МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Марат Феодосьевич БУРДЯЙ

"/C/-СВОЙСТВО МЕТОДОВ БОРЕЛЯ, АБЕЛЯ И РИССА СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА".

№ 01.01.01. Теория функций и функциональный анализ.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук

Диссертация написана на
русском языке

Киев - 1972

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им. А.М.Горького

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Н.А.ДАВЫДОВ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Б.И.КОРЕНБЛЮМ

кандидат физико-математических наук,
доцент М.Ф.ТИМАН

Ведущее предприятие – Институт математики АН УССР

Автореферат разослан "___"____________ 197__г.
Защита диссертации состоится "___"____________ 197__г.
в ______ часов на заседании совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета КГПИ им.А.М.Горького.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале института.

Отзывы просим присылать по адресу:
г.Киев-30, ул.Пирогова, 9

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Вопросам суммирования кратных рядов посвящен целый ряд работ, как зарубежных, так и советских авторов. Однако до сих пор эти вопросы остаются еще мало исследованными, хотя как отмечают И.Е.Жак и М.Ф.Тиман в работе [I], они представляют определенный интерес уже по той причине, что переход от обыкновенных рядов к рядам кратным вносит в теорию суммирования значительное своеобразие и выдвигает много совершенно новых проблем. В той же работе И.Е.Жак и М.Ф.Тиман отмечают, что в области кратных рядов многие методы суммирования утрачивают регулярность, обычные взаимосвязи между собой и другие свойства, которые характеризуют их в области обыкновенных рядов, и что в связи с этим возникают новые понятия: понятия ограниченной регулярности, ограниченной суммируемости и т.д..

Большой вклад в развитие теории суммирования двойных рядов внесли советские математики: Челидзе В.Г., Кангро Г.Ф.,Тиман М.Ф., Барон С.А., Огиевецкий И.И., Огиевецкий И.Е., Жак И.Е., Берекашвили В.А., Слепенчук К.М. и другие.

Как и в теории обыкновенных рядов, в теории суммирования двойных рядов одной из основных проблем является проблема, касающаяся теорем тауберова типа. В этом направлении имеются некоторые результаты, однако число их очень мало по сравнению с результатами, полученными для обыкновенных рядов.

В теории суммирования обыкновенных рядов Н.А.Давыдовым был найден новый подход к получению теорем тауберова типа. В работах ([2] - [5]) он ввел понятие (C) - множества последовательности комплексных чисел S_n и получил ряд тауберовых теорем для методов Чезаро, Абеля, Бореля и (R, p_n) - методов, следствиями которых явились как известные теоремы тауберова типа для этих методов, как и теоремы обобщающие их. Естественно возникает вопрос: не будет ли этот новый подход эффективным и в области двойных рядов? Ответ оказался положительным. (C) - свойство методов Чезаро целых положительных порядков суммирования двойных рядов доказано М.А.Калаталовой в работе [6], а в работе [7] ею же рассмотрены теоремы тауберова типа, являющиеся простыми следствиями этого свойства. Целью данной работы является доказательство (C) - свойства для методов Бореля, Абеля и Рисса суммирования двойных рядов и получение с помощью этого свойства ряда теорем тауберова типа для этих методов.

2.

Данная диссертация состоит из трёх глав.

В первой главе мы переносим (C) - свойство метода Бореля, доказанное Н.А.Давыдовым в работе [4] для обыкновенных рядов на B_λ - метод суммирования двойных рядов, назвав его (C_λ) - свойством, и доказываем ряд теорем тауберова типа для этого метода. Метод Бореля суммирования двойных рядов изучался Челидзе В. Г. ([8]), Берекашвили В.А. ([9] - [II]), Меленцовым А.А. и Мураевым Э.Б. ([I2] - [I3]).

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{I}$$

Обозначим через

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

его частные суммы.

Предположим, что двойной степенной ряд

$$S(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\, n!}$$

сходится для всех значений $x \geq 0,\ y \geq 0$.

Ряд (I) называется B_λ - суммируемым к числу S ([12]), если для данного числа $\lambda > 1$ имеет место равенство

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} e^{-x-y} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} = S.$$

Под символом $(x,y)_\lambda \to \infty$ понимают стремление точки (x,y) к бесконечности внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \lambda$

Обозначим через G замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, и через G_k - последовательность замкнутых выпуклых множеств в комплексной плоскости, стягивающихся к бесконечно удаленной точке. Основной теоремой первой главы, выражающей (C_λ) - свойство B_λ - метода, является

<u>Т е о р е м а I.</u>

I. Пусть даны числа μ и λ , причём $1 < \mu < \lambda$. Тогда существует такое число $\delta(\mu,\lambda) > 0$, что если:

1/ $S_{mn} \in G$ для $(m,n) \in \Delta_k\{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$ (к=1,2,...), где прямоугольники Δ_k полностью лежат внутри угла $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$, причём $\frac{m_k'}{m_k} \geq \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geq \mu > 1$ $(k=1,2,\dots)$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$;

2/ $|S_{mn}| \leq C(\delta)(1+\delta)^{m+n}$,

3) последовательность S_{mn} суммируется B_λ - методом к числу S , то $S \in G$.

II. Пусть даны числа μ и λ , причём $1 < \mu < \lambda$.

Тогда существует такое число $\delta(\mu,\lambda) > 0$, что если:

I'/ $S_{mn} \in G_k$ для $(m,n) \in \Delta_k\{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$ (к=1,2,...).

где прямоугольники Δ_k полностью лежат внутри угла $\frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda$, причём $\frac{m'_k}{m_k} \ge \mu > 1$, $\frac{n'_k}{n_k} \ge \mu > 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$,

2') $|S_{mn}| \le C(\delta)(1+\delta)^{m+n}$,

то $\overline{\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty}} \left| e^{-x-y} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} \right| = \infty$

По аналогии с определением (C)- множества, данного Н.А.Давыдовым для обыкновенной последовательности S_n, мы вводим понятие (C_λ)-множества для двойной последовательности S_{mn}.

Пусть G_ε - замкнутая выпуклая ε - окрестность множества G.

Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости мы назвали (C_λ)- множеством двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\mu(\varepsilon) > 1$ и последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$, полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda$ $(1 < \mu < \lambda)$ и таких, что

$S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m, n) \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \dots)$, причём

$\frac{m'_k}{m_k} \ge \mu(\varepsilon) > 1$, $\frac{n'_k}{n_k} \ge \mu(\varepsilon) > 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Если (C_λ)- множеством последовательности S_{mn} является точка, то эту точку назовём (C_λ) - точкой этой последовательности.

Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали (C_λ)- точкой двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если найдутся число $\mu > 1$, последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$, полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda$, $(1 < \mu < \lambda)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$S_{mn} \in G_k$ для $(m,n) \in \Delta_k$ (к=I,2,...) , причём
$\frac{m_k'}{m_k} \geq \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geq \mu > 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$

Из теоремы I следует

Т е о р е м а 2. Если:

I/ ряд (I) суммируется B_λ - методом к числу S ,

2/ $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leq 1$,

3/ замкнутое выпуклое множество G является (C_λ)- множеством последовательности S_{mn} частным сумм ряда (I) , то $S \in G$.

Если $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leq 1$ и бесконечно удаленная точка является (C_λ)- точкой последовательности S_{mn} частных сумм ряда (I) , то

$$\overline{\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty}} \left| e^{-x-y} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} \right| = \infty$$

Из (C_λ) - свойства B_λ - метода следует целый ряд теорем тауберова типа. Например:

Т е о р е м а 5. Если:

I/ ряд (I) суммируется B_λ - методом к числу S ,

2/ $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leq 1$,

частные суммы S_{mn} ряда (I) удовлетворяют условиям

$$\lim_{m,n\to\infty} (S_{mn'} - S_{mn}) = 0 , \qquad \lim_{m,n\to\infty} (S_{m'n} - S_{mn}) = 0 ,$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n}, \frac{m}{n'} \leq \lambda \qquad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n}, \frac{m'}{n} \leq \lambda$$

$$1 < \frac{n'}{n} \to 1 \qquad 1 < \frac{m'}{m} \to 1$$

то

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty} S_{mn} = S$$

С л е д с т в и е. Если:

1/ ряд (I) суммируется B_λ - методом к числу S ,

2/ $|a_{mn}| \le \frac{M}{m^2+n^2}$, $M>0$, $m+n>0$,

то $\lim\limits_{(m,n)\xrightarrow[\lambda]{}\infty} S_{mn} = S$.

Это следствие обобщает теорему Берекашвили В.А. ([10] , стр.341).

Во второй главе (C) - свойство метода Пуассона-Абеля, доказанное Давыдовым Н.А. в работе [3] для обыкновенных рядов, переносится на метод Абеля суммирования двойных рядов.

Ряд (I) называется суммируемым методом Абеля к числу S , если ряд

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n \qquad (2)$$

абсолютно сходится при $|x|<1$, $|y|<1$ и

$$\lim_{\substack{x\to 1-\\ y\to 1-}} f(x,y) = S$$

Основным результатом настоящей главы является

Т е о р е м а 10. Если:

1/ ряд (I) суммируется методом Абеля к числу S ,

2/ сумма $f(x,y)$ степенного ряда (2) , абсолютно сходящегося в единичном бицилиндре $\{|x|<1, |y|<1\}$, ограничена в бицилиндре $\{|x-x_0|<1-x_0 , |y-y_0|<1-y_0\}$ для каких-нибудь x_0, y_0 , $0\le x_0, y_0 < 1$,

3/ замкнутое выпуклое множество G является (C_λ)- множеством последовательности S_{mn} частных сумм ряда (I) , то $S\in G$. Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (C_λ)-точкой последовательности S_{mn} частных сумм ряда (I) , то сумма $f(x,y)$ степенного ряда (2) , абсолютно сходящегося в единичном бицилиндре $\{|x|<1,\ |y|<1\}$, не ограничена в бицилиндре $\{|x-x_0|<1-x_0,\ |y-y_0|<1-y_0\}$ при любых x_0, y_0, $0\le x_0, y_0<1$. Имеющиеся в литературе теоремы тауберова типа для метода Абеля суммирования двойных рядов доказаны, для случаев, когда тауберовы условия накладываются на всю последовательность S_{mn} частных сумм ряда (I). Кроме таких теорем с помощью теоремы IO можно получать теоремы, в которых тауберовы условия накладываются на некоторую подпоследовательность $S_{m_k n_k}$ последовательности S_{mn}. В работе [3] Н.А.Давыдовым отмечено, что тауберовы теоремы такого типа без дополнительного условия, накладываемого на сумму $f(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося в круге $|x|<1$, перестают быть верными для метода Абеля даже для простых рядов. Таким дополнительным условием для метода Абеля суммирования простых рядов является условие (А) ([3], стр.192), а для метода Абеля суммирования двойных рядов является условие 2/ теоремы IO. Теорема IO является полным аналогом теоремы 2 первой главы, поэтому тауберовы теоремы, установленные в первой главе для B_λ - метода, с соответствующими изменениями переносятся и на метод Абеля.

Т е о р е м а I5. Если:

I/ ряд (I) суммируется методом Абеля к числу S,

2/ выполняется условие 2/ теоремы IO,

3/ частные суммы S_{mn} ряда (I) удовлетворяют условиям

$$\lim_{k,m,n\to\infty}(S_{mn}-S_{mn_k})=0, \qquad \lim_{k,m,n\to\infty}(S_{mn}-S_{m_k n})=0$$

$$\frac{1}{\lambda}\le\frac{m}{n},\ \frac{m}{n_k}\le\lambda \qquad\qquad \frac{1}{\lambda}\le\frac{m}{n},\ \frac{m_k}{n}\le\lambda$$

в одном из четырёх случаев:

а) $1<\frac{n}{n_k}\to 1,\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1;$ б) $1<\frac{n}{n_k}\to 1,\ 1<\frac{m_k}{m}\to 1;$

в) $1<\frac{n_k}{n}\to 1,\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1;$ г) $1<\frac{n_k}{n}\to 1,\ 1<\frac{m_k}{m}\to 1;$

где $1 < \lambda$ - заданное число, m_k, n_k - заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, то

$$S_{m_k n_k} \to S \quad при \quad (m_k, n_k)_\lambda \to \infty \quad (k \to \infty)$$

<u>Следствие.</u> Если:

1/ ряд (1) суммируется методом Абеля к числу S,

2/ выполняется условие 2/ теоремы 10,

3/ $|a_{mn}| \le \dfrac{M}{m^2 + n^2}$ $\quad M > 0, \quad m+n>0$

для $m_k \le m \le m'_k < m_{k-1}$, $n = 0,1,2,\ldots$;

$n_k \le n \le n'_k < n_{k-1}$, $m = 0,1,2,\ldots$;

причём $\dfrac{m'_k}{m_k} \ge \mu > 1$, $\dfrac{n'_k}{n_k} \ge \mu > 1$ (к= 1,2,...),

где числа $\lambda > \mu > 1$ и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k, m'_k, n_k, n'_k, удовлетворяющие условию $\frac{1}{\lambda} \le \frac{m_k}{n_k}, \frac{m'_k}{n'_k} \le \lambda$ наперед заданы, то

$$\lim_{k \to \infty} S_{p_k q_k} = S,$$

где $m_k \le p_k \le m'_k$; $n_k \le q_k \le n'_k$, $\frac{1}{\lambda} \le \frac{p_k}{q_k} \le \lambda$

Это следствие обобщает известную теорему Кноппа [14] для метода Абеля.

В третьей главе одно свойство $(\bar{R}, p_n)$- методов, доказанное Давыдовым Н.А. в работе [2] для обыкновенных рядов, переносится на $(\bar{R}, p_m, q_n)$ - методы суммирования двойных рядов.

Ряд (1) называется суммируемым $(\bar{R}, p_m, q_n)$- методом к числу S ([15]), если $\lim_{m,n \to \infty} \bar{R}_{mn} = S$,

где $$\bar{R}_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j S_{ij}$$

$$p_m \ge 0, \; p_0 > 0, \; P_m = \sum_{i=0}^{m} p_i \to \infty, \; q_n \ge 0, \; q_0 > 0, \; Q_n = \sum_{j=0}^{n} q_j \to \infty$$

Ряд (I) называется суммируемым к числу S методом логарифмических средних $([16])$, если

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\ln(m+1)\ln(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{S_{ij}}{(i+1)(j+1)} = S$$

$(\bar{R}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{n+1})$ - метод эквивалентен методу логарифмических средних (ℓ - методу) суммирования двойных рядов.

Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, мы называем $(\bar{R}, P, q)$-множеством двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\mu(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$ $(k=1,2,\dots)$, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m,n) \in \Delta_k$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k\to\infty)$, причём

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geq \mu(\varepsilon) > 1, \quad \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geq \mu(\varepsilon) > 1$$

Если $(\bar{R}, P, q)$ - множество G состоит из одной точки, то эта точка называется $(\bar{R}, P, q)$ - точкой последовательности S_{mn}.
Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали $(\bar{R}, P, q)$ - точкой последовательности S_{mn}, если найдутся число $\mu > 1$, последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$ $(k=1,2,\dots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$S_{mn} \in G_k \quad \text{для} \quad (m,n) \in \Delta_k, \quad \text{причём}$$

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geq \mu > 1, \quad \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geq \mu > 1 \quad (k=1,2,\dots), \quad m_k, n_k \to \infty \quad (k\to\infty)$$

Доказана основная в этой главе.

Т е о р е м а 17. Если ряд (I) суммируется $(\bar{R}, P_m, q_n)$- методом к числу S и множество G является $(\bar{R}, P, q)$- множеством последовательности S_{mn}, то $S \in G$.

Если бесконечно удаленная точка является $(\bar{R}, p, q)$ – точкой последовательности S_{mn}, то $\overline{\lim\limits_{m,n\to\infty}} |\bar{R}_{mn}| = \infty$.

В качестве простых следствий этой теоремы получен ряд теорем тауберова типа для $(\bar{R}, p_m, q_n)$ – методов. Например:

Т е о р е м а 22. Пусть дан ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ с действительными членами и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k и n_k, и пусть частные суммы S_{mn} этого ряда удовлетворяют условиям

$$\underline{\lim\limits_{k,m,n\to\infty}} (S_{mn} - S_{m_k n}) \geq -\tau, \quad \underline{\lim\limits_{k,m,n\to\infty}} (S_{mn} - S_{m n_k}) \geq -\tau,$$
$$1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1 \qquad 1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1$$

а также условиям

$$\underline{\lim\limits_{k,m,n\to\infty}} (S_{m_k n} - S_{mn}) \geq -\tau, \quad \underline{\lim\limits_{k,m,n\to\infty}} (S_{m n_k} - S_{mn}) \geq -\tau,$$
$$1 < \frac{P_{m_k}}{P_m} \to 1 \qquad 1 < \frac{Q_{n_k}}{Q_n} \to 1$$

где $0 \leq \tau < \infty$. Если ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ суммируется $(\bar{R}, p_m, q_n)$– методом к числу S, то

$$S - \tau \leq \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{m_k n_k} \leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{m_k n_k} \leq S + \tau.$$

В частности, при $\tau = 0$ имеем

$$\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k n_k} = S$$

Как частные случаи тауберовых теорем для $(\bar{R}, p_m, q_n)$– методов рассмотрены тауберовы теоремы для метода логарифмических средних суммирования двойных рядов.

Т е о р е м а 25. Если ряд (I) суммируется методом логарифмических средних к числу S и его частные суммы S_{mn} удовлетворяют условиям

$$\lim\limits_{m,n,n'\to\infty} (S_{mn'} - S_{mn}) = 0, \quad \lim\limits_{m,m',n\to\infty} (S_{m'n} - S_{mn}) = 0$$
$$1 < \frac{\ln n'}{\ln n} \to 1 \qquad 1 < \frac{\ln m'}{\ln m} \to 1$$

то ряд (I) сходится к числу S.

Теорема 28. Если ряд (I) суммируется методом логарифмических средних к числу S и его члены удовлетворяют условию

$$a_{mn} = 0 \quad \text{для} \quad (m,n) \neq (m_k, n_k) \quad \text{, причём}$$

$$\frac{\ln m_{k+1}}{\ln m_k} \geq \mu > 1 \;, \quad \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k} \geq \mu > 1 \quad (k=1,2,\dots),$$

где число $\mu > 1$ и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k и n_k наперед заданы, то ряд (I) сходится к числу S.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на городском семинаре по теории функций при Институте математики АН УССР /г.Киев, апрель, 1971 г/.

Основное содержание диссертации отражено в работах [17] - [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Е.Жак и М.Ф.Тиман. О суммировании двойных рядов, Мат.сб., т. 35 /77/, № 1, 1954, 21-56.
2. Н.А.Давыдов. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Мат. сб., т.3_ /80/, № 4, 1956, 509-524.
3. Н.А.Давыдов. (С)- свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и теоремы тауберова типа, Мат, сб., т. 6 /102/, № 2, 1963, 185-206.
4. Н.А.Давыдов. Одно свойство метода Бореля суммирования рядов и теоремы тауберова типа. Сверхсходимость степенных рядов и особые точки аналитической функции, Уч.зап.Калининск.пед.ин-та, т. 26, 1958, 57-82.
5. Н.А.Давыдов. Еще раз об обращении теоремы Абеля, Сб. "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного", Физматгиз, М., 1960, 29-34.
6. М.А.Калаталова. (С)- свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов, УМЖ., т. 23, № 3, 1971, 392-400.
7. М.А.Калаталова. Теоремы тауберова типа для методов Чезаро суммирования двойных рядов, УМЖ, т.23, № 6, 1971, 733-744.
8. В.Г.Челидзе. Борелевское суммирование двойных рядов, Сообщ. АН Груз ССР, 8, № 8, 1947, 501-508.
9. В.А.Берекашвили. Борелевское суммирование двойных рядов, Сообщ. АН Груз.ССР, 14, № 4, 1953, 193-196.
10. В.А.Берекашвили. Об Эйлеровских методах суммирования двойных рядов, Сообщ.АН ГрузССР, т.16, 1955, 337-342.
11. Б.А.Берекашвили. Методы суммирования Эйлера и Бореля для двойных рядов. "Тр.Тбилисск.Мат.ин-та" АН ГрузССР,т.24,1957,53-69.
12. А.А.Меленцов и Э.Б.Мураев. К теории суммирования двойных рядов методами Бореля, ДАН СССР, т.130, № 6, 1960, 1193-1195.
13. Э.Б.Мураев. К теории суммирования двойных рядов методами Бореля, "Уч.зап.Уральск.ин-та", вып.23, 2, 1960, 15-33.

14. K.Knopp. Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen, Math. Zeitschr., 45, 1939, 573-589.

15. Ш.С. Пичхадзе. $R^{(p,q)}$ - суммаруемость двойных числовых рядов, "Тр.Груз.ин-та субтроп.х-ва", вып.9-10, 1965, 496-499.

16. Ш.С.Пичхадзе. Взаимоотношение между методами суммирования двойных рядов (C,1,1) и L, "Тр.Груз.ин-та субтроп.х-ва", вып. 7-8, 1963, 397-400.

17. М.Ф.Бурляй. (C_λ) - свойство метода Бореля суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа, Сб."Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып.15, Изд-во ХГУ,Харьков, 1972, 161-180.

18. М.Ф.Бурляй. (C_λ) - свойство метода Абеля суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа, УМЖ, т.24, № 5, 1972, 579-592.

19. М.Ф.Бурляй. Об одном свойстве $(\bar{R},p_m,q_n)$ - методов суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа, Сб."Теория функций, функциональный анализ и их приложения", Изд-во ХГУ, /принята к опубликованию/.

БФ 35635 22.XII.72 Зак. 4180. Тираж 200 экз. 60х84 1/16
об"ем 0,75 п.л.
Киевская книжная типография № 5. Репина, 4.