma)^*\text{-st})$ відповідно.

Послідовність (S_n) назвемо (p,μ,σ)*-статистично збіжною до елемента* $a\in L$, і писатимемо $S_n \to a\ ((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, якщо $\mu_n(S_n - a) = o(1)\ ((p,\sigma)\text{-st})$. Якщо ж послідовність $(\mu_n S_n)$ (p,σ)-обмежена, то будемо казати, що послідовність (S_n) (p,μ,σ)*-статистично обмежена,* і писати $S_n = O(1)\ ((p,\mu,\sigma)\text{-st})$.

Так само через $(p,\sigma)^*$-статистичну збіжність чи обмеженість визначається $(p,\mu,\sigma)^*$*-статистична збіжність* або *обмеженість* відповідно.

Якщо L – нормований простір, то в означеннях (p,σ)- і $(p,\sigma)^*$-статистичної збіжності та обмеженості можна вважати $U = \{x : \|x\| < 1\}$. У випадку $L = \mathbb{R}$, $p_n \equiv \sigma_n \equiv \mu_n \equiv 1$ (p,μ,σ)- і $(p,\mu,\sigma)^*$-статистична збіжність перетворюється на просто статистичну збіжність (див. пункт 2.1.1).

Оскільки $P_n \to \infty$, то легко бачити, що кожна збіжна до нуля (обмежена) послідовність (S_n) є і (p,σ)-статистично збіжною до нуля ((p,σ)-статистично обмеженою), але не навпаки. Так, якщо взяти $L = \mathbb{R}$, $p_n \equiv \sigma_n \equiv 1$, $S_{n^2} = n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $S_k = 0$ при $k \ne n^2$ $\forall n$, то $\forall\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\le n:|S_k|\ge\varepsilon}1=\frac{1}{n+1}\sum_{k:\,\varepsilon\le k^2\le n}1=\frac{1}{n+1}\sum_{k:\,\sqrt{\varepsilon}\le k\le\sqrt{n}}1\le$$

$$\le\frac{1}{n+1}\sum_{k:\,k\le\sqrt{n}}1\le\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}\to 0\ \ (n\to\infty)\Rightarrow$$

$$S_n=o(1)\ \ ((1{,}1)\text{-st})\Rightarrow S_n=O(1)\ \ ((1{,}1)\text{-st}),$$

але $S_n\ne O(1)$ $(n\to\infty)$.

Для того щоб кожна збіжна до нуля (обмежена) послідовність (S_n) була і $(p,\sigma)^*$-статистично збіжною до нуля ($(p,\sigma)^*$-статистично обмеженою), вже треба звузити клас послідовностей (σ_n), наприклад, за допомогою рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n/P_n=0$.

2.2.2. Зв’язок між $D(p,\mu,\sigma)$-точками і (p,μ,σ)-статистичною збіжністю та обмеженістю. Цей зв’язок встановлюється у наступних двох теоремах.

Теорема 5. *Якщо точка* $z=\theta$ (*точка* $z=\infty$) *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою послідовності* (S_n), *то ця послідовність* (S_n) *не може* (p,μ,σ)*-статистично збігатися до нуля* (*бути* (p,μ,σ)*-статистично обмеженою*).

□ Нехай $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою (S_n). Тоді існує абсолютно опуклий окіл нуля U і послідовності (m_k), (n_k), (φ_k), (a_k) такі, що $m_{k+1}\ge n_k>$ $>m_k\uparrow\infty$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta>0$, $\varphi_k\in L^*$, $a_k\ge 0$ $\forall k$, а також $\exists\varepsilon>0$ ($\forall\varepsilon>0$) $\exists k_0$: $\varphi_k(\mu_{m_k}S_n)\ge a_k>0$ $\forall n\in\overline{m_k,n_k}$, $\varphi_k(\varepsilon U)<a_k$ $\forall k>k_0$. Оскільки виконана умова (2.2), то за зауваженням 3 пункту 2.1.3 можна вважати, що $P_{n_k}/P_{m_k}\le 2$ $\forall k$.

Згідно з умовою (2.1) $\exists c>0$: $\mu_n/\mu_m\ge c$, коли $1\le P_n/P_m\le 2$. Тоді

$$\varphi_k(\mu_n S_n)=\frac{\mu_n}{\mu_{m_k}}\varphi_k(\mu_{m_k}S_n)\ge ca_k\ \ \forall n\in\overline{m_k,n_k}\ \ \forall k>k_0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{P_{n_k}}\sum_{\nu\le n_k:\,\mu_\nu S_\nu\notin c\varepsilon U}\sigma_\nu p_\nu\ge\frac{1}{P_{n_k}}\sum_{\nu=m_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu=\sum_{\nu=m_k+1}^{n_k}\frac{P_\nu}{P_{n_k}}\cdot\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\frac{1}{2}\delta>0\ \ \forall k>k_0\Rightarrow$$

$S_n \ne o(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$ ($S_n \ne O(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$). □

Теорема 6. *Якщо точка* $z=\theta$ (*точка* $z=\infty$) *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою послідовності* (S_n), *то ця послідовність* (S_n) *не може* $(p,\mu,\sigma)^*$*-статистично збігатися до нуля* (*бути* $(p,\mu,\sigma)^*$*-статистично обмеженою*).

□ Теорема 6 обгрунтовується тими ж міркуваннями, що і попередня теорема. Відмінність лише у тому, що згідно з (2.4) в кінці отримується нерівність

$$\frac{\sigma_{n_k}}{P_{n_k}} \sum_{\nu\le n_k:\,\mu_\nu S_\nu \notin c\varepsilon U} p_\nu \ge \frac{\sigma_{n_k}}{P_{n_k}} \sum_{\nu=m_k+1}^{n_k} p_\nu = \sum_{\nu=m_k+1}^{n_k} \frac{\sigma_{n_k}}{\sigma_\nu}\cdot\frac{P_\nu}{P_{n_k}}\cdot\sigma_\nu p_\nu \ge \frac{c_1}{2}\delta > 0 \quad \forall k>k_0,$$

де c_1 не залежить від k і визначається умовою (2.1), за якою $\sigma_n/\sigma_m \ge c_1 > 0$, коли $1 \le P_n/P_m \le 2$. □

2.2.3. $\boldsymbol{D}$-властивість і тауберові теореми із залишком для методів $\boldsymbol{(H,p,\alpha)}$ і $\boldsymbol{(C,p,\alpha)}$. Нехай $\alpha\in\mathbb{N}$, $(H_n^{(\alpha)})$ і $(C_n^{(\alpha)})$ – середні типу Гельдера і Чезаро послідовності (S_n), які були визначені в пункті 1.1.4, а $\mu_n^{(\alpha)} \equiv \lambda_n/\sigma_n^\alpha$.

□ Припустимо, що $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(p,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-точкою (S_n). Тоді за наслідком з теореми Т8 пункту 2.1.1 $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(p,\lambda,\sigma)$-точкою послідовностей $(H_n^{(\alpha)})$ і $(C_n^{(\alpha)})$. Тому за теоремою 5 пункту 2.2.2 послідовності $(H_n^{(\alpha)})$ і $(C_n^{(\alpha)})$ не можуть (p,λ,σ)-статистично збігатися до нуля (бути (p,λ,σ)-статистично обмеженими). □

Таким чином, має місце наступна *статистична* D*-властивість* методів (H,p,α) і (C,p,α) підсумовування однократних послідовностей.

Теорема 7. *Якщо* $z=\theta$ ($z=\infty$) *є* $D(p,\mu^{(\alpha)},\sigma)$*-точкою послідовності* (S_n), *то послідовності* $(H_n^{(\alpha)})$ *і* $(C_n^{(\alpha)})$ *не можуть* (p,λ,σ)*-статистично збігатися до нуля* (*бути* (p,λ,σ)*-статистично обмеженими*).

З теореми 7 і лем 7 та 8 пункту 2.1.4 випливає

Теорема 8. *Нехай* $n_k \uparrow \infty$, $\alpha\in\mathbb{N}$, *а послідовність* (S_n) *задовольняє принаймні одну з умов* 1) – 14) *пункту* 2.1.4, *де* $\mu_n \equiv \mu_n^{(\alpha)}$. *Тоді*

I) *якщо якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ *є* (p,λ,σ)*-статистично обмеженою, то* $\mu_{n_k}^{(\alpha)} S_{n_k} = O(1)$ $(k \to \infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13) *з* $r = 0$ *або* 14) *і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ (p,λ,σ)*-статистично збігається до нуля, то послідовність* $(\mu_{n_k}^{(\alpha)} S_{n_k})$ *слабо збігається до нуля*;

III) *якщо в* 1) $G = \{\theta\}$, *у* 2), 5) – 8), 13) $r = 0$, *у* 13) *і* 14) *простір* L *обмежено компактний і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ (p,λ,σ)*-статистично збігається до елемента* $a \in L$, *то* $S_{n_k} = a + o(1/\mu_{n_k}^{(\alpha)})$ $(k \to \infty)$.

□ Додаткових пояснень може вимагати хіба що частина III) теореми 8. А саме, якщо послідовність (S_n) задовольняє одну з умов 1) – 14) пункту 2.1.4, причому в 1) $G = \{\theta\}$, у 2), 5) – 8), 13) $r = 0$, то ці ж самі умови задовольняє і послідовність $(S_n - a)$. Якщо припустити, що $\mu_{n_k}^{(\alpha)}(S_{n_k} - a) \neq o(1)$, то за лемами 7, 8 пункту 2.1.4 точка $z = \theta$ буде $D(p,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-точкою послідовності $(S_n - a)$. Позначимо $(\tilde{H}_n^{(\alpha)})$ і $(\tilde{C}_n^{(\alpha)})$ середні типу Гельдера і Чезаро послідовності $(S_n - a)$. За теоремою 7 послідовності $(\tilde{H}_n^{(\alpha)})$ і $(\tilde{C}_n^{(\alpha)})$ не можуть (p,λ,σ)-статистично збігатися до нуля. Дістаємо протиріччя з припущенням частини III), оскільки $\tilde{H}_n^{(\alpha)} \equiv H_n^{(\alpha)} - a$, $\tilde{C}_n^{(\alpha)} \equiv C_n^{(\alpha)} - a$. □

Теорема 8 для випадку звичайної збіжності і умов 1) – 4) доведена Г. О. Михаліним [43], а для статистичної збіжності, випадку $p_n \equiv \mu_n \equiv \sigma_n \equiv \equiv 1 = \alpha$, простору $L = \mathbb{R}$ або $L = \mathbb{C}$ і умов **1** та **2** пункту 2.1.2 ця теорема доведена Дж. Фрайді і М. Ханом (див. теореми Т9 і Т10).

Наведемо три наслідки з теореми 8, які ілюструють, як завдяки “вагам” (λ_n) і (σ_n) можна послаблювати класичні тауберові умови або керувати швидкістю збіжності даної послідовності та її середніх. Використаємо тільки тауберову умову 6) пункту 2.1.4. Вважатимемо, що простір L нормований, послідовність (S_n) L-значна, послідовність (λ_n) додатна і задовольняє умови (2.1) та

(2.2), $n_k \uparrow \infty$ – задана послідовність номерів, число $\alpha \in \mathbb{N}$, $(H_n^{(\alpha)})$ – середні типу Гельдера, а $(C_n^{(\alpha)})$ – середні типу Чезаро послідовності (S_n).

Наслідок 12. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє умову*

$$\varlimsup_{n>n_k\to\infty}\left\|S_n - S_{n_k}\right\| = r < +\infty, \text{ коли } \sum_{\nu=n_k+1}^{n} \lambda_\nu^{1/\alpha} p_\nu / P_\nu \to 0.$$

Якщо якась із послідовностей $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,\lambda^{1/\alpha})$*-статистично обмежена, то* $S_{n_k} = O(1)$, *а якщо* $r = 0$ *і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,\lambda^{1/\alpha})$*-статистично збігається до* $a \in L$, *то* $S_{n_k} = a + o(1)$.

Наслідок 13. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє умову*

$$\varlimsup_{n>n_k\to\infty} \lambda_{n_k}^{\frac{1}{\alpha+1}}\left\|S_n - S_{n_k}\right\| = r < +\infty, \text{ коли } \sum_{\nu=n_k+1}^{n} \lambda_\nu^{\frac{1}{\alpha+1}} p_\nu / P_\nu \to 0.$$

Якщо якась із послідовностей $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}})$*-статистично обмежена, то* $\lambda_{n_k}^{\frac{1}{\alpha+1}} S_{n_k} = O(1)$, *а якщо* $r = 0$ *і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}})$*-статистично збігається до* $a \in L$, *то* $S_{n_k} = a + o(\lambda_{n_k}^{-\frac{1}{\alpha+1}})$.

Наслідок 14. *Нехай послідовність* (S_n) *задовольняє умову*

$$\varlimsup_{n>n_k\to\infty} \lambda_{n_k}\left\|S_n - S_{n_k}\right\| = r < +\infty, \text{ коли } \sum_{\nu=n_k+1}^{n} p_\nu / P_\nu \to 0.$$

Якщо якась із послідовностей $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,1)$*-статистично обмежена, то* $\lambda_{n_k} S_{n_k} = O(1)$, *а якщо* $r = 0$ *і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ $(p,\lambda,1)$*-статистично збігається до* $a \in L$, *то* $S_{n_k} = a + o(1/\lambda_{n_k})$.

□ Наслідки 12 – 14 безпосередньо випливають з теореми 8 (для тауберової умови 6)), якщо в ній узяти: для наслідку 12 $\sigma_n \equiv \lambda_n^{1/\alpha}$ і тоді $\mu_n^{(\alpha)} \equiv 1$; для наслідку 13 $\sigma_n \equiv \lambda_n^{\frac{1}{\alpha+1}}$ і тоді $\mu_n^{(\alpha)} \equiv \sigma_n \equiv \lambda_n^{\frac{1}{\alpha+1}}$; для наслідку 14 $\sigma_n \equiv 1$ і тоді $\mu_n^{(\alpha)} \equiv \lambda_n$. □

З теореми 7 і лем 9 та 10 випливає

Теорема 9. *Нехай* $\alpha \in \mathbb{N}$ *і виконується принаймні одна з умов* $1^{*}) - 8^{*})$, $13^{*}), 14^{*}), 10) - 12)$ *пункту* 2.1.4, *в яких* $\mu_n \equiv \mu_n^{(\alpha)}$. *Тоді*

I) *якщо якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ *є* (p,λ,σ)*-статистично обмеженою, то* $\mu_n^{(\alpha)} S_n = O(1)$ $(n \to \infty)$;

II) *якщо виконується умова* $13^{*})$ *або* $14^{*})$ *і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ (p,λ,σ)*-статистично збігається до нуля, то послідовність* $(\mu_n^{(\alpha)} S_n)$ *слабо збігається до нуля*;

III) *якщо в* $1^{*})$ $G = \{\theta\}$, *у* $2^{*}), 5^{*}) - 8^{*}), 13^{*})$ $r = 0$, *у* $13^{*})$ *і* $14^{*})$ *простір* L *обмежено компактний і якась із послідовностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *або* $(C_n^{(\alpha)})$ (p,λ,σ)*-статистично збігається до елемента* $a \in L$, *то* $S_n = a + o(1/\mu_n^{(\alpha)})$ $(n \to \infty)$.

В силу теореми 6 твердження теорем 7 – 9 і наслідків 12 – 14 будуть правильними і у випадку $(p,\lambda,\sigma)^{*}$-статистичної збіжності та обмеженості середніх.

2.3. Статистична збіжність і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування Вороного класу W_Q

У цьому підрозділі вивчатимуться методи Вороного класу W_Q, визначені в пункті 1.1.5. Вважатимемо, що додатні послідовності (λ_n) і (σ_n) задовольняють умови (2.1) і (2.2), в яких $p_n \equiv 1$, тобто

$$\lambda_m \asymp \lambda_n \text{ і } \sigma_m \asymp \sigma_n, \text{ коли } m \asymp n,$$

$$\sigma_n \ge \gamma > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ і } \sigma_n / n \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Позначимо $\mu_n^{(\alpha)} = \lambda_n / \sigma_n^{\alpha}$ $\forall n, \alpha \in \mathbb{N}_0$.

2.3.1. Допоміжні твердження. Для доведення основних теорем підрозділу 2.3 та підрозділу 2.5 нам знадобиться кілька лем.

Наступна лема 11 вперше була доведена у випадку $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ Л. Ф. Таргонським [59] для поліноміальних методів Вороного (W, p). М. М. Білоцький [79] переніс її на методи Вороного класу W_Q. Ми пропонуємо простіше доведення цієї леми, а також доповнюємо її випадком $\alpha_1 = 0$.

Лема 11. *Нехай* (W, p) *– метод Вороного з пункту* 1.1.5 *– має твірну функцію* $p(z) = p_l(z) / p_\alpha(z)$, *причому число* $z = 1$ *є коренем многочлена* $p_\alpha(z)$ *кратності* $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$. *Тоді існує многочлен* $D_\eta(z)$ *такий, що функція* $g(z) =$ $= p(z) D_\eta(z)$ *має вигляд*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n = \frac{B_t(z)}{(1-z)^{\alpha_1}}, \ |z| < 1, \tag{2.5}$$

де $B_t(z)$ *– многочлен з невід'ємними коефіцієнтами,* $B_t(0) > 0$. *Функція* $g(z)$ *породжує додатний, регулярний метод Вороного* (W, g) *і мають місце співвідношення* $P_n \asymp G_n \asymp n^{\alpha_1}$.

Зауваження. Додатні послідовності (a_n) і (b_n) називаються *слабо еквівалентними*, якщо $\exists h_1, \ h_2 \colon \ 0 < h_1 < a_n / b_n < h_2 < +\infty \ \ \forall n$. Те, що (a_n) і (b_n) слабо еквівалентні, позначається $a_n \asymp b_n$.

☐ Оскільки $p_l(z)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, що не має додатних нулів, і $p_l(0) > 0$, то за лемою 2 [59] існує многочлен $p^*(z)$ з невід'ємними коефіцієнтами такий, що $p^*(0) > 0$, а $B_t(z) = p_l(z) p^*(z)$ є многочленом степеня $t \geq l$, усі коефіцієнти якого теж невід'ємні, і $B_t(0) > 0$. З іншого боку, справедливе представлення $p_\alpha(z) = (1-z)^{\alpha_1} p^{**}(z)$, де $p^{**}(z)$ – деякий многочлен степеня $\alpha - \alpha_1$ такий, що $p^{**}(1) \neq 0$. Отже, якщо позначити $D_\eta(z) = p^*(z) p^{**}(z)$, то функція $g(z) = p(z) D_\eta(z)$ матиме вигляд (2.5).

Перевіримо, чи задає послідовність (g_n) з рівності (2.5) метод Вороного (W, g) класу W_Q. Оскільки (2.5) є частинним випадком (1.4), то залишається перевірити додатність (g_n) та умову (1.3).

Нехай $B_t(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_t z^t$, причому $b_n \geq 0 \ \ \forall n \in \overline{0, t}$, $b_0 > 0$, $b_t > 0$. Довизначимо (b_n) рівністю $b_n = 0 \ \ \forall n > t$. Тоді з рівності (2.5)

$$g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha_1-1)}z^n\right),$$

де $E_n^{(\alpha)}=\binom{n+\alpha}{\alpha}=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$, зокрема, $E_n^{(0)}\equiv 1$, $(E_n^{(-1)})=(1,0,0,\ldots)$.

Звідси $g_n=\sum_{i=0}^{n}b_i E_{n-i}^{(\alpha_1-1)}$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ $g_0=b_0E_0^{(\alpha_1-1)}>0$, $g_n=\sum_{i=0}^{t}b_i E_{n-i}^{(\alpha_1-1)}\geq 0$ $\forall n>t$. Аналогічно $G_n=\sum_{i=0}^{t}b_i E_{n-i}^{(\alpha_1)}$ $\forall n>t$.

Відмітимо дві властивості біноміальних коефіцієнтів:

$$\frac{E_n^{(\alpha-1)}}{E_n^{(\alpha)}}=\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+n)}\to 0\ (n\to\infty), \tag{2.6}$$

$$\frac{E_{n-i}^{(\alpha)}}{E_n^{(\alpha)}}=\frac{(n-i+1)(n-i+2)\ldots n}{(\alpha+n-i+1)(\alpha+n-i+2)\ldots(\alpha+n)}\to 1\ (n\to\infty\ \forall i). \tag{2.7}$$

Враховуючи (2.6), (2.7) і те, що $B_t(1)=b_0+b_1+\ldots+b_t>0$, матимемо:

$$\frac{g_n}{G_n}=\frac{b_0E_n^{(\alpha_1-1)}+b_1E_{n-1}^{(\alpha_1-1)}+\ldots+b_tE_{n-t}^{(\alpha_1-1)}}{b_0E_n^{(\alpha_1)}+b_1E_{n-1}^{(\alpha_1)}+\ldots+b_tE_{n-t}^{(\alpha_1)}}=\frac{b_0\dfrac{E_n^{(\alpha_1-1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}+b_1\dfrac{E_{n-1}^{(\alpha_1-1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}+\ldots+b_t\dfrac{E_{n-t}^{(\alpha_1-1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}}{b_0+b_1\dfrac{E_{n-1}^{(\alpha_1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}+\ldots+b_t\dfrac{E_{n-t}^{(\alpha_1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}}\to$$

$$\to\frac{0}{b_0+b_1+\ldots+b_t}=0\ (n\to\infty),$$

тобто метод (W,g) регулярний.

Далі, позначивши $b=\max_{0\leq i\leq t}b_i>0$, дістанемо: $b_0E_n^{(\alpha_1)}\leq G_n\leq b\sum_{i=0}^{t}E_{n-i}^{(\alpha_1)}\Rightarrow$

$$0<b_0\leq\frac{G_n}{E_n^{(\alpha_1)}}\leq b\frac{E_n^{(\alpha_1)}+E_{n-1}^{(\alpha_1)}+\ldots+E_{n-t}^{(\alpha_1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}=b\left(1+\frac{E_{n-1}^{(\alpha_1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}+\ldots+\frac{E_{n-t}^{(\alpha_1)}}{E_n^{(\alpha_1)}}\right)\to b(t+1)$$

при $n\to\infty$, звідки випливає, що $G_n\asymp E_n^{(\alpha_1)}$.

Відомо, що $\lim_{n\to\infty}\dfrac{E_n^{(\alpha)}}{n^{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}>0$ $\forall\alpha\in\mathbb{N}$. Тому $G_n\asymp E_n^{(\alpha_1)}\asymp n^{\alpha_1}$.

Доведемо співвідношення $P_n\asymp G_n$. Нехай $D_\eta(z)=d_0+d_1z+\ldots+d_\eta z^\eta$. З побудови цього многочлена зрозуміло, що $D_{\eta}(1)=d_0+d_1+\ldots+d_{\eta}\neq 0$. Довизначимо послідовність (d_n) рівністю $d_n=0$ при $n>\eta$. Оскільки $G(z)=P(z)D_{\eta}(z)$, то $G_n=\sum_{k=0}^{\eta} d_k P_{n-k}$ $\forall n>\eta$. Згадаємо, що метод (W,p) регулярний, тобто задовольняє умову $\lim_{n\to\infty} p_n/P_n=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{n-k}/P_n=1$. Тоді для $n>\eta$

$$\frac{G_n}{P_n}=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{\eta} d_k P_{n-k}=d_0+d_1\frac{P_{n-1}}{P_n}+\ldots+d_{\eta}\frac{P_{n-\eta}}{P_n}\to d_0+d_1+\ldots+d_{\eta}>0 \ \ (n\to\infty).$$

Звідси дістаємо $P_n \asymp G_n$. □

Наступна лема 12 належить М. М. Білоцькому [79]. Ми доповнюємо її випадком $\alpha_1=0$ і тому подаємо з доведенням. Використана вона буде аж у пункті 2.6.1.

Лема 12. *Нехай* $g(z)$, $B_t(z)$, $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$ *– з леми* 11, $m_{k+1}\geq n_k>m_k\uparrow\infty$,

$$h_k=\left[\frac{n_k-m_k-t}{\alpha_1}\right]>0 \textit{ при } \alpha_1>0,\ (h_k=1 \textit{ і } n_k-m_k\geq t\ \ \forall k) \textit{ при } \alpha_1=0,$$

$$R_{\alpha_1 h_k}(z)=(1-z^{h_k})^{\alpha_1}=\sum_{i=0}^{\alpha_1 h_k}\delta_i(h_k)z^i \ \ \textit{і} \ \ \sum_{j=0}^{\infty}a_{k,j}z^j=R_{\alpha_1 h_k}(z)g(z) \ \ \forall k\in\mathbb{N},$$

де через $[x]$ *позначено цілу частину числа* $x\in\mathbb{R}$. *Тоді*

1) $a_{k,j}\geq 0$ $\forall j,\ k$; 2) $a_{k,j}=0$, *коли* $j>\alpha_1(h_k-1)+t$;

3) $\sum_{j=0}^{n_k-m_k} a_{k,j}=h_k^{\alpha_1}B_t(1)>0$ $\forall k$; 4) $n_k-nh_k\geq m_k$ $\forall n\in\overline{0,\alpha_1}$ $\forall k$.

□ За означенням многочлена $R_{\alpha_1 h_k}(z)$ маємо:

$$R_{\alpha_1 h_k}(z)=(1-z^{h_k})^{\alpha_1}=\sum_{n=0}^{\alpha_1}(-1)^n\binom{\alpha_1}{n}z^{h_k n}=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i(h_k)z^i \Rightarrow$$

$$\delta_i(h_k)=\begin{cases} 0, & \text{коли } i\neq nh_k\ \forall n\in\overline{0,\alpha_1}, \\ (-1)^n\binom{\alpha_1}{n}, & \text{коли } i=nh_k \text{ для деякого } n\in\overline{0,\alpha_1}. \end{cases}$$

Далі, враховуючи означення $g(z)$, маємо:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} z^j = R_{\alpha_1 h_k}(z) g(z) = \frac{R_{\alpha_1 h_k}(z) B_t(z)}{(1-z)^{\alpha_1}} = \left(\frac{1-z^{h_k}}{1-z}\right)^{\alpha_1} B_t(z) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\alpha_1(h_k-1)} r_i z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{t} b_i z^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i\right),$$

де $r_i = 0 \;\; \forall i > \alpha_1(h_k - 1)$, $b_i = 0 \;\; \forall i > t$. Звідси випливає, що

$$a_{k,j} = \sum_{i=0}^{j} r_i b_{j-i} \geq 0 \;\; \forall j \in \mathbb{N}_0,\; a_{k,j} = \sum_{i=0}^{\alpha_1(h_k-1)} r_i b_{j-i} = r_0 b_j + r_1 b_{j-1} + \ldots + r_{\alpha_1(h_k-1)} b_{j-\alpha_1(h_k-1)}$$

$\forall j \geq \alpha_1(h_k - 1) \Rightarrow \; a_{k,j} = 0$, коли $j - \alpha_1(h_k - 1) > t$, або $j > \alpha_1(h_k - 1) + t$.

Таким чином, твердження 1) і 2) леми 12 правильні.

З проведених міркувань зрозуміло, що $\sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} = h_k^{\alpha_1} B_t(1)$. З іншого боку, при $\alpha_1 = 0$ за умовою леми зразу $n_k - m_k \geq t$. Якщо ж $\alpha_1 \neq 0$, то

$$\alpha_1(h_k - 1) + t = \alpha_1\big(\left[(n_k - m_k - t)/\alpha_1\right] - 1\big) + t \leq n_k - m_k - t - \alpha_1 + t = n_k - m_k .$$

Отже, якщо $j > n_k - m_k$, то $a_{k,j} = 0$, а $\sum_{j=0}^{n_k - m_k} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} = h_k^{\alpha_1} B_t(1) > 0$. Цим доведено твердження 3) леми 12. Твердження 4) очевидне. □

Лема 13. *Нехай* (S_n) – L*-значна послідовність,* $(a_{n,k})$ – *числова матриця,* $\beta \in \mathbb{N}_0$, $T_n = \sum_{k=n-\beta}^{n} a_{n,n-k} S_k \;\; \forall n \geq \beta$, *причому* $\left|a_{n,n-k}\right| \leq H \;\; \forall k \in \overline{n-\beta, n} \;\; \forall n \geq \beta$. *Тоді якщо* $S_n = o(1) \; \big(= O(1)\big) \; ((1,\sigma)^*\text{-st})$, *то і* $T_n = o(1) \; \big(= O(1)\big) \; ((1,\sigma)^*\text{-st})$.

□ Нехай U – довільний абсолютно опуклий окіл нуля. При доведенні рівності $T_n = o(1) \; ((1,\sigma)^*\text{-st})$ візьмемо $\varepsilon > 0$ довільним, а при доведенні рівності $T_n = O(1) \; ((1,\sigma)^*\text{-st})$ число $\varepsilon > 0$ візьмемо з умови $S_n = O(1) \; ((1,\sigma)^*\text{-st})$.

Якщо при деякому $k \geq \beta$ одночасно $S_{k-\beta} \in \varepsilon U$, $S_{k-\beta+1} \in \varepsilon U$, …, $S_k \in \varepsilon U$, то

$$T_k = a_{k,\beta} S_{k-\beta} + a_{k,\beta-1} S_{k-\beta+1} + \ldots + a_{k,0} S_k \in (a_{k,\beta} + a_{k,\beta-1} + \ldots + a_{k,0}) \varepsilon U =$$

$$= (\left|a_{k,\beta}\right| + \left|a_{k,\beta-1}\right| + \ldots + \left|a_{k,0}\right|) \varepsilon U \subset (\beta + 1) H \varepsilon U ,$$

в силу абсолютної опуклості множини U (див. лему 1 [49, с. 16]). Покладемо

$M=(\beta+1)H$. Позначимо $\forall n\in\mathbb{N}$ через ν_n кількість номерів $k\le n$ таких, що $S_k\notin\frac{\varepsilon}{M}U$, а через $k_1<k_2<\ldots<k_{\nu_n}$ – самі ці номери, якщо $\nu_n>0$.

За умовою

$$\frac{\sigma_n}{n+1}\sum_{k\le n:\,S_k\notin\frac{\varepsilon}{M}U}1\to 0\ \ (n\to\infty)\ \Leftrightarrow\ \frac{\sigma_n}{n+1}\nu_n\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Для кожного $n\in\mathbb{N}_0$ якщо $\nu_n>0$, то викинемо з відрізка $\overline{0,n}$ відрізки $\Delta_j=\overline{k_j,k_j+\beta}$ $\forall j\in\overline{1,\nu_n}$. Загальна кількість викинутих номерів не перевищує $(\beta+1)\nu_n$. При цьому, якщо $k\ge\beta$ – який-небудь з тих номерів, що залишилися в $\overline{0,n}$ після викидання відрізків Δ_j, $j\in\overline{1,\nu_n}$, то одночасно виконуються співвідношення: $S_{k-\beta}\in\frac{\varepsilon}{M}U$, $S_{k-\beta+1}\in\frac{\varepsilon}{M}U$, …, $S_k\in\frac{\varepsilon}{M}U$, з яких випливає, що $T_k\in\varepsilon U$. Тому

$$\frac{\sigma_n}{n+1}\sum_{\beta\le k\le n:\,T_k\notin\varepsilon U}1^k\le\frac{\sigma_n}{n+1}\sum_{\beta\le k\le n:\,k\in\bigcup_{j=1}^{\nu_n}\Delta_j}1^k\le$$

$$\le\frac{\sigma_n}{n+1}(\beta+1)\nu_n\to 0\ \ (n\to\infty)\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_n}{n+1}\sum_{k\le n:\,T_k\notin\varepsilon U}1^k\to 0\ \ (n\to\infty),$$

бо $\sigma_n/(n+1)\to 0\ \ (n\to\infty)$. Це і означає, що $T_n=o(1)\ ((1,\sigma)^*\text{-st})$, коли $\varepsilon>0$ довільне, і $T_n=O(1)\ ((1,\sigma)^*\text{-st})$, коли $\varepsilon>0$ фіксоване. □

2.3.2. *D*-властивість методів Вороного класу W_Q. Основними результатами підрозділу 2.3 є наступні теореми 10 і 11, які можна назвати *D*-властивостями відповідних методів Вороного.

Для спрощення доведень скористаємося, слідом за М. М. Білоцьким [79], операцією *згортки* $(x*y)_n=\sum_{i=0}^{n}x_{n-i}y_i$ послідовностей $x=(x_n)$ та $y=(y_n)$, одна з яких числова, а друга L-значна або обидві числові. Згортка має ряд властивостей: 1) $x*y=y*x$; 2) $(x*y)*z=x*(y*z)$; 3) існування нейтрального елемента $E = (1,0,0,\ldots)$ такого, що $x * E = x$. У сполучній властивості x, y – числові послідовності, а z – L-значна або числова послідовність.

Теорема 10. *Нехай* (W, g) *– метод Вороного з твірною функцією* (2.5). *Тоді якщо* $z = \theta$ $(z = \infty)$ *є* $D(1, \mu^{(\alpha_1)}, \sigma)$*-точкою послідовності* (S_n), *то* $z = \theta$ $(z = \infty)$ *є* $D(1, \lambda, \sigma)$*-точкою середніх Вороного* $(W_n^{(g)})$ *послідовності* (S_n).

□ Нехай $B_t(z) = b_t z^t + b_{t-1} z^{t-1} + \ldots + b_0$, де $b_i \geq 0$, $b_t > 0$, $b_0 > 0$, – многочлен з рівності (2.5). Покладемо $b_i = 0$ $\forall i > t$. Запишемо рівності $W_n^{(g)} = \frac{1}{G_n} \sum_{k=0}^{n} g_{n-k} S_k$ і $\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \frac{B_t(z)}{(1-z)^{\alpha_1}}$ у вигляді згорток: $W^{(g)} = \frac{1}{G}(g * S)$ і $g = b * E^{(\alpha_1 - 1)}$, відповідно, де $E_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{\alpha}$ – коефіцієнти розкладу бінома $(1-z)^{-\alpha-1}$. За властивостями асоціативності і комутативності згортки маємо:

$$W^{(g)} = \frac{1}{G}((b * E^{(\alpha_1 - 1)}) * S) = \frac{1}{G}(E^{(\alpha_1 - 1)} * (b * S)) = \frac{E^{(\alpha_1)}}{G} \cdot \frac{1}{E^{(\alpha_1)}}(E^{(\alpha_1 - 1)} * T),$$

де $T = b * S$, тобто $T_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} S_k = \sum_{k=n-t}^{n} b_{n-k} S_k$ при $n \geq t$.

Припустимо, що $z = \theta$ $(z = \infty)$ є $D(1, \mu^{(\alpha_1)}, \sigma)$-точкою послідовності (S_n). Це означає, що існують: абсолютно опуклий окіл нуля U, послідовності (m_k), (n_k), (φ_k), (a_k): $m_{k+1} \geq n_k > m_k \uparrow \infty$, $\varphi_k \in L^*$, $a_k \geq 0$, $\varliminf_{k \to \infty} \sigma_{m_k}(1 - m_k / n_k) > 0$, причому $\exists \varepsilon > 0$: $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists k_0$: $\varphi_k(\varepsilon U) < a_k \leq \varphi_k(\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} S_n)$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k > k_0$. За зауваженням 2 пункту 2.1.3 $n_k - m_k \to \infty$, тому вважаємо $n_k - m_k > t$ $\forall k$.

Розглянемо спочатку послідовність (T_n), а саме

$$\varphi_k(\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} T_n) = \varphi_k(\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} \sum_{i=n-t}^{n} b_{n-i} S_i) = \sum_{i=n-t}^{n} b_{n-i} \varphi_k(\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} S_i) \geq \sum_{i=n-t}^{n} b_{n-i} a_k \geq b_0 a_k$$

$\forall n \in \overline{m_k + t, n_k}$ $\forall k > k_0$. Разом з цим $\varphi_k(b_0 \varepsilon U) < b_0 a_k$ $\forall k > k_0$. Звідси випливає, що $z = \theta$ $(z = \infty)$ є $D(1, \mu^{(\alpha_1)}, \sigma)$-точкою (T_n).

За наслідком з теореми Т8 пункту 2.1.1 $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(1,\lambda,\sigma)$-точкою послідовності $\tilde{C}^{(\alpha_1)}=(E^{(\alpha_1-1)}*T)/E^{(\alpha_1)}$, тобто середніх Чезаро $(\tilde{C}_n^{(\alpha_1)})$ порядку $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$ від послідовності (T_n). Оскільки $W_n^{(g)}=(E_n^{(\alpha_1)}/G_n)\cdot\tilde{C}_n^{(\alpha_1)}$ і за лемою 11 $G_n\asymp E_n^{(\alpha_1)}$, то $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(1,\lambda,\sigma)$-точкою і послідовності $(W_n^{(g)})$. □

Теорема 11. *Нехай* (W,p) *– метод Вороного з пункту* 1.1.5 *– має твірну функцію* $p(z)=p_l(z)/p_\alpha(z)$, *причому число* $z=1$ *є коренем многочлена* $p_\alpha(z)$ *кратності* $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$. *Тоді якщо* $z=\theta$ ($z=\infty$) *є* $D(1,\mu^{(\alpha_1)},\sigma)$*-точкою послідовності* (S_n), *то* $W_n^{(p)}\neq o(1)$ $\left(\neq O(1)\right)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$.

□ Нехай $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(1,\mu^{(\alpha_1)},\sigma)$-точкою послідовності (S_n). Припустимо що $W_n^{(p)}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$. Згідно з означенням (п. 2.2.1) це рівносильно тому, що $\lambda_n W_n^{(p)}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$.

За лемою 11 існує многочлен $D_\eta(z)=d_0+d_1z+\ldots+d_\eta z^\eta$ такий, що функція $g(z)=p(z)D_\eta(z)$ має вигляд (2.5). Довизначимо (d_n) рівністю $d_n=0$ $\forall n>\eta$. Тепер можемо записати:

$$W^{(g)}=\frac{1}{G}(g*S)=\frac{1}{G}((d*p)*S)=\frac{1}{G}(d*(p*S))=\frac{P}{G}\cdot\frac{1}{P}(d*PW^{(p)})\Rightarrow$$

$$\lambda_n W_n^{(g)}=\lambda_n\frac{P_n}{G_n}\cdot\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}d_{n-k}P_kW_k^{(p)}=\frac{P_n}{G_n}\sum_{k=n-\eta}^{n}d_{n-k}\frac{P_k}{P_n}\cdot\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\lambda_kW_k^{(p)}=\sum_{k=n-\eta}^{n}a_{n,n-k}\lambda_kW_k^{(p)},$$

де $a_{n,n-k}=P_n/G_n\cdot P_k/P_n\cdot\lambda_n/\lambda_k\cdot d_{n-k}$ $\forall k\in\overline{n-\eta,n}$ $\forall n\geq\eta$.

При цьому, оскільки $P_n\asymp G_n$ за лемою 11, $P_k\leq P_n$ при $k\leq n$, $\lambda_n/\lambda_k\leq c$ при $n-\eta\leq k\leq n$, то існує $H>0$: $\left|a_{n,n-k}\right|\leq H$ $\forall k\in\overline{n-\eta,n}$ $\forall n\geq\eta$. Тепер за лемою 13 виходить, що $\lambda_nW_n^{(g)}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, а це все одно що $W_n^{(g)}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$.

З іншого боку, за теоремою 10 точка $z=\theta$ ($z=\infty$) є $D(1,\lambda,\sigma)$-точкою послідовності $(W_n^{(g)})$. Дістаємо протиріччя з теоремою 6 пункту 2.2.2. □

Наслідок 15. *За умов теореми* 11 *якщо множина* $\bar{G}$ *є* (C)-*множиною комплексної послідовності* (S_n), *а* $W_n^{(p)} \to S$ $((1,1,1)\text{-st})$, *то* $S \in \bar{G}$.

□ Припустимо спочатку, що $S = 0$, тобто $W_n^{(p)} = o(1)$ $((1,1,1)\text{-st})$. Треба довести, що $0 \in \bar{G}$. Нехай це не так. Тоді оскільки множина $\bar{G}$ замкнена і опукла (див. пункт 2.1.1), то існують ε-околи нуля і множини $\bar{G}$, які не перетинаються, скажімо, $\bar{O}_\varepsilon \bigcap \bar{G}_\varepsilon = \varnothing$. За означенням (C)-множини існують послідовності (m_k) і (n_k): $m_{k+1} \ge n_k > m_k \uparrow \infty$, $\underline{\lim}_{k\to\infty} \dfrac{n_k}{m_k} > 1$, $S_n \in \bar{G}_\varepsilon$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Розділимо опуклі множини $\bar{O}_\varepsilon$ і $\bar{G}_\varepsilon$ прямою l так, щоб вони лежали в різних півплощинах. Позначимо через θ кут нахилу вектора нормалі прямої l до осі $\operatorname{Re} z$. В результаті дістанемо, що $\operatorname{Re} e^{-i\theta} S_n \ge \varepsilon$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Це означає, що $z = 0$ є $D(1,1,1)$-точкою послідовності (S_n). Оскільки $\lambda_n \equiv \sigma_n \equiv 1$, то $\mu_n^{(\alpha)} \equiv 1$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0$. Отже, за теоремою 11 $W_n^{(g)} \ne o(1)$ $((1,1,1)\text{-st})$. Дістали протиріччя, яке означає, що $0 \in \bar{G}$.

Випадок довільного $S \in \mathbb{C}$ приводиться до вже доведеного переходом до послідовності $(S_n - S)$. □

2.3.3. Тауберові теореми із залишком для методів Вороного класу W_Q.

Теорема 12. *Нехай метод Вороного* (W, p) *та число* $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ – *з теореми* 11, $n_k \uparrow \infty$ *і виконується принаймні одна з тауберових умов* 1) – 14) *пункту* 2.1.4, *де* $\mu_n \equiv \mu_n^{(\alpha_1)}$ *і* $p_n \equiv 1$. *Тоді*

I) *якщо* $W_n^{(p)} = O(1)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu_{n_k}^{(\alpha_1)} S_{n_k} = O(1)$ $(k \to \infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13) *з* $r = 0$ *або* 14) *і* $W_n^{(p)} = o(1)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu_{n_k}^{(\alpha_1)} S_{n_k} \overset{C}{=} o(1)$, *тобто слабо збігається до нуля*;

III) *якщо в* 1) $G = \{\theta\}$, *у* 2), 5) – 8) *і* 13) $r = 0$, *у* 13) *і* 14) *простір* L *обмежено компактний* і $W_n^{(p)} \to a \in L$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $S_{n_k} = a + o(1/\mu_{n_k}^{(\alpha_1)})$ $(k \to \infty)$.

□ Теорема 12 є простим наслідком лем 7, 8 і теореми 11. □

Сформулюємо декілька наслідків з теореми 12 для простору $L=\mathbb{R}$. Використаємо тауберові умови 3) і 4).

Наслідок 16. *Нехай метод Вороного* (W,p) *та число* $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$ *– з теореми* 11, $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\in\mathbb{R}$, $n_k\uparrow\infty$ *і виконується одна з умов*: ($\mu_n^{(\alpha_1)}a_n=O_L(\sigma_n/n)$, *коли* $l_k\le n\le m_k$ $\forall k>k_0$, *де* $l_k<n_k<m_k$, *і* $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_{\nu=l_k}^{n_k}\sigma_\nu/\nu>0$ *та* $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_{\nu=n_k}^{m_k}\sigma_\nu/\nu>0$) *або* ($\mu_n^{(\alpha_1)}a_n=O(\sigma_n/n)$, *коли* $n_k\le n\le\nu_k$ *або* $\nu_k\le n\le n_k$, $k>k_0$, *причому відповідно* $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_{\nu=n_k}^{\nu_k}\sigma_\nu/\nu>0$ *або* $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_{\nu=\nu_k}^{n_k}\sigma_\nu/\nu>0$). *Тоді з рівності* $W_n^{(p)}=O(1)\ \left(=o(1)\right)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$ *випливає рівність* $\mu_{n_k}^{(\alpha_1)}S_{n_k}=O(1)\ \left(=o(1)\right)\ (k\to\infty)$.

Наслідок 17. *Нехай у наслідку* 16 $a_n=O_L(\ln n/n)$ *або* $a_n=O(\ln n/n)$, *коли* n *задовольняє вказані вище нерівності. Тоді якщо* $\exists\beta>0$: $W_n^{(p)}=O(1)\ \left(=o(1)\right)$ $((1,n^{\beta},\ln^2 n)^*\text{-st})$, *то* $S_{n_k}\ln n_k=O(1)\ \left(=o(1)\right)\ (k\to\infty)$.

□ Покладемо в наслідку 16 $\sigma_n\equiv\ln^2 n$, $\lambda_n=\ln^{1+2\alpha_1}n$. Тоді $\mu_n^{(\alpha_1)}\equiv\ln n$, Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{1+2\alpha_1}n}{n^{\beta}}=0$, то з рівності $n^{\beta}W_n^{(p)}=O(1)\ \left(=o(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$ випливає рівність $\lambda_n W_n^{(p)}=O(1)\ \left(=o(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, а тому наслідок 17 випливає з наслідку 16. □

Наслідок 18. *Нехай в умовах наслідку* 16 $\lambda_n\equiv\sigma_n^{\alpha_1+1}$, *тобто* $a_n=O_L(1/n)$ *або* $a_n=O(1/n)$, *коли* n *задовольняє вказані там нерівності. Тоді якщо* $W_n^{(p)}=O(1)\ \left(=o(1)\right)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\lambda_{n_k}^{\frac{1}{\alpha_1+1}}S_{n_k}=O(1)\ \left(=o(1)\right)\ (k\to\infty)$.

З теореми 11 і лем 9 та 10 випливає також наступна теорема.

Теорема 13. *Нехай метод Вороного* (W,p) *та число* α_1 *– з теореми* 11 *і виконується принаймні одна з тауберових умов* 1*) –14*), 10) – 12) *пункту* 2.1.4, *в яких* $\mu_n \equiv \mu_n^{(\alpha_1)}$ *і* $p_n \equiv 1$. *Тоді*

I) *якщо* $W_n^{(p)} = O(1)\ ((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu_n^{(\alpha_1)} S_n = O(1)\ \ (n \to \infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13*) *з* $r = 0$ *або* 14*) *і* $W_n^{(p)} = o(1)\ \ ((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu_n^{(\alpha_1)} S_n \overset{C}{=} o(1)\ \ (n \to \infty)$;

III) *якщо в* 1) $G = \{\theta\}$, *у* 2*), 5*) – 8*) *і* 13*) $r = 0$, *у* 13*) *і* 14*) *простір* L *обмежено компактний* і $W_n^{(p)} \to a \in L\ \ ((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $S_n = a + o(1/\mu_n^{(\alpha_1)})\ \ (n \to \infty)$.

Наслідок 15 з теореми 11 узагальнює на випадок статистичної збіжності середніх основну теорему роботи Л. Ф. Таргонського [59], тобто (*c*)-властивість поліноміальних методів Вороного, а разом з нею і теорему М. О. Давидова М7 пункту 2.1.1.

Теореми 10 – 13 в цілому підсилюють результати Л. Ф. Таргонського та М. О. Давидова за рахунок: 1) введення ваг (λ_n) і (σ_n); 2) заміни звичайної збіжності та обмеженості середніх статистичною; 3) *D*-властивості у формі Г. О. Михаліна, що є загальнішою, ніж у М. О. Давидова; 4) переходу від числових послідовностей (S_n) до L-значних.

Наслідок 16 містить у собі теореми Дж. Фрайді й М. Хана Т9, Т10 пункту 2.1.1 у випадку, коли $\lambda_n \equiv \sigma_n \equiv p_n \equiv \alpha_1 = 1$, $n_k \equiv k$.

2.4. $D(p,\mu,\sigma)$-точки подвійної послідовності

2.4.1. Поняття $D(p,\mu,\sigma)$-точок подвійної послідовності.

Нехай

$$p'_n \ge 0,\ p''_n \ge 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ 0 < P'_n = \sum_{k=0}^{n} p'_k \to \infty \text{ і } 0 < P''_n = \sum_{k=0}^{n} p''_k \to \infty\ \ (n \to \infty),$$

а додатні послідовності (μ'_n), (μ''_n), (σ'_n) і (σ''_n) задовольняють умови:

$$\mu'_m \asymp \mu'_n,\ \sigma'_m \asymp \sigma'_n \text{ при } P'_m \asymp P'_n, \tag{2.8}$$

$$\mu''_m \asymp \mu''_n,\ \sigma''_m \asymp \sigma''_n \text{ при } P''_m \asymp P''_n, \tag{2.9}$$

$$\sigma'_n \ge \gamma > 0,\ \sigma''_n \ge \gamma\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.10}$$

$$\sigma'_n p'_n / P'_n \to 0,\ \sigma''_n p''_n / P''_n \to 0\ \ (n \to \infty). \tag{2.11}$$

Позначимо $p_{m,n}=p'_m p''_n$, $P_{m,n}=P'_m P''_n$, $\mu_{m,n}=\mu'_m\mu''_n$, $\sigma_{m,n}=\sigma'_m\sigma''_n$ $\forall m,n\in\mathbb{N}_0$.

Точку $z=\theta$ (точку $z=\infty$) назвемо $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* послідовності $(S_{m,n})$, якщо існують послідовності номерів m_k, m_k^*, n_k, $n_k^*\in\mathbb{N}$, функціоналів $\varphi_k\in L^*$, чисел $a_k\ge 0$ і абсолютно опуклий окіл нуля U такі, що $m_{k+1}\ge m_k^*>m_k\uparrow\infty$, $n_{k+1}\ge n_k^*>n_k\uparrow\infty$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu>0$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_k^*}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu>0$, причому $\exists\varepsilon>0$: $(\forall\varepsilon>0)$ $\exists k_0$: $\varphi_k(\varepsilon U)<a_k\le\varphi_k(\mu_{m_k,n_k}S_{m,n})$ $\forall(m,n)\in\overline{m_k,m_k^*}\times\overline{n_k,n_k^*}$ $\forall k>k_0$.

Для комплекснозначної послідовності $(S_{m,n})$ це означення рівносильне наступному означенню, що введене у роботі [2].

Точка $z=\theta$ (точка $z=\infty$) називається $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* комплексної послідовності $(S_{m,n})$, якщо $\exists(m_k)$, (m_k^*), (n_k), (n_k^*) і (θ_k): $m_{k+1}\ge m_k^*>m_k\uparrow\infty$, $n_{k+1}\ge$ $\ge n_k^*>n_k\uparrow\infty$, $\theta_k\in(-\pi;\pi]$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu>0$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_k^*}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu>0$, причому

$$\lim_{k\to\infty}\min_{\substack{m_k\le m\le m_k^*\\ n_k\le n\le n_k^*}}\operatorname{Re}e^{i\theta_k}\mu_{m_k,n_k}S_{m,n}=\omega>0\ \ (\omega=+\infty).$$

Зауваження. 1. Якщо точка $z=\infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою послідовності $(S_{m,n})$, то і $z=\theta$ теж, але не навпаки.

2. $\lim\limits_{k\to\infty}(m_k^*-m_k)=+\infty$ і $\lim\limits_{k\to\infty}(n_k^*-n_k)=+\infty$.

3. Можна вважати, що $P'_{m_k^*}/P'_{m_k}\le 2$ і $P''_{n_k^*}/P''_{n_k}\le 2$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

4. У другому означенні у випадку дійсної послідовності $(S_{m,n})$ можна вважати $\theta_k\equiv 0$ або $\theta_k\equiv\pi$.

5. У загальному означенні замість нерівності $\varphi_k(\mu_{m_k,n_k}S_{m,n})\ge a_k$ можна брати нерівність $\varphi_k(\mu_{\bar m_k,\bar n_k}S_{m,n})\ge a_k$, де $(\bar m_k)$ і $(\bar n_k)$ – фіксовані послідовності такі, що $m_k\le\bar m_k\le m_k^*$, $n_k\le\bar n_k\le n_k^*$ $\forall k$.

6. Замість нерівностей $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu>0$ і $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_k^*}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu>0$ можна вимагати нерівності $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sigma'_{\bar m_k}(1-P'_{m_k}/P'_{m_k^*})>0$ і $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sigma''_{\bar n_k}(1-P''_{n_k}/P''_{n_k^*})>0$ відповідно, де $(\bar m_k)$ і $(\bar n_k)$ – фіксовані послідовності такі, що $m_k\le\bar m_k\le m_k^*$, $n_k\le\bar n_k\le n_k^*$.

7. Якщо точка $z=\infty$ є $(\bar R, p', p'')$-точкою числової послідовності $(S_{m,n})$ [6], то вона є $D(p,1,1)$-точкою $(S_{m,n})$, а якщо замкнена опукла множина $\bar G$ не містить точку $z=0$ і є $(\bar R, p', p'')$-множиною послідовності $(S_{m,n})$, то точка $z=0$ є $D(p,1,1)$-точкою послідовності $(S_{m,n})$.

2.4.2. Ознаки $D(p,\mu,\sigma)$-точок подвійної послідовності. Тауберові умови, сформульовані в пункті 2.1.4, допускають перенесення на подвійні послідовності. Для числових послідовностей подібні умови вже наводилися багатьма авторами (М. О. Калаталова, М. Ф. Бурляй, В. Г. Челідзе, Г. О. Михалін і В. М. Алданов та ін.). Для L-значних послідовностей ці умови формулюватимуться вперше. Скрізь далі $m_k\uparrow\infty$ і $n_k\uparrow\infty$ – задані фіксовані послідовності натуральних чисел.

1) Існує обмежена множина $G\subset L$: $\theta\in G$ і для будь-якого абсолютно опуклого околу $U(G)$ множини G існують $(\bar m_k)$, $(\bar n_k)$ і $\delta>0$ такі, що $\mu_{m_k,n_k}(S_{m,n}-S_{m_k,n_k})\in U(G)$ принаймні в одному з випадків а) – г):

   а) $\forall(m,n)\in\overline{\bar m_k, m_k}\times\overline{\bar n_k, n_k}$, де $\sum\limits_{\nu=\bar m_k+1}^{m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=\bar n_k+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$, $\forall k>k_0$;

   б) $\forall(m,n)\in\overline{m_k,\bar m_k}\times\overline{\bar n_k, n_k}$, де $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\bar m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=\bar n_k+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$, $\forall k>k_0$;

   в) $\forall(m,n)\in\overline{\bar m_k, m_k}\times\overline{n_k,\bar n_k}$, де $\sum\limits_{\nu=\bar m_k+1}^{m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\bar n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$, $\forall k>k_0$;

   г) $\forall(m,n)\in\overline{m_k,\bar m_k}\times\overline{n_k,\bar n_k}$, де $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\bar m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\bar n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$, $\forall k>k_0$.

2) $\exists r\ge0$, $t_k\in L$: $t_k=O(1)$, $\mu_{m_k,n_k}S_{m_k,n_k}=b_k^*t_k$, $b_k^*\in\mathbb{R}$, і $\forall\varepsilon>0$ $\exists(\bar m_k)$, $(\tilde m_k)$, $(\bar n_k)$, $(\tilde n_k)$, $k_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$: $\sum\limits_{\nu=\bar m_k+1}^{m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\tilde m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$, $\sum\limits_{\nu=\bar n_k+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$,

$\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\tilde{n}_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta \quad \forall k > k_0$ і при цьому мають місце такі співвідношення: $\mu_{m_k,n_k}(S_{m,n} - S_{m_k,n_k}) = b^{(1)}_{m,n,k} t_k$, де $b^{(1)}_{m,n,k} \ge -r - \varepsilon$, і $\mu_{m,n}(S_{m_k,n_k} - S_{m,n}) = b^{(2)}_{m,n,k} t_k$, де $b^{(2)}_{m,n,k} \ge -r - \varepsilon$, кожне хоча б в одному з випадків а) – г):

а) $\forall (m,n) \in \overline{\bar{m}_k, m_k} \times \overline{\bar{n}_k, n_k} \quad \forall k > k_0$; б) $\forall (m,n) \in \overline{m_k, \tilde{m}_k} \times \overline{\bar{n}_k, n_k} \quad \forall k > k_0$;

в) $\forall (m,n) \in \overline{\bar{m}_k, m_k} \times \overline{n_k, \tilde{n}_k} \quad \forall k > k_0$; г) $\forall (m,n) \in \overline{m_k, \tilde{m}_k} \times \overline{n_k, \tilde{n}_k} \quad \forall k > k_0$.

Наступна умова 3) гарантує виконання умови 1) з множиною $G = \{\theta\}$.

3) $\exists \delta > 0$, $(\bar{m}_k)$, $(\bar{n}_k)$ і $k_0 \in \mathbb{N}$ такі, що співвідношення $\mu'_m(S_{m,n} - S_{m-1,n}) = {}$ $= O(\sigma'_m p'_m / P'_m)$ і $\mu''_n(S_{m,n} - S_{m,n-1}) = O(\sigma''_n p''_n / P''_n)$ виконуються разом хоча б в одному з випадків а) – г) тих, що і в умові 1).

Умова 2)-г)-а) з числом $r = 0$ є наслідком з наступної умови

4) $\exists r > 0$, $t_k \in L$, $\delta > 0$, $(\bar{m}_k)$, $(\tilde{m}_k)$, $(\bar{n}_k)$, $(\tilde{n}_k)$ і $k_0 \in \mathbb{N}$: $t_k = O(1)$, $\mu_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} = {}$ $= b^*_k t_k$, $b^*_k \in \mathbb{R}$, $\mu'_m(S_{m,n} - S_{m-1,n}) = b^{(1)}_{m,n,k} \dfrac{\sigma'_m p'_m}{P'_m} t_k$, $\mu''_n(S_{m,n} - S_{m,n-1}) = b^{(2)}_{m,n,k} \dfrac{\sigma''_n p''_n}{P''_n} t_k$, $b^{(1)}_{m,n,k} \ge -r$, $b^{(2)}_{m,n,k} \ge -r \quad \forall (m,n) \in \overline{\bar{m}_k, \tilde{m}_k} \times \overline{\bar{n}_k, \tilde{n}_k} \quad \forall k > k_0$, причому $\bar{m}_k < m_k < \tilde{m}_k$, $\bar{n}_k < n_k < \tilde{n}_k$, $\sum\limits_{\nu=\bar{m}_k+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\tilde{m}_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta$, $\sum\limits_{\nu=\bar{n}_k+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\tilde{n}_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta \quad \forall k > k_0$.

Частинним випадком умови 1) у нормованому просторі L, коли $G = \{x \in L : \|x\| \le r\}$, є умова

5) $\exists r \ge 0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (\bar{m}_k)$, $(\bar{n}_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{m_k,n_k} \left\| S_{m,n} - S_{m_k,n_k} \right\| \le r + \varepsilon$ принаймні в одному з випадків а) – г) умови 1).

Умова 5) рівносильна умові

6) $\exists r \ge 0$: $\overline{\lim}\, \mu_{m_k,n_k} \left\| S_{m,n} - S_{m_k,n_k} \right\| = r$, коли має місце один з випадків а) – г):

а) $m > m_k \to \infty$, $n > n_k \to \infty$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \to 0$;

б) $m_k > m \to \infty$, $n > n_k \to \infty$, $\sum\limits_{\nu=m+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \to 0$;

в) $m > m_k \to \infty$, $n_k > n \to \infty$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \to 0$;

г) $m_k > m \to \infty$, $n_k > n \to \infty$, $\sum\limits_{\nu=m+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \to 0$.

Частинним випадком умови 2) у просторі $L = \mathbb{R}$, коли $t_k \equiv 1$ або $t_k \equiv -1$, є умова

7) $\exists r \geq 0$ і $\beta \in \{0,1\}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (\bar{m}_k)$, $(\tilde{m}_k)$, $(\bar{n}_k)$, $(\tilde{n}_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ такі, що нерівності $(-1)^\beta \mu_{m_k,n_k}(S_{m,n} - S_{m_k,n_k}) \geq -r - \varepsilon$ і $(-1)^\beta \mu_{m,n}(S_{m_k,n_k} - S_{m,n}) \geq -r - \varepsilon$ виконуються незалежно одна від одної кожна хоча б в одному з випадків а) – г) умови 2), причому $\sum\limits_{\nu=\bar{m}_k+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\tilde{m}_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum\limits_{\nu=\bar{n}_k+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{\tilde{n}_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$ $\forall k > k_0$.

Умова 7) рівносильна умові

8) $\exists r \geq 0$ і $\beta \in \{0,1\}$ такі, що нерівності $\underline{\lim} (-1)^\beta \mu_{m_k,n_k}(S_{m,n} - S_{m_k,n_k}) \geq -r$ і $\underline{\lim} (-1)^\beta \mu_{m,n}(S_{m_k,n_k} - S_{m,n}) \geq -r$ виконуються незалежно одна від одної кожна хоч в одному з випадків а) – г) умови 6).

Окремим випадком умови 3) є умова

9) $S_{m,n} = S_{i,j}$ $\forall (m,n),(i,j) \in \overline{m_k, m_k^*} \times \overline{n_k, n_k^*}$, причому $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta > 0$ і $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_k^*} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Жорсткішою за умову 9) є наступна умова

10) $S_{m,n}=S_{i,j}\ \ \forall(m,n),(i,j)\in\left(\overline{m_k+1,m_{k+1}}\times\overline{0,n_{k+1}}\right)\bigcup\left(\overline{0,m_{k+1}}\times\overline{n_k+1,n_{k+1}}\right)$, причому

$$\sum_{\nu=m_k+1}^{m_{k+1}}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta>0 \text{ і } \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

У нормованому просторі L умова 6) з $r=0$ випливає з наступної умови

11) $S_{m,n}=S_{i,j}\ \ \forall(m,n),(i,j)\in\left(\overline{m_k+1,m_{k+1}}\times\overline{0,n_{k+1}}\right)\bigcup\left(\overline{0,m_{k+1}}\times\overline{n_k+1,n_{k+1}}\right)\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, а

$$\mu_{m_k,n_k}(S_{m_k,n_k}-S_{m_{k-1},n_k})=O\left(\sum_{\nu=m_{k-1}+1}^{m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\right) \text{ і }$$

$$\mu_{m_k,n_k}(S_{m_k,n_k}-S_{m_k,n_{k-1}})=O\left(\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\right).$$

У випадку $L=\mathbb{R}$ умова 8) з $r=\beta=0$ випливатиме з наступної умови

12) $S_{m,n}=S_{i,j}\ \ \forall(m,n),(i,j)\in\left(\overline{m_k+1,m_{k+1}}\times\overline{0,n_{k+1}}\right)\bigcup\left(\overline{0,m_{k+1}}\times\overline{n_k+1,n_{k+1}}\right)\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, а

$$\mu_{m_k,n_k}(S_{m_k,n_k}-S_{m_{k-1},n_k})\ge -H\sum_{\nu=m_{k-1}+1}^{m_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu \text{ і }$$

$$\mu_{m_k,n_k}(S_{m_k,n_k}-S_{m_k,n_{k-1}})\ge -H\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Випишемо зв'язки між наведеними умовами у вигляді окремої леми.

Лема 14. *Мають місце наступні співвідношення між умовами* 1) – 12):

$$10)\Rightarrow 9)\Rightarrow 3)\Rightarrow 1)\ \textit{з}\ G=\{\theta\};\ 5)\Leftrightarrow 6)\Rightarrow 1);\ 11)\Rightarrow 6)\ \textit{з}\ r=0\Rightarrow 1)\ \textit{з}\ G=\{\theta\};$$

$$4)\Rightarrow 2)\ \textit{з}\ r=0;\ 7)\Leftrightarrow 8)\Rightarrow 2);\ 12)\Rightarrow 8)\ \text{з}\ r=\beta=0.$$

□ Всі ці співвідношення доводяться так само, як їхні однократні аналоги в лемі 6 пункту 2.1.4. □

Наступна лема пов'язує подані вище умови 1) – 12) з $D(p,\mu,\sigma)$-точками.

Лема 15. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє принаймні одну з наведених вище умов* 1) – 12). *Тоді*

I) *якщо* $\mu_{m_k,n_k}S_{m_k,n_k}\ne O(1)$, *то* $z=\infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* $(S_{m,n})$;

II) *якщо в* 1) $G=\{\theta\}$, *у* 2), 4) – 8) $r=0$ *і при цьому* $\mu_{m_k,n_k}S_{m_k,n_k}\ne o(1)$, *то* $z=\theta$ *є*

$D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* $(S_{m,n})$.

□ В основі доведення леми 15 лежать ті ж самі ідеї, які ми детально розібрали при доведенні леми 7 пункту 2.1.4. Крім того, для числових послідовностей і умов 5), 7) лема 15 доведена В. М. Алдановим у роботі [1].

Проілюструємо специфіку роботи з подвійними послідовностями на прикладі умови 1). Нехай має місце умова 1). Припустимо, що $\mu_{m_k,n_k}S_{m_k,n_k}\neq O(1)$. Тоді існує абсолютно опуклий окіл нуля U і послідовності $k_i\uparrow\infty$, $r_i\uparrow\infty$: $\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m_{k_i},n_{k_i}}\notin r_iU\ \ \forall i\in\mathbb{N}$.

Оскільки множина G обмежена, то $\exists\lambda>0$: $G\subset\lambda U=U_1$. Множина U_1 є абсолютно опуклим околом множини G, тому за умовою 1) $\exists(\overline{m}_k)$, $(\overline{n}_k)$, $k_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$, для яких виконується принаймні один з випадків а) – г), наприклад, випадок б): $\mu_{m_k,n_k}(S_{m,n}-S_{m_k,n_k})\in U_1$, коли $(m,n)\in\overline{m_k,\overline{m}_k}\times\overline{\overline{n}_k,n_k}$ $\forall k>k_0$, і при цьому $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{\overline{m}_k}\sigma'_\nu p'_\nu/P'_\nu\ge\delta$ і $\sum\limits_{\nu=\overline{n}_k+1}^{n_k}\sigma''_\nu p''_\nu/P''_\nu\ge\delta$ $\forall k>k_0$. Шляхом переходу до підпослідовностей можна зробити послідовності (m_{k_i}), $(\overline{m}_{k_i})$, $(\overline{n}_{k_i})$ та (n_{k_i}) з точки зору впорядкованості такими, як (m_k), (m_k^*), (n_k) і (n_k^*), відповідно, в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точки.

Припустимо тепер, що $\lambda>1$, а $r_i\ge2\lambda$ $\forall i\in\mathbb{N}$. Тоді $U\subset U_1=\lambda U$, а $\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m_{k_i},n_{k_i}}\notin\frac{r_i}{\lambda}U_1$. Методом від супротивного легко показати, що $\frac{r_i}{2\lambda}U_1\cap$ $\cap(\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m_{k_i},n_{k_i}}+U_1)=\varnothing$ $\forall i$. За теоремою Хана – Банаха [50] $\forall i\in\mathbb{N}$ $\exists\varphi_i\in L^*$: $\varphi_i\left(\frac{r_i}{2\lambda}U_1\right)<a_i\le\varphi_i\left(\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m_{k_i},n_{k_i}}+U_1\right)$. Покажемо, що окіл нуля U_1, послідовності (φ_i) та (a_i) такі, як в означенні $D(p,\mu,\sigma)$-точки $z=\infty$.

За умовою 1) $\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m,n}\in\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m_{k_i},n_{k_i}}+U_1$ $\forall(m,n)\in\overline{m_{k_i},\overline{m}_{k_i}}\times\overline{\overline{n}_{k_i},n_{k_i}}=\Delta_i$ $\forall i$, тому $\varphi_i(\mu_{m_{k_i},n_{k_i}}S_{m,n})\ge a_i$ $\forall(m,n)\in\Delta_i$. Тепер зафіксуємо $\varepsilon>0$. Для нього $\exists i_0$:

$\frac{r_i}{2\lambda} > \varepsilon \quad \forall i > i_0 \Rightarrow \quad \varepsilon U_1 \subset \frac{r_i}{2\lambda} U_1 \Rightarrow \varphi_i(\varepsilon U) < a_i \quad \forall i > i_0$. Таким чином, $z = \infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою $(S_{m,n})$.

Частина I) леми 15 для умови 1) доведена.

Частина II) доводиться аналогічно. □

Для оперування із слабкою збіжністю та обмеженістю послідовності $(S_{m,n})$ наведемо ще дві умови.

13) $\forall f \in L^* \ \exists r \geq 0$ і $\beta = \beta(f) \in \{0,1\}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (\overline{m}_k)$, $(\tilde{m}_k)$, $(\overline{n}_k)$, $(\tilde{n}_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$ такі, що незалежно одна від одної нерівності $(-1)^\beta \mu_{m_k,n_k} f(S_{m,n} - -S_{m_k,n_k}) \geq -r - \varepsilon$ і $(-1)^\beta \mu_{m,n} f(S_{m_k,n_k} - S_{m,n}) \geq -r - \varepsilon$ мають місце кожна хоча б в одному з випадків а) – г) умови 2) і при цьому $\sum_{\nu=\overline{m}_k+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum_{\nu=m_k+1}^{\tilde{m}_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum_{\nu=\overline{n}_k+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$ і $\sum_{\nu=n_k+1}^{\tilde{n}_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta \ \forall k > k_0$.

14) $\forall f \in L^* \ \exists \beta = \beta(f) \in \{0,1\}$, $H > 0$, $(\overline{m}_k)$, $(\tilde{m}_k)$, $(\overline{n}_k)$, $(\tilde{n}_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$ такі, що $\sum_{\nu=\overline{m}_k+1}^{m_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum_{\nu=m_k+1}^{\tilde{m}_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \geq \delta$, $\sum_{\nu=\overline{n}_k+1}^{n_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$, $\sum_{\nu=n_k+1}^{\tilde{n}_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \geq \delta$ $\forall k > k_0$ і при цьому нерівності $(-1)^\beta \mu_{m,n} f(S_{m,n} - S_{m-1,n}) \geq -H\sigma'_m p'_m / P'_m$ та $(-1)^\beta \mu_{m,n} f(S_{m,n} - S_{m,n-1}) \geq -H\sigma''_n p''_n / P''_n$ мають місце $\forall (m,n) \in \overline{\overline{m}_k, \tilde{m}_k} \times \overline{\overline{n}_k, \tilde{n}_k}$ $\forall k > k_0$.

Лема 16. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє умову* 13) *або* 14). *Тоді якщо* $\mu_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} \overset{C}{\neq} O(1)$, *то* $z = \infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* $(S_{m,n})$. *Якщо ж* $r = 0$ *і* $\mu_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} \overset{C}{\neq} o(1)$, *то* $z = \theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$-*точкою* $(S_{m,n})$.

□ Доведення леми 16 аналогічне доведенню леми 8. □

Зауваження. 1. У лемі 1 замість слабкої обмеженості можна розглядати просто обмеженість.

2. Якщо простір L обмежено компактний, то замість слабкої збіжності можна брати просто збіжність.

Переформулюємо умови 1) – 8), щоб вони стосувалися усієї послідовності $(S_{m,n})$.

1*) Існує обмежена множина $G \subset L$: $\theta \in G$, і для будь-якого абсолютно опуклого околу $U(G)$ множини G існують $n_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$: $\mu_{i,j}(S_{m,n} - S_{i,j}) \in U(G)$ $\forall (m,n),(i,j)$: $m > i > n_0$, $n > j > n_0$, $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu < \delta$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu < \delta$;

2*) $\exists r \ge 0$, $t_{i,j} \in L$: $t_{i,j} = O(1)$, $\mu_{i,j} S_{i,j} = b^*_{i,j} t_{i,j}$, де $b^*_{i,j} \in \mathbb{R}$ $\forall i,j \in \mathbb{N}_0$, і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_{i,j}(S_{m,n} - S_{i,j}) = b^{(1)}_{m,n,i,j} t_{i,j}$, $\mu_{m,n}(S_{i,j} - S_{m,n}) = b^{(2)}_{m,n,i,j} t_{i,j}$, $b^{(1)}_{m,n,i,j} \ge$ $\ge -r - \varepsilon$, $b^{(2)}_{m,n,i,j} \ge -r - \varepsilon$ $\forall (m,n),(i,j)$: $m > i > n_0$, $n > j > n_0$, $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu < \delta$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu < \delta$;

3*) $\mu_{m,n}(S_{m,n} - S_{m-1,n}) = O(\sigma'_m p'_m / P'_m)$ і $\mu_{m,n}(S_{m,n} - S_{m,n-1}) = O(\sigma''_n p''_n / P''_n)$;

4*) $\exists r \ge 0$, $t \in L$: $\mu_{m,n} S_{m,n} = b^*_{m,n} t$, де $b^*_{m,n} \in \mathbb{R}$, $\mu_{m,n}(S_{m,n} - S_{m-1,n}) = b^{(1)}_{m,n} \dfrac{\sigma'_m p'_m}{P'_m} t$, $\mu_{m,n}(S_{m,n} - S_{m,n-1}) = b^{(2)}_{m,n} \dfrac{\sigma''_n p''_n}{P''_n} t$, причому $b^{(1)}_{m,n} \ge -r$ і $b^{(2)}_{m,n} \ge -r$ $\forall m,n \in \mathbb{N}_0$;

5*) $\exists r \ge 0$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_{i,j} \left\| S_{m,n} - S_{i,j} \right\| \le r + \varepsilon$ $\forall (m,n),(i,j)$: $m > i > n_0$, $n > j > n_0$, $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu < \delta$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu < \delta$;

6*) $\overline{\lim\limits_{\substack{m>i\to\infty \\ n>j\to\infty}}} \mu_{i,j} \left\| S_{m,n} - S_{i,j} \right\| = r < +\infty$, коли $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \to 0$;

7*) $\exists r \ge 0$, $\beta \in \{0,1\}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $(-1)^\beta \mu_{i,j}(S_{m,n} - S_{i,j}) \ge -r - \varepsilon$ $\forall (m,n)$, (i,j): $m > i > n_0$, $n > j > n_0$, $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu < \delta$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu < \delta$;

8^{*}) $\exists r \geq 0$, $\beta \in \{0,1\}$: $\varliminf\limits_{\substack{m>i\to\infty \\ n>j\to\infty}} (-1)^{\beta} \mu_{i,j}(S_{m,n} - S_{i,j}) \geq -r$, коли $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m} \sigma'_{\nu} p'_{\nu} / P'_{\nu} \to 0$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n} \sigma''_{\nu} p''_{\nu} / P''_{\nu} \to 0$.

Умова 9) не має цікавого аналога, зате умови 10) – 12) підходять і для всієї послідовності $(S_{m,n})$.

Уточнимо означення: 1) *обмеженої*, 2) *нескінченно малої* та 3) *квазіобмеженої послідовності* $(S_{m,n})$ у просторі L. Через U позначатимемо довільний абсолютно опуклий окіл нуля. А саме: 1) $(S_{m,n})$ обмежена, якщо множина $\{S_{m,n}$: $m,n \in \mathbb{N}_0\}$ обмежена; 2) $S_{m,n} = o(1)\ (m,n \to \infty)$ $\Leftrightarrow$ $\forall U$ $\exists n_0$: $S_{m,n} \in U$ $\forall m,n > n_0$; 3) $S_{m,n} = O(1)\ (m,n \to \infty)$ $\Leftrightarrow$ $\forall U$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$: $S_{m,n} \in \lambda_0 U$ $\forall m,n > n_0$.

Відмітимо, що $S_{m,n} = o(1)$ $\left(= O(1)\right)$ $(m,n \to \infty)$ $\Leftrightarrow$ $S_{m_k,n_k} = o(1)$ $\left(= O(1)\right)$ $(k \to \infty)$ $\forall m_k, n_k \uparrow \infty$, а також $S_{m,n} = o(1) \Rightarrow S_{m,n} = O(1)$ $(m,n \to \infty)$.

Лема 17. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє принаймні одну з умов* 1^{*}) – 8^{*}), 10) – 12). *Тоді*

I) *якщо* $\mu_{m,n} S_{m,n} \neq O(1)$, *то* $z = \infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* $(S_{m,n})$;

II) *якщо в* 1^{*}) $G = \{\theta\}$, *у* 2^{*}), 5^{*}) – 8^{*}) $r = 0$ *і при цьому* $\mu_{m,n} S_{m,n} \neq o(1)$, *то* $z = \theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* $(S_{m,n})$.

□ Якщо в умовах 1^{*}), 2^{*}), 5^{*}) – 8^{*}) замість i та j взяти довільні послідовності $m_k \uparrow \infty$ і $n_k \uparrow \infty$, то будуть виконуватися відповідні умови 1), 2), 5) – 8).

Якщо виконується умова 3^{*}) або 4^{*}) і зафіксувати довільні послідовності номерів $m_k \uparrow \infty$ і $n_k \uparrow \infty$, то буде виконуватися і умова 3) або 4) відповідно.

В умовах 10) – 12) структура послідовності $(S_{m,n})$ така, що коли $\mu_{m,n} S_{m,n} \neq O(1)$ $(\neq o(1))$, то і $\mu_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} \neq O(1)$ $(\neq o(1))$.

Отже, лема 17 випливає з леми 15. □

Для слабкої збіжності аналогами умов 13) і 14) є наступні умови 13^{*}) і 14^{*}).

13*) $\forall f\in L^*$ $\exists r\ge 0$ і $\beta=\beta(f)\in\{0,1\}$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ і $\delta>0$: $(-1)^{\beta}\mu_{i,j}f(S_{m,n}-$ $-S_{i,j})\ge -r-\varepsilon$ $\forall(m,n)$, (i,j): $m>i>n_0$, $n>j>n_0$, $\sum\limits_{\nu=i+1}^{m}\sigma'_{\nu}p'_{\nu}/P'_{\nu}<\delta$ і $\sum\limits_{\nu=j+1}^{n}\sigma''_{\nu}p''_{\nu}/P''_{\nu}<\delta$;

14*) $\forall f\in L^*$ $\exists\beta=\beta(f)\in\{0,1\}$ і $H>0$: $(-1)^{\beta}\mu_{m,n}f(S_{m,n}-S_{m-1,n})\ge -H\sigma'_m p'_m/P'_m$ і $(-1)^{\beta}\mu_{m,n}f(S_{m,n}-S_{m,n-1})\ge -H\sigma''_n p''_n/P''_n$.

Лема 18. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє умову* 13*) *або* 14*). *Тоді якщо* $\mu_{m,n}S_{m,n}\overset{C}{\ne}O(1)$, *то* $z=\infty$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* $(S_{m,n})$, *а якщо* $r=0$ *і* $\mu_{m,n}S_{m,n}\overset{C}{\ne}o(1)$, *то* $z=\theta$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою* $(S_{m,n})$.

□ Лема 18 випливає з леми 16, тому що коли виконані умови 13*) або 14*), то для довільних послідовностей номерів $m_k\uparrow\infty$ і $n_k\uparrow\infty$ буде виконуватися відповідна умова 13) або 14). □

Корисно також до вже наведених тауберових умов додати ще одну умову, запропоновану В. Г. Челідзе [66], яка є частинним випадком умови 6*).

15*) $S_{m,n}=\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n}a_{i,j}$, $a_{i,j}\in\mathbb{C}$, $\exists H>0$, $u>1$, $v>1$: $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=1$ і

$$|a_{i,j}|\le H\frac{p'_i p''_j}{(P'_i)^u+(P''_j)^v}\quad \forall i,j\in\mathbb{N}_0.$$

Нижче ми покажемо, що всі умови даного пункту 1) – 15*) дійсно є тауберовими для методу Ріса, а при $p'_n\equiv p''_n\equiv 1$ для методів Вороного $(W,p_{m,n})$ класу W_Q^2, зокрема, для методу середніх арифметичних, що задається перетворенням

$$C_{m,n}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}S_{i,j}. \tag{2.12}$$

На відміну від простих послідовностей (приклад 1 п. 2.1.2), умова $|a_{i,j}|\le H/(ij)$ $\forall i,j\in\mathbb{N}$ і навіть умова $ija_{i,j}\to 0$ $(i,j\to\infty)$ не є тауберовою для методу середніх арифметичних на всьому класі подвійних послідовностей [68, с. 67].

2.4.3. Чи передаються $D(p,\mu,\sigma)$-точки у спадок середнім арифметичним. Щоб дістати статистичні D-властивості методів підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро (теорема 6) та методів Вороного (теорема 10), ми скористалися теоремою Г. О. Михаліна Т8 (див. пункт 2.1.1) про те, що $(p,\lambda/\sigma^{\alpha},\sigma)$-точки $z=\theta$ і $z=\infty$ послідовності (S_n) переходять у (p,λ,σ)-точки $z=\theta$ і $z=\infty$ її середніх типу Гельдера $(H_n^{(\alpha)})$ і типу Чезаро $(C_n^{(\alpha)})$.

Природно з'ясувати, чи має місце аналог теореми Т8 для подвійних послідовностей хоча б у найпростішому випадку. Щоб відповісти на це питання, будемо розглядати тільки $(1,1,1)$-точки, які коротше називатимемо (c^*)-точками, і метод середніх арифметичних, що визначається рівністю (2.12). Нас цікавить, чи передаються (c^*)-точки $z=0$ і $z=\infty$ від послідовності $(S_{m,n})$ до її середніх арифметичних $(C_{m,n})$, як це має місце для простих послідовностей.

Визначимо послідовність $(S_{m,n})$ наступним чином (вважаючи $k\in\mathbb{N}$):

$$S_{2^k+i,2^k}=\begin{cases}-ik2^k, & \text{якщо } i=2,4,\ldots,2^k,\\ (i-1)k2^k, & \text{якщо } i=3,5,\ldots,2^k+1,\end{cases}$$

$$S_{2^k+i,2^{k+1}+1}=\begin{cases}-ik2^k, & \text{якщо } i=3,5,\ldots,2^k-1,\\ (i-1)k2^k, & \text{якщо } i=2,4,\ldots,2^k,\end{cases}$$

$$S_{2^k+1,2^{k-1}+j}=-(k-1)2^{k-1}\ \forall j=1,2,\ldots,2^{k-1},$$

$$S_{2^k+i,2^k+j}=k\ \forall i,j=1,2,\ldots,2^k,$$

$$S_{m,n}=0 \text{ в інших випадках.}$$

Завдяки рівності $S_{2^k+i,2^k+j}=k\ \forall i,j\in\overline{1,2^k}$ точка $z=\infty$ є (c^*)-точкою послідовності $(S_{m,n})$.

Позначимо $z_{m,n}=\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n}S_{i,j}=(m+1)(n+1)C_{m,n}$. Користуючись методом математичної індукції, неважко показати, що

$$z_{m,n} = 0 \text{, коли } \left[\begin{array}{c} m = 2^k + 1,\ \ 2^{k-1} \le n \le 2^k, \\ 2^k + 2 \le m \le 2^{k+1} + 1,\ \ 1 \le n \le 2^k - 1, \\ 2^k + 1 \le m \le 2^{k+1},\ \ n \ge 2^{k+1} + 1, \end{array} \right.$$

$$z_{2^k+i,2^k+j} = \begin{cases} ijk, & \text{якщо } i = 1,3,\ldots,2^k - 1,\ j = 1,2,\ldots,2^k, \\ ijk - ik2^k, & \text{якщо } i = 2,4,\ldots,2^k,\ j = 1,2,\ldots,2^k, \end{cases}$$

$$z_{2^k+i,2^k} = \begin{cases} -ik2^k, & \text{якщо } i = 2,4,\ldots,2^k, \\ 0, & \text{якщо } i = 3,5,\ldots,2^k - 1. \end{cases}$$

Бачимо, що будь-який прямокутник у матриці $(z_{m,n})$ складається або з самих нулів, або містить і додатні, і від’ємні числа (у сусідніх рядках). Це вказує на те, що точка $z = 0$ не є (c^*)-точкою послідовності $(z_{m,n})$. Зрозуміло, що тоді $z = 0$ не є (c^*)-точкою і послідовності $C_{m,n} = \dfrac{z_{m,n}}{(m+1)(n+1)}$, а отже, і точка $z = \infty$ не є (c^*)-точкою послідовності $(C_{m,n})$.

Слід зазначити, що при певних обмеженнях, накладених на послідовність $(S_{m,n})$ (наприклад, щоб $(S_{m,n})$ була обмеженою в кожному куті $\{(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$: $m \le m_0$ або $n \le n_0\}$), передача у спадок і (c^*)-точок, і деяких інших тауберових умов від послідовності до її середніх відбувається. Це використовували В. М. Алданов і Г. О. Михалін [2], вивчаючи методи (H, p, α, β) і (C, p, α, β).

Для доведення тверджень, які б поширювалися на весь клас подвійних послідовностей $(S_{m,n})$, доведеться діяти методами, відмінними від тих, що базуються на теоремі Т8 у випадку однократних послідовностей.

2.5. Статистична збіжність і тауберові теореми із залишком для факторизованих методів Ріса

У даному підрозділі вважатимемо, що виконуються усі умови пункту 2.4.1.

2.5.1. Поняття (p,μ,σ)-статистичної збіжності та обмеженості подвійної послідовності. Казатимемо, що послідовність $(S_{m,n})$ (p,σ)-*статистично* *збігається до нуля* (*(p,σ)-статистично обмежена*), і писатимемо $S_{m,n}=o(1)$ $((p,\sigma)\text{-st})$ ($S_{m,n}=O(1)$ $((p,\sigma)\text{-st})$), якщо кожен абсолютно опуклий окіл U нуля θ простору L є таким, що $\forall\varepsilon>0$ ($\exists\varepsilon>0:$)

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{P_{m,n}}\sum_{(i,j)\in E_{m,n}^{(\varepsilon)}}\sigma_{i,j}p_{i,j}=0, \tag{2.13}$$

де $E_{m,n}^{(\varepsilon)}=\{(i,j)\in\overline{0,m}\times\overline{0,n}:S_{i,j}\notin\varepsilon U\}$.

Якщо замість умови (2.13) вимагати умову

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{\sigma_{m,n}}{P_{m,n}}\sum_{(i,j)\in E_{m,n}^{(\varepsilon)}}p_{i,j}=0, \tag{2.14}$$

то дістанемо означення *$(p,\sigma)^*$-статистичної збіжності до нуля* та *обмеженості* послідовності $(S_{m,n})$ і будемо записувати, відповідно, $S_{m,n}=o(1)$ $((p,\sigma)^*\text{-st})$ або $S_{m,n}=O(1)$ $((p,\sigma)^*\text{-st})$.

Послідовність $(S_{m,n})$ назвемо *(p,μ,σ)-статистично збіжною до елемента* $a\in L$, і писатимемо $S_{m,n}\to a$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, якщо $\mu_{m,n}(S_{m,n}-a)=o(1)$ $((p,\sigma)\text{-st})$. Якщо ж $\mu_{m,n}S_{m,n}=O(1)$ $((p,\sigma)\text{-st})$, то будемо казати, що *послідовність* $(S_{m,n})$ *(p,μ,σ)-статистично обмежена*, і писати $S_{m,n}=O(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$.

Таким же чином через $(p,\sigma)^*$-статистичну збіжність або обмеженість визначається *$(p,\mu,\sigma)^*$-статистична збіжність* або *обмеженість* відповідно.

У випадку $\sigma_n'\equiv\sigma_n''\equiv1$ легко бачити, що

$$S_{m,n}=o(1)\ (=O(1))\ (m,n\to\infty)\ \Rightarrow\ S_{m,n}=o(1)\ (=O(1))\ ((p,1)\text{-st}).$$

2.5.2. Зв'язок між $D(p,\mu,\sigma)$-точками і (p,μ,σ)-статистичною збіжністю або обмеженістю подвійної послідовності. Теореми 5 і 6 пункту 2.2.2 без змін переносяться на подвійні послідовності.

Теорема 14. *Якщо* $z=\theta$ ($z=\infty$) *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою послідовності* $(S_{m,n})$, *то послідовність* $(S_{m,n})$ *не може* *(p,μ,σ)-статистично збігатися до нуля* (*бути (p,μ,σ)-статистично обмеженою*).

Теорема 15. *Якщо* $z=\theta$ $(z=\infty)$ *є* $D(p,\mu,\sigma)$*-точкою послідовності* $(S_{m,n})$, *то послідовність* $(S_{m,n})$ *не може* $(p,\mu,\sigma)^*$*-статистично збігатися до нуля* (*бути* $(p,\mu,\sigma)^*$*-статистично обмеженою*).

□ Доведення теорем 14 та 15 майже повністю збігається з доведенням теорем 5 та 6. □

Статистичну збіжність можна вважати методом підсумовування подвійних послідовностей. Теореми 14 та 15 можуть служити джерелом цілої низки тауберових теорем для цього методу підсумовування. Згідно з лемами 15 – 18 тауберовими умовами можуть виступити умови 1) – 15*) пункту 2.4.2.

2.5.3. Зв’язок між статистичною і звичайною збіжністю та обмеженістю подвійної послідовності. Для доведення основної леми 20 цього пункту нам знадобиться одне просте твердження.

Лема 19. *Нехай* $p_n \ge 0$, $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k>0$, $\sigma_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, $\sigma_n p_n/P_n\to 0$ *при* $n\to\infty$, $m_{k+1}\ge m_k^*>m_k\uparrow\infty$ *і* $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta>0$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Тоді $\exists (m_k^{(1)})$, $(m_k^{(2)})$ *і* $k_0\in\mathbb{N}$: $m_k<m_k^{(1)}<m_k^{(2)}<m_k^*$,

$$\sum_{\nu=m_k+1}^{m_k^{(1)}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta_1,\quad \sum_{\nu=m_k^{(1)}+1}^{m_k^{(2)}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta_1 \quad і \quad \sum_{\nu=m_k^{(2)}+1}^{m_k^{*}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta_1\ \ \forall k>k_0,$$

де $\delta_1=\delta/16$.

□ Оскільки $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu\ge\delta$ $\forall m\ge m_k^*$ $\forall k$, а $\sigma_n p_n/P_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то $\exists k_0\in\mathbb{N}$: $\forall k>k_0$ $\exists m_k^{(2)}=\max\{m>m_k:\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu<\delta/2\}$, причому $m_k<m_k^{(2)}<$ $<m_k^*$ $\forall k>k_0$.

Зрозуміло, що $\sum\limits_{\nu=m_k^{(2)}+1}^{m_k^*}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu=\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu-\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^{(2)}}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu>\delta-\delta/2=\delta/2$

$\forall k > k_0$.

Далі, оскільки за означенням номерів $m_k^{(2)}$ $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^{(2)}+1} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta/2$ $\forall k > k_0$, то за допомогою умови $\sigma_n p_n / P_n \to 0$ дістанемо, що $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^{(2)}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta/4$ для досить великих k, і можна вважати $\forall k > k_0$.

Використовуючи тепер доведене вище до відрізків $\overline{m_k, m_k^{(2)}}$, знайдемо номери $m_k^{(1)}$: $m_k < m_k^{(1)} < m_k^{(2)}$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^{(1)}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta/16$ і $\sum\limits_{\nu=m_k^{(1)}+1}^{m_k^{(2)}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta/8$ $\forall k > k_0$. □

Лема 20. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє рівність* (2.13), *де окіл* U *і число* $\varepsilon > 0$ *фіксовані. І нехай* $m_{k+1} \ge m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \ge n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $P'_{m_k^*} / P'_{m_k} \le 2$, $P''_{n_k^*} / P''_{n_k} \le 2$, $\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{m_k^*} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta > 0$, $\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_k^*} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тоді* $\exists (m_k^{(1)})$, $(m_k^{(2)})$, $(n_k^{(1)})$, $(n_k^{(2)})$ *і* $k_0 \in \mathbb{N}$: $m_k \le m_k^{(1)} < m_k^{(2)} \le m_k^*$, $n_k \le n_k^{(1)} < n_k^{(2)} \le n_k^*$, $\sum\limits_{\nu=m_k^{(1)}+1}^{m_k^{(2)}} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta_1$, $\sum\limits_{\nu=n_k^{(1)}+1}^{n_k^{(2)}} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta_1$ $\forall k > k_0$, *де* $\delta_1 = \delta/32$, *причому* $S_{m_k^{(i)}, n_k^{(j)}} \in \varepsilon U$ $\forall i, j = 1, 2$ $\forall k > k_0$.

□ За лемою 19 $\exists (\bar{m}_k^{(1)})$, $(\bar{m}_k^{(2)})$, $(\bar{n}_k^{(1)})$, $(\bar{n}_k^{(2)})$ і $k_0 \in \mathbb{N}$: $m_k < \bar{m}_k^{(1)} < \bar{m}_k^{(2)} < m_k^*$, $n_k < \bar{n}_k^{(1)} < \bar{n}_k^{(2)} < n_k^*$, $\sum\limits_{\nu=a_k+1}^{b_k} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge 2\delta_1$ $\forall k > k_0$, де $(a_k, b_k) \in \{(m_k, \bar{m}_k^{(1)}), (\bar{m}_k^{(1)}, \bar{m}_k^{(2)}), (\bar{m}_k^{(2)}, m_k^*)\}$, $\delta_1 = \delta/32$, а також $\sum\limits_{\nu=c_k+1}^{d_k} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge 2\delta_1$ $\forall k > k_0$ для всеможливих пар $(c_k, d_k) \in \{(n_k, \bar{n}_k^{(1)}), (\bar{n}_k^{(1)}, \bar{n}_k^{(2)}), (\bar{n}_k^{(2)}, n_k^*)\}$.

Враховуючи, що $P'_{m_k^*} / P'_{m_k} \le 2$ і $P''_{n_k^*} / P''_{n_k} \le 2$, можна записати:

$$\frac{1}{P'_{b_k}} \sum_{\nu=a_k+1}^{b_k} \sigma'_\nu p'_\nu \ge \delta_1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{P''_{d_k}} \sum_{\nu=c_k+1}^{d_k} \sigma''_\nu p''_\nu \ge \delta_1 \quad \forall k > k_0,$$

де (a_k), (b_k), (c_k) і (d_k) – ті самі, що і вище.

Припустимо, що $\exists l_k \uparrow \infty : \ \frac{1}{P''_{n^*_{l_k}}} \sum_{j \in B^{(i)}_k(\varepsilon)} \sigma''_j p''_j \geq \delta_1 / 4 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \overline{\bar{m}^{(2)}_{l_k}, m^*_{l_k}}$, де $B^{(i)}_k(\varepsilon) = \{ j \in \overline{n_{l_k}, n^*_{l_k}} : S_{i,j} \notin \varepsilon U \}$. Оскільки при $i \in \overline{\bar{m}^{(2)}_{l_k}, m^*_{l_k}}$, $j \in B^{(i)}_k(\varepsilon)$ пара $(i, j) \in E^{(\varepsilon)}_{m^*_{l_k}, n^*_{l_k}}$ (див. рівність (2.13)), то

$$\frac{1}{P_{m^*_{l_k}, n^*_{l_k}}} \sum_{(i,j) \in E^{(\varepsilon)}_{m^*_{l_k}, n^*_{l_k}}} \sigma_{i,j} p_{i,j} \geq \frac{1}{P_{m^*_{l_k}, n^*_{l_k}}} \sum_{i=\bar{m}^{(2)}_{l_k}}^{m^*_{l_k}} \sum_{j \in B^{(i)}_k(\varepsilon)} \sigma_{i,j} p_{i,j} =$$

$$= \frac{1}{P'_{m^*_{l_k}}} \sum_{i=\bar{m}^{(2)}_{l_k}}^{m^*_{l_k}} \sigma'_i p'_i \left(\frac{1}{P''_{n^*_{l_k}}} \sum_{j \in B^{(i)}_k(\varepsilon)} \sigma''_j p''_j \right) \geq \left(\frac{1}{P'_{m^*_{l_k}}} \sum_{i=\bar{m}^{(2)}_{l_k}}^{m^*_{l_k}} \sigma'_i p'_i \right) \cdot \frac{\delta_1}{4} \geq \frac{\delta_1^2}{4} \quad \forall k > k_0 .$$

Дістали протиріччя з умовою (2.13). Отже,

$$\exists k_1 : \ \forall k > k_1 \ \ \exists m^{(2)}_k \in \overline{\bar{m}^{(2)}_k, m^*_k} : \ \frac{1}{P''_{n^*_k}} \sum_{j \in C^{(\varepsilon)}_k} \sigma''_\nu p''_\nu < \delta_1 / 4 ,$$

де $C^{(\varepsilon)}_k = \{ j \in \overline{n_k, n^*_k} : S_{m^{(2)}_k, j} \notin \varepsilon U \}$.

Аналогічно можна показати, що

$$\exists k_2 : \ \forall k > k_2 \ \ \exists m^{(1)}_k \in \overline{m_k, \bar{m}^{(1)}_k} : \ \frac{1}{P''_{n^*_k}} \sum_{j \in D^{(\varepsilon)}_k} \sigma''_j p''_j < \delta_1 / 4 ,$$

де $D^{(\varepsilon)}_k = \{ j \in \overline{n_k, n^*_k} : S_{m^{(1)}_k, j} \notin \varepsilon U \}$.

Тоді $\frac{1}{P''_{n^*_k}} \sum_{j \in C^{(\varepsilon)}_k \bigcup D^{(\varepsilon)}_k} \sigma''_j p''_j < \delta_1 / 2 \ \ \forall k > \max\{k_1, k_2\}$. Разом з цим

$$\frac{1}{P''_{n^*_k}} \sum_{j=n_k+1}^{\bar{n}^{(1)}_k} \sigma''_j p''_j = \frac{P''_{\bar{n}^{(1)}_k}}{P''_{n^*_k}} \cdot \frac{1}{P''_{\bar{n}^{(1)}_k}} \sum_{j=n_k+1}^{\bar{n}^{(1)}_k} \sigma''_j p''_j \geq \frac{\delta_1}{2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{P''_{n^*_k}} \sum_{j=\bar{n}^{(2)}_k+1}^{n^*_k} \sigma''_j p''_j \geq \frac{\delta_1}{2} \quad \forall k > k_0 .$$

Тому $\forall k > \max\{k_1, k_2\} \ \ \exists n^{(1)}_k \in \overline{n_k, \bar{n}^{(1)}_k}$, $n^{(2)}_k \in \overline{\bar{n}^{(2)}_k, n^*_k}$: $S_{m^{(i)}_k, n^{(j)}_k} \in \varepsilon U \quad \forall i, j = 1, 2$. □

2.5.4. *D*-властивість факторизованих методів Ріса. Факторизований метод Ріса $(R, p_{m,n})$ – це метод $(H, p, 1, 1)$ типу Гельдера (див. пункт 1.1.6). Його середні мають вигляд $R_{m,n} = \dfrac{1}{P_{m,n}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{i,i} S_{i,j}$.

Основним результатом підрозділу 2.5 є наступна теорема 16, яку можна назвати *статистичною* D*-властивістю факторизованих методів Ріса*.

Теорема 16. *Якщо точка* $z = \theta$ $(z = \infty)$ *є* $D(p, \mu/\sigma, \sigma)$*-точкою послідовності* $(S_{m,n})$, *то послідовність* $(R_{m,n})$ *не може* (p, μ, σ)*-статистично збігатися до нуля* (*бути* (p, μ, σ)*-статистично обмеженою*).

□ Припустимо, що точка $z = \theta$ є $D(p, \mu/\sigma, \sigma)$-точкою послідовності $(S_{m,n})$. Це означає, що існують послідовності (m_k), (m_k^*), (n_k), (n_k^*), $a_k \ge 0$, $\varphi_k \in L^*$, число $\delta > 0$ і абсолютно опуклий окіл нуля U такі, що $m_{k+1} \ge m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \ge n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $\sum_{\nu = m_k + 1}^{m_k^*} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta$, $\sum_{\nu = n_k + 1}^{n_k^*} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta$ $\forall k \in \mathbb{N}$, причому $\exists \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\varphi_k(\varepsilon U) < a_k \le \varphi_k(\mu_{m_k, n_k} / \sigma_{m_k, n_k} S_{m,n})$ $\forall (m,n) \in \overline{m_k, m_k^*} \times \overline{n_k, n_k^*}$ $\forall k > k_0$.

Згідно із зауваженням 3 пункту 2.4.1 будемо вважати, що

$$P'_{m_k^*} / P'_{m_k} \le 2 \ \text{ і } \ P''_{n_k^*} / P''_{n_k} \le 2 \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

В силу умов (2.8) та (2.9) $\exists c > 1$, $c_1 > 0$: ($\mu'_m / \mu'_n \le c$ і $\sigma'_m / \sigma'_n \ge c_1$), коли $1 \le P'_n / P'_m \le 2$; ($\mu''_m / \mu''_n \le c$ і $\sigma''_m / \sigma''_n \ge c_1$), коли $1 \le P''_n / P''_m \le 2$. Позначимо $\delta_1 = \delta / 32$, $\varepsilon_1 = \dfrac{16 c \varepsilon}{c_1^2 \delta_1^2} > 0$. Припустимо, що $R_{m,n} = o(1)$ $((p, \mu, \sigma)\text{-st})$. Тоді буде правильною рівність (2.13) для околу U, визначеного вище, і числа ε_1.

За лемою 20 $\exists (m_k^{(1)})$, $(m_k^{(2)})$, $(n_k^{(1)})$, $(n_k^{(2)})$, $k_* > k_0$: $m_k \le m_k^{(1)} < m_k^{(2)} \le m_k^*$, $n_k \le n_k^{(1)} < n_k^{(2)} \le n_k^*$, $\sum_{\nu = m_k^{(1)} + 1}^{m_k^{(2)}} \sigma'_\nu p'_\nu / P'_\nu \ge \delta_1$, $\sum_{\nu = n_k^{(1)} + 1}^{n_k^{(2)}} \sigma''_\nu p''_\nu / P''_\nu \ge \delta_1$ $\forall k > k_*$, а

$$\mu_{m_k^{(i)}, n_k^{(j)}} R_{m_k^{(i)}, n_k^{(j)}} \in \varepsilon_1 U \ \ \forall i, j = 1, 2, \ \forall k > k_*.$$

Перепозначаючи $m_k := m_k^{(1)}$, $m_k^* := m_k^{(2)}$, $n_k := n_k^{(1)}$, $n_k^* := n_k^{(2)}$, ми наділимо ці послідовності усіма початковими їхніми якостями (тільки замість δ треба брати

δ_1), та ще й тим, що

$$\left\{\mu_{m_k,n_k} R_{m_k,n_k},\, \mu_{m_k^*,n_k} R_{m_k^*,n_k},\, \mu_{m_k,n_k^*} R_{m_k,n_k^*},\, \mu_{m_k^*,n_k^*} R_{m_k^*,n_k^*}\right\} \subset \varepsilon_1 U \quad \forall k > k_* .$$

Зауважимо, що $\sum_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} = \sum_{i=m_k+1}^{m_k^*} p_i' \sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_j'' > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Тоді з очевидної тотожності $\sum_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} S_{i,j} = P_{m_k^*,n_k^*} R_{m_k^*,n_k^*} + P_{m_k,n_k} R_{m_k,n_k} - P_{m_k^*,n_k} R_{m_k^*,n_k} - P_{m_k,n_k^*} R_{m_k,n_k^*}$ випливає наступна тотожність

$$\frac{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\mu_{m_k,n_k}}{\sigma_{m_k,n_k}} S_{i,j}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j}} = \frac{\frac{\mu_{m_k,n_k}}{\mu_{m_k^*,n_k^*}} \mu_{m_k^*,n_k^*} R_{m_k^*,n_k^*}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\sigma_{m_k,n_k}}{P_{m_k^*,n_k^*}}} + \frac{\mu_{m_k,n_k} R_{m_k,n_k}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\sigma_{m_k,n_k}}{P_{m_k,n_k}}} -$$

$$- \frac{\frac{\mu_{m_k,n_k}}{\mu_{m_k^*,n_k}} \mu_{m_k^*,n_k} R_{m_k^*,n_k}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\sigma_{m_k,n_k}}{P_{m_k^*,n_k}}} - \frac{\frac{\mu_{m_k,n_k}}{\mu_{m_k,n_k^*}} \mu_{m_k,n_k^*} R_{m_k,n_k^*}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\sigma_{m_k,n_k}}{P_{m_k,n_k^*}}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Усі знаменники правої частини тотожності (2.15) не менші за $c_1^2 \delta_1^2 / 4$. Покажемо це, наприклад, для першого знаменника:

$$\sum_{i=m_k+1}^{m_k^*}\sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_{i,j} \frac{\sigma_{m_k,n_k}}{P_{m_k^*,n_k^*}} = \left(\frac{1}{P'_{m_k^*}} \sum_{i=m_k+1}^{m_k^*} p_i' \sigma'_{m_k} \right)\left(\frac{1}{P''_{n_k^*}} \sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} p_j'' \sigma''_{n_k} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=m_k+1}^{m_k^*} \frac{p_i'\sigma_i'}{P_i'} \frac{P_i'}{P'_{m_k^*}} \frac{\sigma'_{m_k}}{\sigma_i'} \right)\left(\sum_{j=n_k+1}^{n_k^*} \frac{p_j''\sigma_j''}{P_j''} \frac{P_j''}{P''_{n_k^*}} \frac{\sigma''_{n_k}}{\sigma_j''} \right) \geq \frac{1}{4} c_1^2 \delta_1^2 \quad \forall k > k_*.$$

Таким чином, якщо позначимо праву частину тотожності (2.15)

$$\Gamma_k = \alpha_k \mu_{m_k^*,n_k^*} R_{m_k^*,n_k^*} + \beta_k \mu_{m_k,n_k} R_{m_k,n_k} - \gamma_k \mu_{m_k^*,n_k} R_{m_k^*,n_k} - \delta_k \mu_{m_k,n_k^*} R_{m_k,n_k^*},$$

то за властивостями абсолютно опуклих множин [49, с. 16]

$$\Gamma_k \subset (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \delta_k)\varepsilon_1 U \subset 4 \cdot \frac{4c}{c_1^2 \delta_1^2} \varepsilon_1 U = \varepsilon U \quad \forall k > k_*.$$

Звідси випливає, що $\varphi_k(\Gamma_k) < a_k \quad \forall k > k_0$. А якщо знайти значення φ_k від лівої частини тотожності (2.15), то вийде $\varphi_k(\Gamma_k) \geq a_k \quad \forall k > k_0$.

Отримане протиріччя доводить теорему 16 для точки $z = \theta$. Міркування для точки $z=\infty$ відрізняються лише вибором числа $\varepsilon>0$. □

2.5.5. Тауберові теореми із залишком для факторизованих методів Ріса.

З теореми 16 і лем 15 та 16 випливає наступна теорема.

Теорема 17. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє принаймні одну з умов* 1) – 14) *пункту* 2.4.2, *де* $\mu_{m,n}\equiv\mu_{m,n}/\sigma_{m,n}$. *Тоді*

I) *якщо* $R_{m,n}=O(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то* $(\mu_{m_k,n_k}/\sigma_{m_k,n_k})S_{m_k,n_k}=O(1)$ $(k\to\infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13) *з* $r=0$ *або* 14) *і* $R_{m,n}=o(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то*

$$(\mu_{m_k,n_k}/\sigma_{m_k,n_k})S_{m_k,n_k}\overset{C}{=}o(1)\ \ (k\to\infty);$$

III) *якщо в* 1) $G=\{\theta\}$, *у* 2), 5) – 9) *і* 13) $r=0$, *у* 13) *і* 14) *простір* L *обмежено компактний і* $R_{m,n}\to a$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то* $S_{m_k,n_k}=a+o(\sigma_{m_k,n_k}/\mu_{m_k,n_k})$ $(k\to\infty)$.

З теореми 16 і лем 17 та 18 випливає наступна теорема.

Теорема 18. *Нехай послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє принаймні одну з умов* $1^*)$ – $8^*)$, $13^*)$, $14^*)$, 10) – 12) *пункту* 2.4.2, *де* $\mu_{m,n}\equiv\mu_{m,n}/\sigma_{m,n}$. *Тоді*

I) *якщо* $R_{m,n}=O(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то* $(\mu_{m,n}/\sigma_{m,n})S_{m,n}=O(1)$ $(m,n\to\infty)$;

II) *якщо виконується умова* $13^*)$ *з* $r=0$ *або* $14^*)$ *і* $R_{m,n}=o(1)$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то*

$$(\mu_{m,n}/\sigma_{m,n})S_{m,n}\overset{C}{=}o(1)\ \ (m,n\to\infty);$$

III) *якщо в* $1^*)$ $G=\{\theta\}$, *у* $2^*)$, $5^*)$ – $8^*)$ *і* $13^*)$ $r=0$, *у* $13^*)$ *і* $14^*)$ *простір* L *обмежено компактний і* $R_{m,n}\to a$ $((p,\mu,\sigma)\text{-st})$, *то* $S_{m,n}=a+o\left(\dfrac{\sigma_{m,n}}{\mu_{m,n}}\right)$ $(m,n\to\infty)$.

Одним з наслідків теореми 16 є $(\overline{R},p,q)$-властивість методів Ріса, котра є основним результатом роботи М. Ф. Бурляя [6]. Теореми 17 і 18 узагальнюють на випадок статистичної збіжності та обмеженості середніх результати роботи В. М. Алданова [1]. Зауважимо, що у роботах М. Ф. Бурляя та В. М. Алданова досліджувалися лише числові послідовності і звичайна збіжність, причому у роботі М. Ф. Бурляя розглянуто лише випадок $\lambda_n\equiv\mu_n\equiv\sigma_n\equiv 1$.

2.6. Статистична збіжність і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування Вороного класу W_Q^2

У даному підрозділі ми будемо вивчати факторизовані методи Вороного $(W, p_{m,n})$ класу W_Q^2, які були визначені в пункті 1.1.7. Виберемо один з таких методів, зафіксувавши протягом усього підрозділу дві послідовності (p'_n) і (p''_n), що задовольняють усі умови, накладені на них у пункті 1.1.7.

Зафіксуємо також чотири додатні послідовності (λ'_n), (λ''_n), (σ'_n) і (σ''_n), для яких мають місце умови (2.8) – (2.11) у випадку $p'_n \equiv p''_n \equiv 1$, а саме: замість умов (2.8) і (2.9) можна записати

$$\lambda'_m \asymp \lambda'_n,\ \sigma'_m \asymp \sigma'_n,\ \lambda''_m \asymp \lambda''_n,\ \sigma''_m \asymp \sigma''_n \text{ при } m \asymp n, \tag{2.16}$$

а замість (2.10) і (2.11) –

$$0 < \gamma \le \sigma'_n = o(n),\ \gamma \le \sigma''_n = o(n)\ (n \to \infty). \tag{2.17}$$

Визначимо також послідовності $\mu_m'^{(\alpha)} = \lambda'_m / \sigma_m'^{\alpha}$, $\mu_n''^{(\beta)} = \lambda''_n / \sigma_n''^{\beta}$. Введемо позначення $\lambda_{m,n} = \lambda'_m \lambda''_n$, $\sigma_{m,n} = \sigma'_m \sigma''_n$, $\mu_{m,n}^{(\alpha,\beta)} = \mu_m'^{(\alpha)} \mu_n''^{(\beta)}$ $\forall m, n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

2.6.1. Допоміжні твердження. Окремі етапи доведення основної теореми підрозділу 2.6 подамо у вигляді допоміжних тверджень. Велику роль у даному підрозділі відіграватимуть так звані операції згортки і тензорного добутку.

Послідовність $c = (c_{m,n}) = \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{m-i,n-j} b_{i,j} \right)$ називають *згорткою* послідовностей $a = (a_{m,n})$ та $b = (b_{m,n})$, одна з яких числова, а інша – L-значна або обидві числові. При цьому записують $c = a * b$. Послідовність $d = (d_{m,n}) = (d'_m d''_n)$ називатимемо *тензорним добутком* числових однократних послідовностей $d' = (d'_m)$ та $d'' = (d''_n)$ і позначатимемо $d = d' \odot d''$.

Також ми будемо користуватися згортками однократних послідовностей (див. пункт 2.3.2). Майже очевидні властивості згортки і тензорного добутку сформулюємо для зручності у вигляді леми.

Лема 21. *Операція згортки на множині подвійних послідовностей асоціативна, комутативна і має нейтральний елемент* $E=(E_{m,n})$: $E_{0,0}=1$, $E_{m,n}=0$ *при* $m+n>0$. *Крім цього, між згортками і тензорним добутком існує такий зв'язок:* $(a*b)\odot(c*d)=(a\odot c)*(b\odot d)$.

Зауваження. 1. У властивості асоціативності принаймні дві з трьох послідовностей повинні бути числовими, а одна може бути й L-значною.

2. Числова послідовність E є нейтральним елементом у тому розумінні, що $E*x=x$ для будь-якої числової або L-значної подвійної послідовності x.

Лема 22. *Нехай* $(W,p_{m,n})$ *– метод Вороного з пункту* 1.1.7 *– має твірні функції* $\dot p(x)=\dot p_a(x)/\dot p_\alpha(x)$ *і* $\ddot p(y)=\ddot p_b(y)/\ddot p_\beta(y)$, *причому число* 1 *є нулем кратності* $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$ *многочлена* $\dot p_\alpha(x)$ *і нулем кратності* $\beta_1\in\mathbb{N}_0$ *многочлена* $\ddot p_\beta(y)$. *Тоді існують многочлени* $\dot D_\xi(x)$ *і* $\ddot D_\eta(y)$ *такі, що функції* $\dot g(x)=\dot p(x)\dot D_\xi(x)$ *і* $\ddot g(y)=\ddot p(y)\ddot D_\eta(y)$ *мають вигляд:*

$$\left.\begin{aligned}\dot g(x)&=\sum_{m=0}^{\infty}g'_m x^m=(1-x)\sum_{m=0}^{\infty}G'_m x^m=\frac{\dot B_r(x)}{(1-x)^{\alpha_1}},\ |x|<1,\\ \ddot g(y)&=\sum_{n=0}^{\infty}g''_n y^n=(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}G''_n y^n=\frac{\ddot B_t(y)}{(1-y)^{\beta_1}},\ |y|<1.\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

При цьому метод $(W,g'_m g''_n)\in W_Q^2$, $P'_m\asymp G'_m\asymp m^{\alpha_1}$ *і* $P''_n\asymp G''_n\asymp n^{\beta_1}$.

□ Лема 22 випливає з леми 11. □

Лема 23. *Нехай* $(W,g'_m g''_n)$ *– метод з леми* 22,

$$\sum_{m=0}^{\infty}c'_m x^m=\frac{1}{\dot g(x)}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}g'_m x^m\right)^{-1},\ \sum_{n=0}^{\infty}c''_n y^n=\frac{1}{\ddot g(y)}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}g''_n y^n\right)^{-1},$$

$m_{k+1}\ge m_k^*>m_k\uparrow\infty$, $n_{k+1}\ge n_k^*>n_k\uparrow\infty$, $a'_{k,i}=0$, *коли* $i>m_k^*-m_k$, $a'_k=\sum\limits_{i=0}^{m_k^*-m_k}a'_{k,i}\ne 0$,

$a''_{k,j}=0$, *коли* $j>n_k^*-n_k$, $a''_k=\sum\limits_{j=0}^{n_k^*-n_k}a''_{k,j}\ne 0$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$. *Тоді*

$$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}c''_{n_k^*-n-j}a'_{k,i}a''_{k,j}\right)G'_mG''_nW_{m,n}^{(g)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{m_k^*-m_k}\sum_{n=0}^{n_k^*-n_k} a'_{k,m_k^*-m_k-m}a''_{k,n_k^*-n_k-n}S_{m_k+m,n_k+n} \quad \forall k\in\mathbb{N}_0 .$$

□ З означення послідовностей (c'_n) і (c''_n) випливає, що $g'_0c'_0=1$, $g''_0c''_0=1$, $\sum_{i=0}^{m} g'_{m-i}c'_i = 0 \quad \forall m\in\mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} g''_{n-j}c''_j = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, тобто $c' * g' = c'' * g'' = \bar{E}$, де $\bar{E}$ – нейтральний елемент однократної згортки. Тому за лемою 21, враховуючи, що $\bar{E}\odot\bar{E}=E$, і означення послідовностей $(W_{m,n}^{(g)})$, $(a'_{k,i})$ та $(a''_{k,j})$, будемо мати:

$$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}c''_{n_k^*-n-j}a'_{k,i}a''_{k,j}\right)G'_mG''_nW_{m,n}^{(g)} =$$

$$=\Big((c'\odot c'')*(a'\odot a'')*(G'\odot G'')W^{(g)}\Big)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$=\big((c'\odot c'')*(a'_k\odot a''_k)*(g'\odot g'')*S\big)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$=\big((c'\odot c'')*(g'\odot g'')*(a'_k\odot a''_k)*S\big)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$=\big(((c'*g')\odot(c''*g''))*(a'_k\odot a''_k)*S\big)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$=\Big((\bar{E}\odot\bar{E})*(a'_k\odot a''_k)*S\Big)_{m_k^*,n_k^*} =\Big((a'_k\odot a''_k)*S\Big)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$=\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}a'_{k,m_k^*-m}a''_{k,n_k^*-n}S_{m,n} = \sum_{m=0}^{m_k^*-m_k}\sum_{n=0}^{n_k^*-n_k} a'_{k,m_k^*-m_k-m}a''_{k,n_k^*-n_k-n}S_{m_k+m,n_k+n} \quad \forall k\in\mathbb{N}_0 . \, \square$$

Лема 24. *Нехай* $\dot{g}(x)$, $\ddot{g}(y)$, α_1, β_1, r, t *– з леми* 22, $m_{k+1}\ge m_k^* > m_k \uparrow\infty$, $n_{k+1}\ge n_k^* > n_k\uparrow\infty$, $h_k\equiv\left[\dfrac{m_k^*-m_k-r}{\alpha_1}\right]>0$ *при* $\alpha_1\ne 0$, $t_k\equiv\left[\dfrac{n_k^*-n_k-t}{\beta_1}\right]>0$ *при* $\beta_1\ne 0$ (*де через* $[x]$ *позначено цілу частину числа* $x\in\mathbb{R}$), $h_k\equiv 1$ *при* $\alpha_1=0$, $t_k\equiv 1$ *при* $\beta_1=0$ *і нехай*

$$\dot{R}_{\alpha_1h_k}(x)=(1-x^{h_k})^{\alpha_1}=\sum\nolimits_{i=0}^{\alpha_1h_k}\delta'_i(h_k)x^i \ , \ \ \sum\nolimits_{i=0}^{\infty}a'_{k,i}x^i=\dot{R}_{\alpha_1h_k}(x)\dot{g}(x),$$

$$\ddot{R}_{\beta_1t_k}(y)=(1-y^{t_k})^{\beta_1}=\sum\nolimits_{j=0}^{\beta_1t_k}\delta''_j(t_k)y^j \ , \ \ \sum\nolimits_{j=0}^{\infty}a''_{k,j}y^j=\ddot{R}_{\beta_1t_k}(y)\ddot{g}(y) \ \ \forall k\in\mathbb{N} .$$

Тоді

1) $a'_{k,i} \geq 0$, $a''_{k,j} \geq 0$ $\forall i, j, k \in \mathbb{N}_0$;

2) $a'_{k,i} = 0$, *коли* $i > \alpha_1(h_k - 1) + r$; $a''_{k,j} = 0$, *коли* $j > \beta_1(t_k - 1) + t$, $\forall k \in \mathbb{N}$;

3) $a'_k = \sum\limits_{i=0}^{m_k^*-m_k} a'_{k,i} = h_k^{\alpha_1}\dot{B}_r(1) > 0$, $a''_k = \sum\limits_{j=0}^{n_k^*-n_k} a''_{k,j} = t_k^{\beta_1}\ddot{B}_t(1) > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$;

4) $m_k^* - mh_k \geq m_k$, $n_k^* - nt_k \geq n_k$ $\forall m \in \overline{0,\alpha_1}$, $n \in \overline{0,\beta_1}$, $k \in \mathbb{N}$;

5) $$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}c''_{n_k^*-n-j}a'_{k,i}a''_{k,j}\right)G'_mG''_nW^{(g)}_{m,n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\beta_1}(-1)^{m+n}\binom{\alpha_1}{m}\binom{\beta_1}{n}G'_{m_k^*-mh_k}G''_{n_k^*-nt_k}W^{(g)}_{m_k^*-mh_k,\,n_k^*-nt_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□ У доведенні леми 12 показано, що

$$\delta'_i(h_k) = \begin{cases} 0, & \text{коли } i \neq mh_k \ \forall m \in \overline{0,\alpha_1}, \\ (-1)^m\binom{\alpha_1}{m}, & \text{коли } i = mh_k \text{ для деякого } m \in \overline{0,\alpha_1}, \end{cases}$$

$$\delta''_j(t_k) = \begin{cases} 0, & \text{коли } j \neq nt_k \ \forall n \in \overline{0,\beta_1}, \\ (-1)^n\binom{\beta_1}{n}, & \text{коли } j = nt_k \text{ для деякого } n \in \overline{0,\beta_1}, \end{cases}$$

$$a'_{k,n} = \sum_{i=0}^{n}\delta'_{n-i}(h_k)g'_i = \left(\delta'(h_k) * g'\right)_n, \quad a''_{k,n} = \left(\delta''(t_k) * g''\right)_n \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0,$$

і що твердження 1) – 4) леми 24 правильні $\forall \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{N}_0$.

Залишається довести рівність 5). Застосовуючи лему 21, дістанемо:

$$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}c''_{n_k^*-n-j}a'_{k,i}a''_{k,j}\right)G'_mG''_nW^{(g)}_{m,n} =$$

$$= \left((c' \odot c'') * (a'_k \odot a''_k) * (G' \odot G'')W^{(g)}\right)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$= \left(((c' * a'_k) \odot (c'' * a''_k)) * (G' \odot G'')W^{(g)}\right)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$= \left(((c' * \delta'(h_k) * g') \odot (c'' * \delta''(t_k) * g'')) * (G' \odot G'')W^{(g)}\right)_{m_k^*,n_k^*} =$$

$$= \left((\delta'(h_k)\odot\delta''(t_k)) * (G'\odot G'')W^{(g)}\right)_{m_k^*,n_k^*} = \sum_{i=0}^{m_k^*}\sum_{j=0}^{n_k^*}\delta_i'(h_k)\delta_j''(t_k)G'_{m_k^*-i}G''_{n_k^*-j}W^{(g)}_{m_k^*-i,n_k^*-j} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\beta_1}(-1)^{m+n}\binom{\alpha_1}{m}\binom{\beta_1}{n}G'_{m_k^*-mh_k}G''_{n_k^*-nt_k}W^{(g)}_{m_k^*-mh_k,n_k^*-nt_k} \quad \forall k\in\mathbb{N}_0 . \square$$

Зауваження. Лема 24 залишиться правильною, якщо h_k і t_k замінити на $\overline{h}_k$ і $\overline{t}_k$, відповідно, такі, що $1\le\overline{h}_k\le h_k$, $1\le\overline{t}_k\le t_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Лема 25. *Нехай* $(S_{m,n})$ – L*-значна послідовність,* ξ *та* $\eta\in\mathbb{N}_0$ – *фіксовані числа,* $(a'_{m,n})$ *і* $(a''_{m,n})$ – *дійсні матриці такі, що* $a'_{m,m-i}=0$ *при* $m>\xi$ *та* $i<m-\xi$, $a''_{n,n-j}=0$ *при* $n>\eta$ *та* $j<n-\eta$; *крім того,* $\left|a'_{m,m-i}\right|\le H$ $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $i\le m$, $\left|a''_{n,n-j}\right|\le H$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$, $j\le n$, *а послідовність* $(T_{m,n})$ *визначається рівністю*

$$T_{m,n}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}S_{i,j} \quad \forall m,n\in\mathbb{N}_0 .$$

Тоді якщо $S_{m,n}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $T_{m,n}=o(1)$ $\left(=O(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$.

□ Припустимо, що $S_{m,n}=o(1)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, і візьмемо довільний абсолютно опуклий окіл нуля U, а також зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$.

Відмітимо, що

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a'_{m,m-i}a''_{n,n-j} = \sum_{i=\max\{0,m-\xi\}}^{m}\ \sum_{j=\max\{0,n-\eta\}}^{n}a'_{m,m-i}a''_{n,n-j} \quad \forall m,n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left|a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}\right|\le(\xi+1)(\eta+1)H=:M \quad \forall m,n\in\mathbb{N}_0 .$$

Якщо при деякому $(i,j)\in\mathbb{N}_0^2$ $S_{k,l}\in\frac{\varepsilon}{M}U$ для всіх індексів (k,l) з діапазону $\max\{i-\xi,0\}\le k\le i$, $\max\{j-\eta,0\}\le l\le j$, то

$$T_{i,j}=\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}S_{i,j}\in\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}\right)\frac{\varepsilon}{M}U\subset$$

$$\subset\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\left|a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}\right|\right)\frac{\varepsilon}{M}U\subset M\cdot\frac{\varepsilon}{M}U=\varepsilon U .$$

Позначимо $\nu_{m,n}$ кількість індексів $(i,j)\le(m,n)$ таких, що $S_{i,j}\notin\frac{\varepsilon}{M}U$, а $(i^{(1)}_{m,n},j^{(1)}_{m,n})$, $(i^{(2)}_{m,n},j^{(2)}_{m,n})$, …, $(i^{(\nu_{m,n})}_{m,n},j^{(\nu_{m,n})}_{m,n})$ – самі ці індекси. Оскільки $S_{m,n}=o(1)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, то для околу U/M правильна рівність (2.14) з $p'_n\equiv p''_n\equiv 1$, тобто

$$\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\sum_{(i,j)\le(m,n):\,S_{i,j}\notin\frac{\varepsilon}{M}U}1^{i+j}=\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\nu_{m,n}\to 0\ \ (m,n\to\infty).$$

Викинемо з прямокутника $\Delta_{m,n}=\overline{0,m}\times\overline{0,n}$ прямокутники

$$\Delta^{(\nu)}_{m,n}=\overline{i^{(\nu)}_{m,n},i^{(\nu)}_{m,n}+\xi}\times\overline{j^{(\nu)}_{m,n},j^{(\nu)}_{m,n}+\eta}\quad\forall\nu\in\overline{1,\nu_{m,n}}.$$

Загальна кількість викинутих мультиіндексів при фіксованому (m,n) не перевищує $(\xi+1)(\eta+1)\nu_{m,n}$. При цьому, якщо (i,j) – який-небудь мультиіндекс з тих, що залишилися в $\Delta_{m,n}$ після викидання прямокутників $\Delta^{(\nu)}_{m,n}$ $\forall\nu\in\overline{1,\nu_{m,n}}$, то $S_{k,l}\in\frac{\varepsilon}{M}U$ $\forall(k,l)$: $\max\{i-\xi,0\}\le k\le i$, $\max\{j-\eta,0\}\le l\le j\Rightarrow T_{i,j}\in\varepsilon U$. Тому

$$\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\sum_{(i,j)\le(m,n):\,T_{i,j}\notin\varepsilon U}1^{i+j}\le\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\sum_{(i,j)\le(m,n):\,(i,j)\in\bigcup\limits_{\nu=1}^{\nu_{m,n}}\Delta^{(\nu)}_{m,n}}1^{i+j}\le$$

$$\le\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}(\xi+1)(\eta+1)\nu_{m,n}\to 0\ \ (m,n\to\infty).$$

Це означає, що $T_{m,n}=o(1)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$. Доведення леми 25 для умови "O" відрізняється тільки вибором числа $\varepsilon>0$. □

Лема 26. *Нехай* $(W_{m,n})$ – L*-значна послідовність,* U – *абсолютно опуклий окіл нуля,* (σ'_n), (σ''_n) – *додатні послідовності, що задовольняють умови* (2.16) *і* (2.17), $m_{k+1}\ge m^*_k>\bar{m}_k>m_k\uparrow\infty$, $n_{k+1}\ge n^*_k>\bar{n}_k>n_k\uparrow\infty$, $m^*_k/m_k\le 2$, $n^*_k/n_k\le 2$, $\sigma'_{\bar{m}_k}(1-m_k/\bar{m}_k)\ge\delta>0$, $\sigma'_{m^*_k}(1-\bar{m}_k/m^*_k)\ge\delta$, $\sigma''_{\bar{n}_k}(1-n_k/\bar{n}_k)\ge\delta$, $\sigma''_{n^*_k}(1-\bar{n}_k/n^*_k)\ge\delta$,

$$h_k=\begin{cases}\left[\dfrac{\bar{m}_k-m_k-r}{\alpha}\right], & \alpha\ne 0,\\ 1, & \alpha=0,\end{cases}\qquad t_k=\begin{cases}\left[\dfrac{\bar{n}_k-n_k-t}{\beta}\right], & \beta\ne 0,\\ 1, & \beta=0,\end{cases}\qquad\forall k\in\mathbb{N},$$

де α, β, r, $t \in \mathbb{N}_0$ *– задані числа, а через* $[x]$ *позначено цілу частину числа* $x \in \mathbb{R}$. *Припустимо, що при деякому* $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{\sigma'_m \sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j)\le(m,n):\,W_{i,j}\notin\varepsilon U} 1^{i+j} = 0 . \tag{2.19}$$

Тоді $\exists (m'_k)$, (n'_k) *і* $k^* \in \mathbb{N}$: $\bar{m}_k \le m'_k \le m^*_k$, $\bar{n}_k \le n'_k \le n^*_k$: $W_{m'_k - mh_k,\, n'_k - nt_k} \in \varepsilon U$ $\forall (m,n) \in \overline{0,\alpha} \times \overline{0,\beta}$ $\forall k > k^*$.

□ З умов (2.16), (2.17) внаслідок того, що $m^*_k / m_k \le 2$ і $n^*_k / n_k \le 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, випливає: $\exists \delta_1 > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1}(m^*_k - \bar{m}_k + 1) = \frac{m^*_k}{m^*_k+1}\sigma'_{m^*_k}\left(1 - \frac{\bar{m}_k}{m^*_k}\right) + \frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1} \ge \delta_1 ,$$

$$\frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1}(n^*_k - \bar{n}_k + 1) = \frac{n^*_k}{n^*_k+1}\sigma''_{n^*_k}\left(1 - \frac{\bar{n}_k}{n^*_k}\right) + \frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1} \ge \delta_1 ,$$

у випадку $\alpha \ne 0$

$$\frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1} h_k > \frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1}\left(\frac{\bar{m}_k - m_k - r}{\alpha} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sigma'_{m^*_k}}{\sigma'_{\bar{m}_k}} \cdot \frac{\bar{m}_k}{m^*_k+1} \cdot \sigma'_{\bar{m}_k}\left(1 - \frac{m_k}{\bar{m}_k}\right) \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1}\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) \ge \delta_1 ,$$

у випадку $\beta \ne 0$

$$\frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1} t_k > \frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1}\left(\frac{\bar{n}_k - n_k - t}{\beta} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sigma''_{n^*_k}}{\sigma''_{\bar{n}_k}} \cdot \frac{\bar{n}_k}{n^*_k+1} \cdot \sigma''_{\bar{n}_k}\left(1 - \frac{n_k}{\bar{n}_k}\right) \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1}\left(\frac{t}{\beta} + 1\right) \ge \delta_1 \;\; \forall k > k_0 .$$

Позначимо $m^{**}_k = \min\{\bar{m}_k + h_k - 1, m^*_k\}$, $n^{**}_k = \min\{\bar{n}_k + t_k - 1, n^*_k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, коли $\alpha \ne 0$ і $\beta \ne 0$. Якщо $\alpha = 0$, покладемо $m^{**}_k \equiv m^*_k$, а якщо $\beta = 0$, то покладемо $n^{**}_k \equiv n^*_k$. З чотирьох встановлених вище нерівностей випливають дві наступні:

$$\frac{\sigma'_{m^*_k}}{m^*_k+1}(m^{**}_k - \bar{m}_k + 1) \ge \delta_1 \;\text{ і }\; \frac{\sigma''_{n^*_k}}{n^*_k+1}(n^{**}_k - \bar{n}_k + 1) \ge \delta_1 \;\; \forall k > k_0 . \tag{2.20}$$

Припустимо, що $\exists k_s \uparrow \infty$: $\forall i \in \overline{\bar{m}_k, m_k^{**}}$ $\exists \alpha_i \in \overline{0, \alpha}$:

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*} : W_{i-\alpha_i h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^j \geq \frac{\delta_1}{\alpha + 1} \quad \forall k = k_s .$$

Зауважимо, що при фіксованому $k = k_s$ усі індекси $i - \alpha_i h_k$, де $i \in \overline{\bar{m}_k, m_k^{**}}$, попарно різні. Справді, при $\alpha = 0$ буде $i - \alpha_i h_k = i$. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то рівність $i - \alpha_i h_k = j - \alpha_j h_k$ при деяких $i, j \in \overline{\bar{m}_k, m_k^{**}}$ таких, що $i < j$, неможлива, бо з неї випливає, що $h_k = \dfrac{j - i}{\alpha_j - \alpha_i} \leq j - i \leq m_k^{**} - \bar{m}_k \leq h_k - 1$, тобто нонсенс.

Далі, враховуючи (2.20), маємо:

$$\frac{\sigma'_{m_k^*} \sigma''_{n_k^*}}{(m_k^* + 1)(n_k^* + 1)} \sum_{(i, j) \leq (m_k^*, n_k^*) : W_{i, j} \notin \varepsilon U} 1^{i+j} \geq \frac{\sigma'_{m_k^*} \sigma''_{n_k^*}}{(m_k^* + 1)(n_k^* + 1)} \sum_{i = \bar{m}_k}^{m_k^{**}} \sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*} : W_{i-\alpha_i h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^j =$$

$$= \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^* + 1} \sum_{i = \bar{m}_k}^{m_k^{**}} \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*} : W_{i-\alpha_i h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^j \geq \frac{\delta_1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^* + 1} (m_k^{**} - \bar{m}_k + 1) \geq \frac{\delta_1^2}{\alpha + 1}$$

$\forall k = k_s > k_{s_1}$. Дістали протиріччя з умовою (2.19).

Отже, $\exists k_* \geq k_0$: $\forall k > k_*$ $\exists m'_k \in \overline{\bar{m}_k, m_k^{**}}$: $\forall m \in \overline{0, \alpha}$

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*} : W_{m'_k - m h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^j < \frac{\delta_1}{\alpha + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{(m, j) \in \overline{0, \alpha} \times \overline{n_k, n_k^*} : W_{m'_k - m h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^{m+j} < \delta_1 \quad \forall k > k_* . \tag{2.21}$$

Припустимо тепер, що

$$\exists k_s \uparrow \infty : \ \forall j \in \overline{\bar{n}_k, n_k^{**}} \ \ \exists \alpha_j \in \overline{0, \alpha}, \ \beta_j \in \overline{0, \beta} : \ W_{m'_k - \alpha_j h_k, j - \beta_j t_k} \notin \varepsilon U .$$

Підкреслимо, що при фіксованому $k = k_s$ усі індекси $j - \beta_j t_k$, де $j \in \overline{\bar{n}_k, n_k^{**}}$, попарно різні (схожу ситуацію ми розглядали вище). Тому, враховуючи (2.20),

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{(m, j) \in \overline{0, \alpha} \times \overline{n_k, n_k^*} : W_{m'_k - m h_k, j} \notin \varepsilon U} 1^{m+j} \geq$$

$$\geq \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} \sum_{j=\bar{n}_k}^{n_k^{**}} 1^j = \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^* + 1} (n_k^{**} - \bar{n}_k + 1) \geq \delta_1 \quad \forall k = k_s > k_{s_2} .$$

Дістали суперечність з доведеною вище нерівністю (2.21). Звідси випливає, що

$$\exists k^* \geq k_* : \forall k > k^* \;\; \exists n'_k \in \overline{\bar{n}_k , n_k^{**}} \subset \overline{\bar{n}_k , n_k^*} : W_{m'_k - mh_k , n'_k - nt_k} \in \varepsilon U \quad \forall (m,n) \in \overline{0,\alpha} \times \overline{0,\beta} . \; □$$

2.6.2. *D*-властивість методів Вороного класу W_Q^2. Основним результатом підрозділу 2.6 є наступна теорема 19, яку можна назвати *статистичною D-властивістю методів Вороного.*

Теорема 19. *Нехай* $(W, p_{m,n})$ *– метод Вороного з пункту* 1.1.7 *– має твірні функції* $\dot{p}(x) = \dot{p}_a(x) / \dot{p}_\alpha(x)$ *і* $\ddot{p}(y) = \ddot{p}_b(y) / \ddot{p}_\beta(y)$, *причому число* 1 *є нулем кратності* $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\dot{p}_\alpha(x)$ *і нулем кратності* $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\ddot{p}_\beta(y)$. *Тоді якщо точка* $z = \theta$ (*точка* $z = \infty$) *є* $D(1, \mu^{(\alpha_1, \beta_1)}, \sigma)$*-точкою послідовності* $(S_{m,n})$, *то* $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} \neq o(1)$ $\left(\neq O(1)\right)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$.

□ Нехай $z = \infty$ є $D(1, \mu^{(\alpha_1, \beta_1)}, \sigma)$-точкою послідовності $(S_{m,n})$. За означенням і зауваженнями пункту 2.4.1 $\exists (m_k)$, (m_k^*), (n_k), (n_k^*), $a_k \geq 0$, $\varphi_k \in L^*$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ та абсолютно опуклий окіл нуля U такі, що $m_{k+1} \geq m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \geq n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $m_k^* / m_k \leq 2$, $n_k^* / n_k \leq 2$, $\sigma'_{m_k^*} (1 - m_k / m_k^*) \geq \delta$, $\sigma''_{n_k^*} (1 - n_k^* / n_k) \geq \delta$ $\forall k \in \mathbb{N}$, причому $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \;\; \varphi_k (\mu_{m_k , n_k}^{(\alpha_1, \beta_1)} S_{m,n}) \geq a_k > 0 \;\; \forall (m,n) \in \overline{m_k , m_k^*} \times \overline{n_k , n_k^*}$ $\forall k > k_0$, а $\varphi_k (\varepsilon U) < a_k$ $\forall k > k_0$.

Припустимо, що $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} = O(1)$ $((1,\sigma)^*\text{-st})$, всупереч з тим, що треба довести. За лемою 22 існує метод $(W, g'_m g''_n) \in W_Q^2$ з твірними функціями $\dot{g}(x)$ і $\ddot{g}(y)$ вигляду (2.18), причому існують многочлени $\dot{D}_\xi (x) = d'_0 + d'_1 x + \ldots + d'_\xi x^\xi$ і $\ddot{D}_\eta (y) = d''_0 + d''_1 y + \ldots + d''_\eta y^\eta$ такі, що $\dot{g}(x) = \dot{p}(x) \dot{D}_\xi (x)$, а $\ddot{g}(y) = \ddot{p}(y) \ddot{D}_\eta (y)$. Довизначивши послідовності (d'_m) і (d''_n) рівностями $d'_m = 0$ при $m > \xi$, $d''_n = 0$ при $n > \eta$, і використовуючи означення та властивості згорток і тензорного добутку (лема 21), можемо записати:

$$W^{(g)}=\frac{1}{G'\odot G''}\big((g'\odot g'')*S\big)=\frac{1}{G'\odot G''}\big(((p'*d')\odot(p''*d''))*S\big)=$$

$$=\frac{1}{G'\odot G''}\big((d'\odot d'')*(p'\odot p'')*S\big)=\frac{1}{G'\odot G''}\Big((d'\odot d'')*(P'\odot P'')W^{(p)}\Big)\Rightarrow$$

$$\lambda_{m,n}W^{(g)}_{m,n}=\lambda_{m,n}\cdot\frac{P'_mP''_n}{G'_mG''_n}\cdot\frac{1}{P'_mP''_n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}d'_{m-i}d''_{n-j}P'_iP''_jW^{(p)}_{i,j}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}\lambda_{i,j}W^{(p)}_{i,j}\,,$$

де $a'_{m,m-i}=\frac{P'_m}{G'_m}\cdot\frac{P'_i}{P'_m}\cdot\frac{\lambda'_m}{\lambda'_i}\cdot d'_{m-i}\quad\forall m\in\mathbb{N}_0,\ i\in\overline{0,m};\ a''_{n,n-j}=\frac{P''_n}{G''_n}\cdot\frac{P''_j}{P''_n}\cdot\frac{\lambda''_n}{\lambda''_j}\cdot d''_{n-j}\quad\forall n\in\mathbb{N}_0$, $j\in\overline{0,n}$.

Помічаємо, що $a'_{m,m-i}=0$ при $m>\xi$ та $i<m-\xi$; $a''_{n,n-j}=0$ при $n>\eta$ та $j<n-\eta$. При цьому за лемою 22 $P'_m\asymp G'_m$, $P''_n\asymp G''_n$. До того ж, $P'_i\le P'_m$ при $i\le m$, $P''_j\le P''_n$ при $j\le n$, а за умовою (2.16) $\exists c>0$: $\lambda'_m/\lambda'_i\le c$ і $\lambda''_n/\lambda''_j\le c$, коли $\max\{m-\xi,0\}\le i\le m$, $\max\{n-\eta,0\}\le j\le n$. Тому $\exists H>0$: $\left|a'_{m,m-i}\right|\le H\quad\forall m\in\mathbb{N}_0$, $i\le m$; $\left|a''_{n,n-j}\right|\le H\quad\forall n\in\mathbb{N}_0$, $j\le n$. Отже, виконано всі умови леми 25, за якою дістаємо, що $\lambda_{m,n}W^{(g)}_{m,n}=O(1)\ \ ((1,\sigma)^*\text{-st})$.

Візьмемо окіл нуля U з означення $(1,\mu^{(\alpha_1,\beta_1)},\sigma)$-точки $z=\infty$, наведеного з самого початку. Для нього $\exists\varepsilon>0$:

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\sum_{(i,j)\le(m,n):\,\lambda_{i,j}W^{(g)}_{i,j}\notin\varepsilon U}1^{i+j}=0\,.$$

Ми вже впритул підійшли до застосування леми 26, але ще не вистачає послідовностей $(\overline{m}_k)$ і $(\overline{n}_k)$ таких, що $m_k<\overline{m}_k<m^*_k$, $n_k<\overline{n}_k<n^*_k$, $\sigma'_{\overline{m}_k}(1-m_k/\overline{m}_k)\ge\delta_1$, $\sigma'_{m^*_k}(1-\overline{m}_k/m^*_k)\ge\delta_1$, $\sigma''_{\overline{n}_k}(1-n_k/\overline{n}_k)\ge\delta_1$, $\sigma''_{n^*_k}(1-\overline{n}_k/n^*_k)\ge\delta_1$ $\forall k>k_*$ ($\delta_1>0$). Неважко показати (майже таке саме стверджується у лемі 19), що такі послідовності існують. Оскільки $\overline{m}_k-m_k\to\infty$ і $\overline{n}_k-n_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ (див. зауваження 2 пункту 2.1.3), то можна вважати, що $\overline{m}_k-m_k>r$, $\overline{n}_k-n_k>t$,

$h_k := \left[\dfrac{\bar{m}_k - m_k - r}{\alpha_1} \right] > 0$ (у випадку $\alpha_1 \neq 0$), $t_k := \left[\dfrac{\bar{n}_k - n_k - t}{\beta_1} \right] > 0$ (у випадку $\beta_1 \neq 0$) $\forall k > k_*$. Якщо $\alpha_1 = 0$, покладемо $h_k \equiv 1$, а при $\beta_1 = 0$ $t_k \equiv 1$.

Нарешті, за лемою 26 $\exists (m'_k)$ і (n'_k): $\bar{m}_k \le m'_k \le m^*_k$, $\bar{n}_k \le n'_k \le n^*_k$ $\forall k > k_*$, причому $\lambda_{m'_k - mh_k, n'_k - nt_k} W^{(g)}_{m'_k - mh_k, n'_k - nt_k} \in \varepsilon U$ $\forall (m,n) \in \overline{0,\alpha_1} \times \overline{0,\beta_1}$ $\forall k > k_*$. Для спрощення подальших міркувань перепозначимо $m^*_k := m'_k$, $n^*_k := n'_k$. Після цього послідовності (m^*_k) та (n^*_k) збережуть усі свої попередні властивості (тільки δ треба замінити на δ_1) і набудуть ще одну:

$$\lambda_{m^*_k - mh_k, n^*_k - nt_k} W^{(g)}_{m^*_k - mh_k, n^*_k - nt_k} \in \varepsilon U \quad \forall (m,n) \in \overline{0,\alpha_1} \times \overline{0,\beta_1},\ k > k_*. \tag{2.22}$$

Якщо подивитись на наші h_k і t_k, і на ті, що в лемі 24, то зараз вони в нас, можливо, “трохи менші”, ніж там. Через це ми використаємо лему 24 разом із зауваженням до неї і лему 23, за якими буде справедливою тотожність:

$$\frac{\sum\limits_{m=0}^{m^*_k - m_k} \sum\limits_{n=0}^{n^*_k - n_k} a'_{k, m^*_k - m_k - m} a''_{k, n^*_k - n_k - n} \mu^{(\alpha_1, \beta_1)}_{m_k, n_k} S_{m_k + m, n_k + n}}{h_k^{\alpha_1} t_k^{\beta_1} \dot{B}_r(1) \ddot{B}_t(1)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\sum\limits_{m=0}^{\alpha_1} \sum\limits_{n=0}^{\beta_1} (-1)^{m+n} \binom{\alpha_1}{m} \binom{\beta_1}{n} G'_{m^*_k - mh_k} G''_{n^*_k - nt_k} \dfrac{\lambda'_{m_k}}{\lambda'_{m^*_k - mh_k}} \dfrac{\lambda''_{n_k}}{\lambda''_{n^*_k - nt_k}} \lambda_{m^*_k - mh_k, n^*_k - nt_k} W^{(g)}_{m^*_k - mh_k, n^*_k - nt_k}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} h_k^{\alpha_1} t_k^{\beta_1} \dot{B}_r(1) \ddot{B}_t(1)}, \tag{2.23}$$

де $\dot{B}_r(x)$ і $\ddot{B}_t(y)$ – многочлени, які фігурують у представленнях (2.18) твірних функцій методу $(W, g'_m g''_n)$; $a'_{k,i} \ge 0$, $a''_{k,j} \ge 0$ $\forall i, j, k \in \mathbb{N}_0$, $\sum\limits_{i=0}^{m^*_k - m_k} a'_{k,i} = h_k^{\alpha_1} \dot{B}_r(1) > 0$, $\sum\limits_{j=0}^{n^*_k - n_k} a''_{k,j} = t_k^{\beta_1} \ddot{B}_t(1) > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Легко бачити, що $m_k \le m^*_k - mh_k \le m^*_k$, $n_k \le n^*_k - nt_k \le n^*_k$ $\forall (m,n) \in \overline{0,\alpha_1} \times \overline{0,\beta_1}$ $\forall k > k_*$, а оскільки $m^*_k / m_k \le 2$ і $n^*_k / n_k \le 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{1}{2} \le \frac{m_k}{m^*_k} \le \frac{m^*_k - mh_k}{\bar{m}_k} \le \frac{m^*_k}{m_k} \le 2 \ \text{ і } \ \frac{1}{2} \le \frac{n^*_k - nt_k}{\bar{n}_k} \le 2 \ \forall k > k_*.$$

За лемою 22 $G_n' \asymp n^{\alpha_1}$, $G_n'' \asymp n^{\beta_1}$, тому

$$G'_{m_k^*-mh_k} \asymp (m_k^*-mh_k)^{\alpha_1} = \left(\frac{m_k^*-mh_k}{\bar{m}_k}\right)^{\alpha_1} \cdot \bar{m}_k^{\alpha_1} \asymp \bar{m}_k^{\alpha_1},$$

$$G''_{n_k^*-nt_k} \asymp (n_k^*-nt_k)^{\beta_1} = \left(\frac{n_k^*-nt_k}{\bar{n}_k}\right)^{\beta_1} \cdot \bar{n}_k^{\beta_1} \asymp \bar{n}_k^{\beta_1}.$$

Також, в силу умови (2.16) $\lambda'_{m_k^*-mh_k} \asymp \lambda'_{m_k}$ і $\lambda''_{n_k^*-nt_k} \asymp \lambda''_{n_k}$.

Якщо позначимо праву частину тотожності (2.23) Γ_k, то з умови (2.22) за властивостями абсолютно опуклих множин дістанемо:

$$\Gamma_k \subset \left(\frac{\sum_{m=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{m} G'_{m_k^*-mh_k} \dfrac{\lambda'_{m_k}}{\lambda'_{m_k^*-mh_k}}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \dot{B}_r(1)} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\beta_1} \binom{\beta_1}{n} G''_{n_k^*-nt_k} \dfrac{\lambda''_{n_k}}{\lambda''_{n_k^*-nt_k}}}{\sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1} \ddot{B}_t(1)} \right) \varepsilon U \subset \frac{H_1 \bar{m}_k^{\alpha_1} \bar{n}_k^{\beta_1}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1}} \varepsilon U \quad \forall k > k_*.$$

У випадку $\alpha_1 \neq 0$ на підставі співвідношень $\sigma'_{\bar{m}_k}(1-m_k/\bar{m}_k) \geq \delta_1$, $\sigma'_{m_k} \asymp \sigma'_{\bar{m}_k}$ та $\sigma'_n = o(n)$ матимемо:

$$\frac{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1}}{\bar{m}_k^{\alpha_1}} > \frac{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k}}{\bar{m}_k^{\alpha_1}} \left(\frac{\bar{m}_k - m_k - r}{\alpha_1} - 1 \right)^{\alpha_1} = \left(\sigma'_{m_k}(1 - \frac{m_k}{\bar{m}_k}) \cdot \frac{1}{\alpha_1} - \frac{\sigma'_{m_k}}{\bar{m}_k} (\frac{r}{\alpha_1} + 1) \right)^{\alpha_1} \geq \delta_2 > 0$$

$\forall k > k^*$. Аналогічно, якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\dfrac{\sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1}}{\bar{n}_k^{\beta_1}} > \delta_2 > 0 \;\; \forall k > k^*$.

Звідси випливає, що $\exists H_2 > 0$:

$$\frac{H_1 \bar{m}_k^{\alpha_1} \bar{n}_k^{\beta_1}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1}} \leq H_2 \quad \forall k > k^* \geq k_* \Rightarrow \Gamma_k \in H_2 \varepsilon U \quad \forall k > k^*.$$

За найпершим абзацом нашого доведення $\exists k_1 > k^*$: $\varphi_k(H_2 \varepsilon U) < a_k$, зокрема, $\varphi_k(\Gamma_k) < a_k \;\; \forall k > k_1$. Разом з цим

$$\varphi_k(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m_k,n_k} S_{m,n}) \geq a_k \quad \forall (m,n) \in \overline{m_k, m_k^*} \times \overline{n_k, n_k^*} \quad \forall k > k_1.$$

Але з останньої нерівності, якщо подіяти функціоналом φ_k на ліву частину тотожності (2.23), легко випливає, що $\varphi_k(\Gamma_k) \geq a_k \;\; \forall k > k_1$. Отримали протиріччя, яке доводить теорему 19 в частині обмеженості.

Доведення теореми 19 для умови "o" аналогічне. □

Теорема 19 узагальнює основну теорему роботи [20], у якій розглядаються подвійні методи Чезаро $(C,\alpha,\beta)\subset W_Q^2$, числові послідовності, звичайна збіжність, причому $\lambda_n \equiv \sigma_n \equiv 1$.

2.6.3. Тауберові теореми із залишком для методів Вороного класу W_Q^2.

З теореми 19 і лем 15 та 16 випливає наступна теорема.

Теорема 20. *Нехай метод Вороного* $(W, p_{m,n})$ *і числа* $\alpha_1,\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ *– з теореми* 19, $m_k \uparrow \infty$, $n_k \uparrow \infty$ *і виконується принаймні одна з умов* 1) – 14) *пункту* 2.4.2, *де* $\mu'_m \equiv \mu'^{(\alpha_1)}_m$, $\mu''_n \equiv \mu''^{(\beta_1)}_n$, $\mu_{m,n} \equiv \mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m,n}$. *Тоді*

I) *якщо* $W^{(p)}_{m,n} = O(1)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} = O(1)$ $(k\to\infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13) *з* $r=0$ *або* 14) *і* $W^{(p)}_{m,n} = o(1)$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то*

$$\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m_k,n_k} S_{m_k,n_k} \overset{C}{=} o(1) \ (k\to\infty);$$

III) *якщо в* 1) $G=\{\theta\}$, *у* 2), 5) – 9) *і* 13) $r=0$, *у* 13) *і* 14) *простір* L *обмежено компактний і* $W^{(p)}_{m,n} \to a$ $((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $S_{m_k,n_k} = a + o\left(1/\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m_k,n_k}\right)$ $(k\to\infty)$.

Наслідок 19. *За умов теореми* 19 *якщо множина* $\bar{G}\subset\mathbb{C}$ *є* (c)*-множиною комплексної послідовності* $(S_{m,n})$, а $W^{(p)}_{m,n}\to S$ $((1,1,1)^*\text{-st})$, *то* $S\in\bar{G}$.

Зауваження. Поняття (c)-множини подвійної послідовності зрозуміле з пунктів 2.1.1 і 2.4.1. Відповідне означення вперше сформульоване М. О. Калаталовою у роботі [20].

□ Наслідок 19 доводиться так само, як і наслідок 15. □

Використовуючи умову 4) пункту 2.4.1, сформулюємо ще декілька наслідків з теореми 20.

Наслідок 20. *Нехай метод Вороного* $(W, p_{m,n})$ *і числа* $\alpha_1,\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ *– з теореми* 19, $m_k \uparrow \infty$, $n_k \uparrow \infty$, *а дійсна послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє умову*:

$$\mu'^{(\alpha_1)}_m (S_{m,n} - S_{m-1,n}) = O_L(\sigma'_m / m) \ \ і \ \ \mu''^{(\beta_1)}_n (S_{m,n} - S_{m,n-1}) = O_L(\sigma''_n / n),$$

коли $(m,n)\in\overline{\bar{m}_k,\tilde{m}_k}\times\overline{\bar{n}_k,\tilde{n}_k}=:\Delta_k$, $k>k_0$,

причому $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=\bar{m}_k+1}^{\tilde{m}_k}\sigma'_\nu/\nu>0$ *і* $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=\bar{n}_k+1}^{\tilde{n}_k}\sigma''_\nu/\nu>0$.

Тоді $W_{m,n}^{(p)}=O(1)\left(=o(1)\right)\,((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})\Rightarrow\mu_{m_k,n_k}^{(\alpha_1,\beta_1)}S_{m_k,n_k}=O(1)\left(=o(1)\right)\,(k\to\infty)$.

Наслідок 21. *Нехай в умовах наслідку* 20 $\sigma'_n\equiv\sigma''_n\equiv\ln^2 n$, *а* $\mu_n'^{(\alpha_1)}\equiv\mu_n''^{(\beta_1)}\equiv$ $\equiv\ln n$, *тобто*

$$S_{m,n}-S_{m-1,n}=O_L(\ln m/m)\ \ i\ \ S_{m,n}-S_{m,n-1}=O_L(\ln n/n),\ \text{коли}\ (m,n)\in\Delta_k,\ k>k_0.$$

Тоді якщо $W_{m,n}^{(p)}=O(1)$ $\left(=o(1)\right)$ $((1,m^{\gamma_1}n^{\gamma_2},\sigma)^*\text{-st})$ *при деяких* $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$, *то* $S_{m_k,n_k}\ln m_k\ln n_k=O(1)$ $\left(=o(1)\right)$ $(k\to\infty)$.

Наслідок 22. *Нехай в умовах наслідку* 20 $\lambda'_m\equiv\sigma_m'^{\alpha_1+1}$, $\lambda''_n\equiv\sigma_n''^{\beta_1+1}$, *тобто*

$$S_{m,n}-S_{m-1,n}=O_L(1/m)\ \ i\ \ S_{m,n}-S_{m,n-1}=O_L(1/n),\ \text{коли}\ (m,n)\in\Delta_k,\ k>k_0.$$

Тоді $W_{m,n}^{(p)}=O(1)\left(=o(1)\right)\,((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})\Rightarrow\lambda_{m_k}'^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\lambda_{n_k}''^{\frac{1}{\beta_1+1}}S_{m_k,n_k}=O(1)\left(=o(1)\right)\,(k\to\infty)$.

□ Наслідки 20 – 22 доводяться аналогічно до наслідків 16 – 18. □

З теореми 19 і лем 17 та 18 випливає наступна теорема.

Теорема 21. *Нехай метод Вороного* $(W,p_{m,n})$ *і числа* $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{N}_0$ *– з теореми* 19, *а послідовність* $(S_{m,n})$ *задовольняє принаймні одну з умов* 1*) – 8*), 13*), 14*) *пункту* 2.4.2, *де* $\mu'_m\equiv\mu_m'^{(\alpha_1)}$, $\mu''_n\equiv\mu_n''^{(\beta_1)}$, $\mu_{m,n}\equiv\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)}$. *Тоді*

I) *якщо* $W_{m,n}^{(p)}=O(1)\,((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, то $\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)}=O(1)$ $(m,n\to\infty)$;

II) *якщо виконується умова* 13*) *з* $r=0$ *або* 14*) *і* $W_{m,n}^{(p)}=o(1)\,((1,\lambda,\sigma)^*\text{-st})$, *то* $\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)}S_{m,n}\overset{C}{=}o(1)$ $(m,n\to\infty)$;

III) *якщо в* 1*) $G=\{\theta\}$, *у* 2*), 5*) – 8*) *і* 13*) $r=0$, *у* 13*) *і* 14*) *простір* L *обмежено компактний і* $W_{m,n}^{(p)}\to a$ $((p,\lambda,\sigma)\text{-st})$, *то* $S_{m,n}=a+o\left(1/\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)}\right)$ $(m,n\to\infty)$.

Твердження пункту 2.6.3 узагальнюють результати роботи [21].

Висновки до другого розділу. Огляд літератури, зроблений на початку другого розділу, показав, що різні автори по-різному узагальнювали класичні тауберові теореми: переходили від числових послідовностей та функцій до векторнозначних; від однократних – до n-кратних; вивчали нові види збіжності; враховували швидкість збіжності тощо. За кожним з цих напрямів роботи можна знайти нерозв'язані питання. Особливо цікаві задачі виникають при поєднанні кількох напрямів узагальнення. Найпотужнішим способом одержання тауберових теорем виявився "спосіб (c)-точок", винайдений М. О. Давидовим та удосконалений Г. О. Михаліним.

Другий розділ дисертації присвячено доведенню статистичних (у яких замість звичайної збіжності середніх береться статистична збіжність) D-властивостей (так би мовити, джерел тауберових теорем) і статистично підсилених тауберових теорем із залишком для деяких методів підсумовування простих і подвійних послідовностей, що набувають значень з лінійного топологічного простору L. Розв'язано такі конкретні задачі:

1) перенесено D-властивість і тауберові теореми із залишком, доведені Г. О. Михаліним для методів (H,p,α) і (C,p,α), на випадок статистичної збіжності або обмеженості середніх;
2) перенесено в загальнішій формі на L-значні послідовності D-властивість методів підсумовування Вороного класу W_Q, знайдену Л. Ф. Таргонським, і одержано статистично підсилені тауберові теореми із залишком для цих методів підсумовування;
3) перенесено на L-значні послідовності і статистично підсилено відомі D-властивості і тауберові теореми із залишком для подвійних методів Ріса;
4) вперше знайдено D-властивість та доведено тауберові теореми із залишком для подвійних методів підсумовування Вороного класу W_Q^2, причому одразу для L-значних послідовностей та при умові статистичної збіжності або обмеженості середніх.

Основні результати розділу 2 викладено у роботах [79], [81] – [83].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація є теоретичним дослідженням, яке присвячене теоремам типу Мерсера і типу Таубера й має узагальнюючий, уточнюючий та доповнюючий характер.

Поставлена у роботі мета досягнута, завдання повністю виконані. Розв'язано такі наукові задачі:

1) підсилено мерсерові теореми М. О. Давидова для послідовностей і для функцій шляхом з'ясування необхідних та необхідних і достатніх умов; усі результати доведені для банаховозначних послідовностей і функцій;
2) узагальнено одну мерсерову теорему Рогозинських шляхом розгляду більш загального, ніж $\mathbb{R}^n$, – а саме довільного скінченновимірного нормованого простору L_n, шляхом заміни числового ряду функціональним, а звичайного поняття границі функції – поняттям границі за системою множин U_r;
3) введено поняття (p,μ,σ)-статистичної збіжності та обмеженості простих і подвійних послідовностей, що набувають значень з лінійного топологічного простору L. Для однократних послідовностей ці поняття узагальнюють поняття статистичної збіжності, яку розглядали Х. Фаст, Дж. Фрайді і М. Хан, а для подвійних вони вводяться вперше;
4) сформульовано означення $D(p,\mu,\sigma)$-точок у більш зручній формі, ніж у Г. О. Михаліна, та перенесено (p,μ,σ)-властивість і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування (H,p,α) і (C,p,α), знайдені Г. О. Михаліним, на випадок статистичної збіжності та обмеженості середніх;
5) доведено статистичну D-властивість методів підсумовування Вороного класу W_Q, з якої випливають: класична (c)-властивість методів Чезаро, доведена М. О. Давидовим, (c)-властивість додатних поліноміальних методів

Вороного, доведена Л. Ф. Таргонським, а також багато статистично підсилених тауберових теорем із залишком;

6) доведено статистичну D-властивість і тауберові теореми із залишком для факторизованих методів Ріса підсумовування послідовностей з лінійного топологічного простору L. Цим самим узагальнено результати М. О. Давидова, М. Ф. Бурляя та В. М. Алданова;
7) доведено статистичну D-властивість і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування Вороного класу W_Q^2 у лінійному топологічному просторі L. Цим узагальнено результати М. О. Калаталової.

Використані методи досліджень дозволяють стверджувати, що результати, отримані для подвійних послідовностей, можуть бути поширені на m-кратні послідовності і відповідні факторизовані методи підсумовування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Алданов В. М.* Тауберові теореми із залишком для (R, p, q)-методів // Фракт. аналіз та суміж. питання: Зб. наук. праць. – К.: ІМ НАНУ – НПУ ім. Драгоманова, 1998. – **1.** – С. 134 – 140.
2. *Алданов В. М., Михалін Г. О.* Тауберові теореми із залишком для (H, p, α, β)- і (C, p, α, β)-методів підсумовування функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – № 8. – С. 1036 – 1044.
3. *Барон С. А.* Введение в теорию суммируемости. – Таллин: Валгус, 1977. – 280 с.
4. *Буданицкий Э. Г.* Теоремы типа Мерсера для произвольных регулярных методов суммирования // Вестник Московского ун-та. Матем. Механ. – 1969. – № 6. – С. 73 – 76.
5. *Бурляй М. Ф.* (C)-свойство методов Бореля, Абеля и Рисса суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа. – Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – К., 1971. – 106 с.
6. *Бурляй М. Ф.* Об одном свойстве $(\bar{R}, p_m, q_n)$-методов суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа // Теория ф-ций, функ. ан. и их прилож.: Респ. межвед. науч. сб. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1972, вып. 16. – С. 3 – 12.
7. *Билоцкий Н. Н.* Сходимость по отрезкам и теоремы тауберова типа // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1978. – С. 3 – 11.
8. *Билоцкий Н. Н.* Матричные методы суммирования рядов, равномерно трансляктивные справа, и одно их свойство // Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30. – № 5. – С. 586 – 593.
9. *Билоцкий Н. Н.* О теоремах тауберова типа для F_A-суммируемых функций // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч. тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1982. – С. 14 – 24.

10. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

11. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. – 1956. – 38 (80), вып. 4. – С. 509 – 524.

12. *Давыдов Н. А.* О границах неопределённости при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона – Абеля // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12. – № 4. – С. 167 – 174.

13. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве одного класса интегралов Стилтьеса // Мат. сб. – 1959. – 48 (90), вып. 4. – С. 429 – 446.

14. *Давыдов Н. А.* (C)-свойство методов Чезаро и Абеля – Пуассона и теоремы тауберова типа // Мат. сб. – 1963. – 60. – № 2. – С. 185 – 206.

15. *Давыдов Н. А.* Обобщение теоремы Мерсера // Успехи матем. наук. – 1965. – Т. XX, вып. 6 (126). – С. 73 – 77.

16. *Давыдов Н. А.* Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа – Белинфанте // Теория ф-ций, функ. ан. и их прилож.: Респ. межвед. науч. сб. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1966, вып. 3. – С. 86 – 89.

17. *Давыдов Н. А., Михалин Г. А.* О ядрах ограниченных последовательностей // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23. – № 4. – С. 537 – 550.

18. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Иностр. лит., 1962. – 896 с.

19. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

20. *Калаталова М. А.* (C)-свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23. – № 3. – С. 392 – 400.

21. *Калаталова М. А.* Теоремы тауберова типа для методов Чезаро суммирования двойных рядов // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23. – № 6. – С. 733 – 744.

22. *Кангро Г. Ф.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1971. – **277.** – С. 155 – 160.

23. *Кангро Г. Ф.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1972. – **305.** – С. 156 – 166.

24.*Кангро Г. Ф.* Теория суммирования последовательностей и рядов // Итоги науки и техники. Серия «Матем. анализ». Том 12. – М., 1974. – С. 5 – 70.

25.*Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.

26.*Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

27.*Кохановский А. П.* (l)-свойство полунепрерывного логарифмического метода суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26. – № 5. – С. 603 – 610.

28.*Кохановский А. П.* Об одном свойстве некоторого класса методов суммирования Вороного и его применении // Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30. – № 5. – С. 611 – 617.

29.*Кохановский А. П.* Связь метода Абеля с некоторым подклассом методов суммирования рядов Вороного // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36. – № 6. – С. 771 – 774.

30.*Кузьмич В. И.* (C)-свойстово одного класса методов Вороного суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч. тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1979. – С. 61 – 68.

31.*Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 472 с.

32.*Мельник В. И.* Тауберова теорема о “больших показателях” для метода Бореля // Мат. сб. – 1965. – 68. – Вып. 1. – С. 17 – 25.

33.*Мельник В. И.* (B)-свойство методов Бореля суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1965. – 17. – № 1. – С. 64 – 76.

34.*Мельник В. И.* Тауберова теорема для метода суммирования Бореля // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 11. – С. 85 – 92.

35.*Мельник В. И.* Неэффективность матриц, построенных на основе матрицы взвешенных средних арифметических // Теория ф-ций, функ. анализ и их прилож.: Респ. межвед. науч. сб. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1980. – Вып. 33. – С. 93 – 99.

36. *Михалин Г. А., Тесленко Л. С.* Об одном свойстве одного класса $(\bar{R}, p_n, \alpha)$-методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1977. – Т. 29. – № 2. – С. 194 – 203.

37. *Михалин Г. А.* Теоремы типа Литтльвуда для (H, p_n, α) и (C, p_n, α)-методов суммирования // Приближ. методы матем. анализа. Сб. науч. трудов. – К.: Изд-во КГПИ, 1977. – С. 73 – 82.

38. *Михалин Г. А.* Условия совпадения ядра последовательности с ядрами её (R, p_n) и (j, p_n)-средних // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31. – № 5. – С. 504 – 509.

39. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для (H, p_n, α)-методов суммирования // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч. тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1980. – С. 113 – 124.

40. *Михалин Г. А.* Обобщение теорем Таубера для одного класса (j, p_n)-методов суммирования // Известия вузов. Мат-ка. – 1980. – № 4 (213). – С. 61 – 68.

41. *Михалин Г. А.* Об одном свойстве одного класса интегралов Стилтьеса // Теория ф-ций, функ. анализ и их прилож. Респ. межвед. науч. сб. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1981. – С. 61 – 69.

42. *Михалин Г. А.* Обобщение теоремы Литтльвуда // Суммирование расходящихся рядов и диф. уравнения с малым параметром. Сб. науч. тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1985. – С. 55 – 60.

43. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остатком для методов суммирования типа методов Гельдера и Чезаро // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – № 7. – С. 918 – 923.

44. *Михаліна Є. Г.* Критерії консервативності, породжування збіжності та регулярності інтегрального методу підсумовування // Фрактальний аналіз і суміжні питання: Зб. наук. праць. – К.: ІМ НАНУ – НПУ ім. Драгоманова. – 1998. – **1.** – С. 114 – 124.

45. *Польняковский З.* О некоторых теоремах типа Мерсера // Бюл. Польской АН. – 1956. – Отд. 3, 4. – № 5. – С. 235 – 242.

46. *Постников А. Г.* Тауберова теория и её применение. – М.: Наука, 1974. – 148 с.

47. *Ревенко А. В.* Линейные интегральные операторы, сохраняющие и порождающие сходимость // Рук. деп. в Укр. НИИНТИ, 1984. – № 1816 Ук-84 Деп. – 16 с.

48. *Ревенко А. В.* Линейные регулярные методы суммирования функций: Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – К., 1985. – 119 с.

49. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 258 с.

50. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир., 1975. – 444 с.

51. *Соколенко А. И.* О ядрах в смысле Кноппа при суммировании ряда регулярной положительной матрицей // Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26. – № 4. – С. 565 – 572.

52. *Соколенко А. И.* О K-матрицах, равносильных сходимости // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч. тр. – К.: Изд-во КГПИ, 1974. – С. 115 – 127.

53. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

54. *Сырмус Т. И.* Об одном обощении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей // Уч. зап. Тартуского ун-та, 102 (1961). – С. 156 – 168.

55. *Сырмус Т. И.* О некоторых обощениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей // Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и тех. наук. – 11:1 (1962). – С. 37 – 49.

56. *Сырмус Т. И.* Об обощённой теореме Мерсера // Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и тех. наук. – 11:2 (1962). – С. 99 – 106.

57. *Таммерайд И.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера // Уч. зап. Тартуского ун-та, 1971. – 277. – С. 161 – 170.

58. *Таргонский Л. Ф.* Одна теорема мерсерова типа // Теор. ф-ций, функ. ан. и их прилож. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1969. – Вып. 8. – С. 99 – 105.

59. *Таргонский Л. Ф.* (*С*)-свойство положительных полиномиальных методов Вороного и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1970. – 22. – № 5. – С. 625 – 636.
60. *Таргонский Л. Ф.* Тауберовы теоремы для положительного полиномиального метода Вороного и теоремы мерсерова типа: Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Киев – Житомир, 1970. – 102 с.
61. *Тесленко Л. С., Михалин Г. А.* (*С*)-свойство (A,α)- и $(A\times(C,\alpha))$-методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Теор. ф-ций, функ. ан. и их прилож. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1979. – Вып. 31. – С. 160 – 163.
62. *Усенко Є. Г.* Критерії співпадання ядра функції з ядрами її інтегральних середніх Ріса та Абеля // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – № 12. – С. 1712 – 1714.
63. *Усенко Є. Г.* Критерії співпадання ядра функції з ядрами її інтегральних майже додатних середніх // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – № 9. – С. 1267 – 1275.
64. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
65. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Иностр. лит., 1951. – 504 с.
66. *Челидзе В. Г.* Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977. – 400 с.
67. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 3. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
68. *Янушаускас А. И.* Двойные ряды. – Новосибирск: Наука, 1980. – 224 с.
69. *Beekmann W.* Merser – Sätz te für abschnitt-beschränkte Matrixtransformationen // Math. Zeit. – 1967. – 97. – S. 154 – 157.
70. *Fast H.* Sur la convergence statistique // Colloq. Math. – 1951. – 2. – P. 241 – 244.
71. *Fridy J. A.* On statistical convergence // Analysis. – 1985. – P. 301 – 313.

72. *Fridy J. A., Khan M. K.* Tauberian theorems via statistical convergence // J. Math. Annal. Appl. – 1988. – 288. – № 1. – P. 73 – 95.

73. *Fridy J. A., Khan M. K.* Statistical extensions of some Tauberian theorems // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – 128. – P. 2347 – 2355.

74. *Mercer J.* On the limit of real variants // Proc. London Math. Soc. (2), 1907. – **5.** – P. 206 – 224.

75. *Pitt H. R.* Tauberian theorems. – London: Oxford Univ. Press, 1958. – 174 p.

76. *Rogosinski W. W., Rogosinski H. P. Jr.* An elementary companion to a theorem of J. Mercer // J. Analyse Math. – 1965. – 14. – P. 311 – 322.

77. *Scoenberg I. J.* The integrability of certain functions and related summability // Amer. Math. Monthly. – 1959. – 66. – P. 361 – 375.

78. *Z. Shimshon.* Sur deux theorems merceriens de N. A. Davydov // Comptes Rendus Acad. Sci. – 1966. – AB262. – № 21. – A 1162 – A 1163.

79. *Білоцький М. М., Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Тауберові теореми із залишком для методів підсумовування Вороного з раціональною твірною функцією // Фрактальний аналіз і суміжні питання: Зб. наук. праць. – К.: ІМ НАНУ – НПУ ім. Драгоманова, 1998. – **2.** – С. 178 – 189.

80. *Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Узагальнення однієї теореми Рогозинських // Укр. матем. журн. – 2000. – Т. 52. – № 2. – С. 220 – 227.

81. *Деканов С. Я.* Статистична збіжність і $(1,\mu^{(\alpha)},\sigma)$-властивість методів підсумовування Вороного з раціональною твірною функцією // Наук. зап. НПУ ім. Драгоманова. Фіз.-мат науки. – К.: Вид-во НПУ, 2001. – **2.** – С. 238 – 245.

82. *Деканов С. Я.* Статистична D-властивість методів підсумовування Вороного класу W_Q^2 // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. – № 3. – С. 360 – 372.

83. *Деканов С. Я.* Статистична збіжність і тауберові теореми із залишком для методів підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро // Вісник. Математика. Механіка: К.: Вид-во Київ. ун-ту, 2003. – №№ 9 – 10. – С. 91 – 97.

84.*Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Про (c^*)-властивість методу (C,1,1) підсумовування подвійних послідовностей // Матеріали VII Міжнар. наук. конф. імені акад. М. П. Кравчука. – К. – 1998. – С. 137.

85.*Алданов В. М., Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Про співвідношення між деякими тауберовими умовами // Матеріали VIII Міжнар. наук. конф. імені акад. М. П. Кравчука. – К. – 2000. – С. 227.

86.*Mikhalin G. A., Dekanov S. Y.* Tauberian theorems with a remainder for Voronoi summation methods with a rational generating function // Voronoi conference on Analitic number theory and space tillings: Abstracts. – K.: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 1998. – P. 40 – 41.

87.*Деканов С. Я.* Статистична збіжність і D-властивість методів Вороного з раціональною твірною функцією // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. імені акад. М. П. Кравчука. – К. – 2002. – С. 261.

88.*Усенко Є. Г., Михалін Г. О., Деканов С. Я.* Статистична збіжність і тауберові теореми для методів підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро // Там же. – С. 383.

89.*Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Про деякі мерсерові теореми М. О. Давидова // Тези міжнар. конф. “Асимпт. методи в теорії диф. рівнянь”. – К.: Вид-во НПУ ім. Драгоманова, 2002. – С. 12.

90.*Dekanov Stanislav.* Statistical D-property of Voronoi Summation Methods of the Class W_Q^2 // Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine, 2003. – P. 21.

ДОДАТКИ

Додаток А

Доведення обмеженої компактності простору R^∞ з прикладу 4 в пункті 1.1.1

□ Візьмемо довільну обмежену послідовність $x^{(n)} = (x_1^{(n)},\ldots,x_m^{(n)},\ldots) \in \mathbb{R}^\infty$. Покажемо спочатку, що вона є покоординатно обмеженою, тобто

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists H_m > 0 \colon \left| x_m^{(n)} \right| \le H_m \ \ \forall n.$$

Справді, якби це було не так, то $\exists m \in \mathbb{N}$, $n_k \uparrow \infty \colon \left| x_m^{(n_k)} \right| \to +\infty \ \ (k \to \infty)$ і тоді окіл $U = U(m,1)$ не поглинав би множину $\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$, тобто послідовність $(x^{(n)})$ не була б обмеженою.

Отже, з послідовності $(x_1^{(n)})$ можна виділити підпослідовність $x_1^{(n_{1,k})} \to x_1$ $(k \to \infty)$, з послідовності $(x_2^{(n)})$ – підпослідовність $x_2^{(n_{2,k})} \to x_2 \ \ (k \to \infty)$ і т. д. Візьмемо після цього діагональну послідовність $n_k = n_{k,k}$. Зрозуміло, що $n_k \uparrow \infty$, і що при кожному фіксованому $i \in \mathbb{N}$ послідовність (n_k) є підпослідовністю послідовності $(n_{i,k} : k = i,\, i+1,\, \ldots)$. Тому $x_m^{(n_k)} \to x_m \ \ (k \to \infty \ \ \forall m)$, тобто підпослідовність $(x^{(n_k)})$ покоординатно збігається до точки $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Тепер достатньо показати, що з покоординатної збіжності в $\mathbb{R}^\infty$ випливає топологічна збіжність. Для цього візьмемо довільну послідовність $y^{(n)} \in \mathbb{R}^\infty$, яка збігається покоординатно до деякого елемента $y \in \mathbb{R}^\infty$. Не порушуючи загальності, припустимо, що $y = \theta = (0, 0, \ldots)$. Візьмемо довільний окіл нуля $U = U(k_1, k_2, \ldots, k_r; \varepsilon)$ і знайдемо для нього такий номер n_0, що $\left| y_{k_i}^{(n)} \right| < \varepsilon \ \ \forall n > n_0$ $\forall i \in \overline{1,r}$. Тоді $y^{(n)} \in U \ \ \forall n > n_0$. Це і означає, що $y^{(n)} \to \theta \ \ (n \to \infty)$. □

Таким чином, простір $\mathbb{R}^\infty$ є обмежено компактним, віддільним, локально опуклим простором і не є нормовним простором.

Додаток Б

Доведення секвенційної повноти
обмежено компактного лінійного топологічного простору

□ Візьмемо послідовність $y_n \in L$: $y_n - y_m \to \theta$ $(m,n \to \infty)$ і довільний окіл нуля U, який у локально опуклому просторі можна вважати абсолютно опуклим. Для U $\exists n_0$: $y_n - y_m \in U$ $\forall m,n \ge n_0$, зокрема, $y_n - y_{n_0} \in U$ $\forall n \ge n_0$. Скінченна множина $M = \left\{ y_n - y_{n_0} : n \in \overline{1,n_0} \right\} \bigcup \left\{ y_{n_0} \right\}$ обмежена в L, тому $\exists \lambda_0 > 0$: $M \subset \lambda U$ $\forall \lambda$: $|\lambda| \ge \lambda_0$. Оскільки множина U абсолютно опукла, то $\mu U \supset \lambda U$ $\forall \lambda, \mu$: $|\mu| > |\lambda|$ [49, с. 16]. Тому $y_{n_0} \in \mu U$ і $y_n - y_{n_0} \in \mu U$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \mu$: $|\mu| \ge$ $\ge \max\{1, \lambda_0\}$. Для відкритої опуклої множини U справджується рівність $U + U = 2U$ [26, впр. 1, с. 198], з якої випливає, що $y_n \in y_{n_0} + \mu U \subset \mu U + \mu U =$ $= \mu(U + U) = 2\mu U$. Це означає, що послідовність (y_n) обмежена. Якщо простір L обмежено компактний, то з (y_n) можна виділити збіжну підпослідовність $y_{k_n} \to y\ (n \to \infty)$. Тоді $y_n - y = (y_n - y_{k_n}) + (y_{k_n} - y) \to \theta$, або $y_n \to y\ (n \to \infty)$. □

Додаток В

Означення (p,μ,σ)-точок, дане Г. О. Михаліним, та його рівносильність з означенням $D(p,\mu,\sigma)$-точок

У додатку В діють усі припущення і позначення, зроблені у преамбулі пункту 2.1.3.

Означення 1 (Г. О. Михалін) [43]. Точка $z=\theta$ (точка $z=\infty$) називається (p,μ,σ)-*точкою* послідовності (S_n), якщо існують послідовності (m_k), (n_k) такі, що $m_{k+1}\ge n_k>m_k\uparrow\infty$, замкнені гіперплощини $H_k=\{x\in L:\varphi_k(x)=0\}$, $k=1,2,\dots$, що визначаються неперервними лінійними формами $\varphi_k:L\to\mathbb{R}$, і елементи $x_k\in L$: $\varphi_k(x_k)=1$ $\forall k$, для яких

а) $\forall k$ $\forall n\in\overline{m_k,n_k}$ $\exists\alpha_{n,k}\ge 0$, $y_{n,k}\in H_k$: $\mu_{m_k}S_n=\alpha_{n,k}x_k+y_{n,k}$;

б) $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=m_k+1}^{n_k}\sigma_\nu p_\nu/P_\nu>0$;

в) існує абсолютно опуклий окіл нуля U такий, що для деякого $\varepsilon>0$ (а для точки $z=\infty$ для будь-якого $\varepsilon>0$) $\exists k_0$: $(\alpha_{n,k}x_k+H_k)\bigcap\varepsilon U=\varnothing$ $\forall n\in\overline{m_k,n_k}$ $\forall k>k_0$.

☐ Нехай точка $z=\theta$ $(z=\infty)$ є (p,μ,σ)-точкою послідовності (S_n) у розумінні означення 1. Позначимо $a_k=\min\limits_{m_k\le n\le n_k}\alpha_{n,k}$ $\forall k$. Тоді з умови в) випливає, що $a_k>0$ $\forall k>k_0$, а з умови а) – що $\varphi_k(\mu_{m_k}S_n)=\varphi_k(\alpha_{n,k}x_k+y_{n,k})=\alpha_{n,k}\ge a_k>0$ $\forall n\in\overline{m_k,n_k}$ $\forall k>k_0$.

Покажемо, що $\varphi_k(\varepsilon U)<a_k$ $\forall k>k_0$. Припустимо, що це не так. Тоді $\exists k>k_0$, $\exists u\in U$: $\varphi_k(\varepsilon u)\ge a_k\Rightarrow\lambda:=a_k/\varphi_k(\varepsilon u)\le 1\Rightarrow\lambda\varepsilon U\subset\varepsilon U$ (в силу абсолютної опуклості множини εU). Отже, елемент $\lambda\varepsilon u\in\varepsilon U$, причому $\varphi_k(\lambda\varepsilon u)=$ $=\lambda\varphi_k(\varepsilon u)=a_k$. З іншого боку, $\varphi_k(\lambda\varepsilon u-a_kx_k)=\lambda\varphi_k(\varepsilon u)-a_k\varphi(x_k)=a_k-a_k=0\Leftrightarrow$

$\lambda\varepsilon u - a_k x_k \in H_k \Leftrightarrow \lambda\varepsilon u \in a_k x_k + H_k$, що суперечить умові $(\alpha_{n,k} x_k + H_k) \cap \varepsilon U = \varnothing$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k > k_0$.

Отримане протиріччя доводить, що точка $z = \theta$ $(z = \infty)$ є $D(p, \mu, \sigma)$-точкою послідовності (S_n).

Нехай $z = \theta$ $(z = \infty)$ є $D(p, \mu, \sigma)$-точкою (S_n). Тоді існують елементи $x_k \in L$, $k \in \mathbb{N}$, такі, що $\varphi_k(x_k) = 1$ і кожен елемент $z \in L$ однозначно зображується у вигляді $z = \alpha x_k + y$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in H_k = \varphi_k^{-1}(0)$ [26, с. 147], зокрема, $\mu_{m_k} S_n = \alpha_{n,k} x_k + y_{n,k}$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\varphi_k(\mu_{m_k} S_n) \geq a_k \geq 0$, то $\alpha_{n,k} =$ $= \varphi_k(\mu_{m_k} S_n) \geq 0$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, тобто виконується умова а) означення 1.

Умова б) автоматично переходить з одного означення в інше. Нарешті, з того, що $\varphi_k(\alpha_{n,k} x_k + H_k) = \alpha_{n,k} \geq a_k > 0$ $\forall n \in \overline{m_k, n_k}$ $\forall k > k_0$, а $\varphi_k(\varepsilon U) < a_k$ $\forall k > k_0$, випливає умова в) означення 1.

Отже, точка $z = \theta$ $(z = \infty)$ є (p, μ, σ)-точкою послідовності (S_n) у розумінні означення 1. □

Додаток Г

Доведення леми 7 пункту 2.1.4 для умови 2)

□ Припустимо, що виконується умова 2) і $\mu_{n_k} S_{n_k} \neq O(1)$. Тоді існує абсолютно опуклий окіл нуля U і послідовності k_i, $r_i \uparrow \infty$: $\mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} \notin r_i U$ $\forall i$. За умовою 2) $\mu_{n_k} S_{n_k} = b_k^* t_k$, де (t_k) – обмежена векторнозначна послідовність, а (b_k^*) – дійсна. Зрозуміло, що послідовність $(b_{k_i}^*)$ необмежена: а) зверху або б) знизу.

Нехай має місце випадок а), в якому одразу будемо вважати, що $0 < b_{k_i}^* \to$ $\to +\infty$. Зафіксуємо $\varepsilon_0 > 0$. За умовою 2) $\exists (m_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_{n_k}(S_m - S_{n_k}) =$ $= b_{m,k}^{(1)} t_k$, де $b_{m,k}^{(1)} \geq -r - \varepsilon_0$, коли $n_k \leq m \leq m_k$, $k > k_0$, причому $\sum\limits_{\nu = n_k + 1}^{m_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta$ $\forall k > k_0$. Як показано при доведенні леми 7 для умови 1), шляхом переходу до підпослідовності і перевизначення послідовності (m_{k_i}) можна досягти того, щоб $k_i > k_0$, $n_{k_i} < m_{k_i} \leq n_{k_{i+1}}$, $\sum\limits_{\nu = n_{k_i} + 1}^{m_{k_i}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Далі, $\mu_{n_k} S_{n_k} = b_k^* t_k \Rightarrow t_k = \dfrac{1}{b_k^*} \mu_{n_k} S_{n_k}$ $\forall k = k_i \Rightarrow$

$$\mu_{n_k} S_m = \mu_{n_k} S_{n_k} + b_{m,k}^{(1)} t_k = \left(1 + \frac{b_{m,k}^{(1)}}{b_k^*} \right) \mu_{n_k} S_{n_k} \quad \forall m \in \overline{n_k, m_k} \quad \forall k = k_i .$$

Оскільки $b_{m,k_i}^{(1)} \geq -r - \varepsilon_0$ $\forall m \in \overline{n_{k_i}, m_{k_i}}$ $\forall i$, а $b_{k_i}^* \to +\infty$, то $1 + \dfrac{b_{m,k_i}^{(1)}}{b_{k_i}^*} > \dfrac{1}{2}$ $\forall m \in \overline{n_{k_i}, m_{k_i}}$ $\forall i > i_0$, а можна вважати, що $\forall i \in \mathbb{N}$. Отже,

$$\mu_{n_{k_i}} S_m \in \{ \alpha \mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} : \alpha > 1/2 \} =: K_i \quad \forall m \in \overline{n_{k_i}, m_{k_i}} \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

Промінь K_i є опуклою множиною, причому $K_i \cap \dfrac{r_i}{2} U = \varnothing$ $\forall i$, що легко показати методом від супротивного. За теоремою Хана – Банаха $\forall i \ \exists \varphi_i \in L^*$: $\varphi_i((r_i/2)U) < a_i \le \varphi_i(K_i)$. Разом з цим $\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 : r_i/2 > \varepsilon \ \forall i > i_0 \Rightarrow \varepsilon U \subset \frac{r_i}{2} U \Rightarrow$ $\varphi_i(\varepsilon U) < a_i \ \forall i > i_0$. Отже, у випадку а) точка $z = \infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою (S_n).

Нехай має місце випадок б), у якому вважаємо, що $0 > b^*_{k_i} \to -\infty$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon_0 > 0$. За умовою 2) $\exists (l_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_m(S_{n_k} - S_m) = b^{(2)}_{m,k} t_k$, де $b^{(2)}_{m,k} \ge -r - \varepsilon_0$, коли $l_k \le m \le n_k$, $k > k_0$, причому $\sum\limits_{\nu = l_k + 1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta \ \forall k > k_0$. Підправимо послідовності (k_i) та (l_k) так, щоб $k_i > k_0$, $l_{k_i} < n_{k_i} \le l_{k_{i+1}}$, $\sum\limits_{\nu = l_{k_i} + 1}^{n_{k_i}} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \ge \delta$, $P_{n_{k_i}} / P_{l_{k_i}} \le 2 \ \forall i$. При цьому за умовою (2.1) $0 < c_1 \le \mu_{n_{k_i}} / \mu_m \le$ $\le c_2 < \infty \ \forall m \in \overline{l_{k_i}, n_{k_i}} \ \forall i$. Розглянемо $\mu_{n_k} S_m$:

$$\mu_{n_k} S_m = \frac{\mu_{n_k}}{\mu_m} \mu_m S_m = \frac{\mu_{n_k}}{\mu_m} (\mu_m S_{n_k} - b^{(2)}_{m,k} t_k) = \mu_{n_k} S_{n_k} (1 - \frac{\mu_{n_k}}{\mu_m} \cdot \frac{b^{(2)}_{m,k}}{b^*_k}),$$

коли $l_k \le m \le n_k$, $k = k_i$.

Покажемо, що $\exists i_0 : 1 - \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \frac{b^{(2)}_{m,k_i}}{b^*_{k_i}} > \frac{1}{2} \ \forall m \in \overline{l_{k_i}, n_{k_i}} \ \forall i > i_0$. Справді, за умовою 2) $b^{(2)}_{m,k_i} \ge -r - \varepsilon_0$, тому

$$1 - \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \frac{b^{(2)}_{m,k_i}}{b^*_{k_i}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \frac{b^{(2)}_{m,k_i}}{b^*_{k_i}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^*_{k_i} < 2 \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} b^{(2)}_{m,k_i},$$

а остання нерівність правильна $\forall m \in \overline{l_{k_i}, n_{k_i}} \ \forall i > i_0$, оскільки

$$2 \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} b^{(2)}_{m,k_i} \ge 2 \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} (-r - \varepsilon_0) \ge -2c_2 (r + \varepsilon_0) \ \forall m \in \overline{l_{k_i}, n_{k_i}} \ \forall i, \text{ а } b^*_{k_i} \to -\infty.$$

Тепер легко закінчити доведення того, що $z = \infty$ є $D(p,\mu,\sigma)$-точкою (S_n) так само, як у випадку а).

Частина I) леми 7 для умови 2) доведена.

Доведемо частину II). Припустимо, що $\mu_{n_k} S_{n_k} \neq o(1)$. Тоді існують абсолютно опуклий окіл нуля U та послідовність $k_i \uparrow \infty$: $\mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} \in U \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mu_{n_k} S_{n_k} = b_k^* t_k$, $b_k^* \in \mathbb{R}$ і $t_k = O(1)$, то $b_{k_i}^* \neq (1)$. Тут можливі два випадки:

$$\text{а1)}\ \overline{\lim_{i\to\infty}} b_{k_i}^* > 0 \quad \text{чи} \quad \text{б1)}\ \overline{\lim_{i\to\infty}} b_{k_i}^* < 0.$$

Розглянемо випадок а1). Одразу будемо вважати, що $b_{k_i}^* > \alpha > 0 \quad \forall i$. Для $\varepsilon = \alpha / 2 > 0$ за умовою 2) $\exists (m_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_{n_k}(S_m - S_{n_k}) = b_{m,k}^{(1)} t_k$, де $b_{m,k}^{(1)} \geq -\varepsilon$ для $m \in \overline{n_k, m_k}$, $k > k_0$, причому $\sum_{\nu = n_k + 1}^{m_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta \quad \forall k > k_0$. Як пояснювалося вище, можна вважати, що $k_i > k_0$, $n_{k_i} < m_{k_i} \leq n_{k_{i+1}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Розглянемо $\mu_{n_k} S_m$:

$$\mu_{n_k} S_m = \mu_{n_k} S_{n_k} + b_{m,k}^{(1)} t_k = \mu_{n_k} S_{n_k} \left(1 + \frac{b_{m,k}^{(1)}}{b_k^*}\right) \ \forall m \in \overline{n_k, m_k} \quad \forall k = k_i.$$

Оскільки $b_{m,k_i}^{(1)} \geq -\varepsilon = -\dfrac{\alpha}{2}$, а $b_{k_i}^* > \alpha \quad \forall i \in \mathbb{N}$, то

$$1 + \frac{b_{m,k_i}^{(1)}}{b_{k_i}^*} \geq 1 - \frac{\alpha}{2 b_{k_i}^*} > 1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} \quad \forall m \in \overline{n_{k_i}, m_{k_i}} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Отже, $\mu_{n_{k_i}} S_m \in K_i := \{\lambda \mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} : \lambda > 1/2\} \quad \forall m \in \overline{n_{k_i}, m_{k_i}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Промінь K_i є опуклою множиною, причому $K_i \bigcap \dfrac{1}{2} U = \varnothing \quad \forall i$. За теоремою Хана – Банаха $\forall i$ $\exists \varphi_i \in L^*$: $\varphi_i((1/2)U) < a_i \leq \varphi_i(K_i)$. Звідси дістаємо, що у випадку а1) точка $z = \theta$ є $D(p, \mu, \sigma)$-точкою (S_n).

У випадку б1) вважаємо, що $b_{k_i}^* < \beta < 0 \quad \forall i$. З умови (2.1) візьмемо число $c > 0$ таким, щоб $\mu_n / \mu_m \leq c$, коли $1 \leq P_n / P_m \leq 2$. Для $\varepsilon = -\dfrac{\beta}{2c} > 0$ за умовою 2) $\exists (l_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$: $\mu_m(S_{n_k} - S_m) = b_{m,k}^{(2)} t_k$, де $b_{m,k}^{(2)} \geq -\varepsilon$ для $m \in \overline{l_k, n_k}$, $k > k_0$, причому $\sum_{\nu = l_k + 1}^{n_k} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu \geq \delta \ \forall k > k_0$.

Забезпечимо, щоб $k_i > k_0$, $l_{k_i} < n_{k_i} \le l_{k_{i+1}}$, $P_{n_{k_i}} / P_{l_{k_i}} \le 2 \ \forall i$. Тоді

$$\mu_{n_{k_i}} S_m = \mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} (1 - \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \frac{b_{m,k_i}^{(2)}}{b_{k_i}^*}) \in K_i =: \{\lambda \mu_{n_{k_i}} S_{n_{k_i}} : \lambda > 1/2\} \ \ \forall m \in \overline{l_{k_i}, n_{k_i}} \ \ \forall i,$$

бо $1 - \frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \frac{b_{m,k_i}^{(2)}}{b_{k_i}^*} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot b_{m,k_i}^{(2)} > b_{k_i}^*$, а остання нерівність правильна, тому що

$$2\frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot b_{m,k_i}^{(2)} > 2\frac{\mu_{n_{k_i}}}{\mu_m} \cdot \left(-\frac{\beta}{2c} \right) > 2(-c)\left(-\frac{\beta}{2c} \right) = \beta,$$ а $b_{k_i}^* < \beta \ \forall i$.

За теоремою Хана – Банаха $\forall i \ \ \exists \varphi_i \in L^*$: $\varphi_i((1/2)U) < a_i \le \varphi_i(K_i)$. Звідси випливає, що і у випадку б1) точка $z = \theta$ є $D(p, \mu, \sigma)$-точкою (S_n).

Лема 7 для умови 2) повністю доведена. □