МАТЕМАТИКА

УДК 378.016:514(091)

Антонюк О. П.

ІСТОРИЧНА СКЛАДОВА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ” У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Стаття присвячена описанню основних аспектів застосування історії науки під час вивчення теми “Задачі на побудову”. Чималий багаж історичних фактів щодо основних етапів розвитку конструктивної геометрії та впливу на нього окремих особистостей, сучасного стану науки і взаємопроникнення з суміжними галузями так само важливі для розуміння, як і основні теоретичні факти. В роботі описано можливості використання історичного матеріалу для формування у студентів уявлення про походження і природу геометричних знань і їх вплив на розвиток математики в цілому, для усвідомлення прикладного характеру ряду проблем. Також звернута увага на те, що насичена емоційними, драматичними колізіями інформація може сформувати відповідну психологічну атмосферу процесу навчання, посприяти виховному впливу на учнів та студентів. При описанні методичних порад було враховано досвід читання елементів конструктивної геометрії у Східноєвропейському національному університеті ім. Лесі Українки.

Ключові слова: *історія математики, задачі на побудову, трисекція кута, проективна геометрія, трансцендентні числа, аксіома, пізнавальний інтерес, гуманізація навчання, навчально-виховний процес.*

Чимало досліджень педагогів і методистів присвячені вивченню питань про вплив історичного матеріалу на навчально-виховний процес у школі та ВНЗ. Це значна проблема, пов’язана як з покращенням рівня засвоєння знань, так і з виховним впливом на молодь. Вона включає в себе різні причинно-наслідкові ланцюжки в пізнавальній та психоемоційній сферах. Адже знайомство з історією появи деякої наукової проблеми, ходом її дослідження і вирішення виводить отриману інформацію з чисто теоретичної до емоційно наближеної до суб’єкта навчання.

Систематичне використання історії науки, без сумніву, має великий позитивний потенціал для змін у процесі навчання, його гуманізації та гуманітаризації. Наслідком застосування історичних екскурсів є розвиток у студентів пізнавального інтересу та активності, бо вони важливі не тільки на етапі навчання, але й у подальшій діяльності людини. Вважаємо за необхідне вивчити та описати різні аспекти роботи з історичними матеріалами на прикладі задач на побудову, як одного з найбільш придатних, на нашу думку, до цього розділів.

Проблематика використання історії математики в навчальному процесі цікавила багатьох вчених і педагогів. Можна знайти чимало видатних робіт з цікавими матеріалами, описанням методичних питань та значення історизмів. Зокрема, це твори Г. І. Глейзера, Б. В. Гнеденка, А. П. Юшкевича, К. О. Рибнікова та інші. Останні дослідження щодо можливостей використання історизмів у вузівській практиці роботи належать В. Г. Бевз, А. Л. Воєводі, Т. Л. Годованюк, Т. В. Ломаєвій, А. О. Розуменко, Н. В. Шаповаловій, М. І. Шкілю, М. В. Шмигевському.

Метою статті є аналіз різних можливостей використання історичного матеріалу під час вивчення теми “Задачі на побудову” та описання основних методичних питань, що виникають при цьому.

Розділ “Задачі на побудову”, як відомо, вивчається в шкільному курсі математики частинами в 7, 8 та 9 класах паралельно до ознайомлення з рядом геометричних понять (трикутників, чотирикутників, їх властивостей, геометричних перетворень). Але для майбутніх спеціалістів у галузі математики цього обсягу інформації та рівня теоретичних обґрунтувань недостатньо. Зокрема, тут не виводиться ряд ГМТ площини, відсутня інформація про алгебраїчний спосіб розв’язування задач. А значення розділу для розуміння геометрії в цілому та самостійна його цінність у підготовці спеціалістів величезні. На це вказує академік М. І. Бурда “... важливість задач на побудову обумовлюється особливостями наукової структури курсу геометрії 7-9 класів, провідним компонентом якої є конструктивізм: майже всі геометричні поняття означуються конструктивно; доведення всіх теорем спирається на використання фігур, реальне існування яких можна відтворити побудовою. Отже, задачі на побудову мають розвивати в учнів конструктивний підхід до осмислення всього комплексу геометричних знань, а не лише формувати конструктивні навички розв’язування задач” [2, с. 3].

Тому у класичних і педагогічних університетах практикується читання курсів, які містять елементи конструктивної геометрії. У нашому університеті – це “Вибрані питання елементарної математики”. Вони, згідно навчального плану, включають 20 годин лекцій та 14 годин практичних занять. Цього часу достатньо, щоб на базі вже відомих з школи фактів, повторивши їх, можна було викласти ґрунтовно основні теоретичні моменти і опрацювати методи розв’язування вправ.

На початку, згідно програми, йде доведення властивостей планіметричних фігур, які пізніше використовуватимуться для розв’язування задач на побудову. Далі виводиться ряд ГМТ площини, що дозволяє розв’язувати ряд складних задач на їх застосування. Крім того, коли ми доводимо, що деяка фігура є ГМТ (а саме, показуємо, що якщо точка задовольняє певну умову, то належить фігурі та навпаки), то маємо змогу пояснити логіку загальновживаного алгоритму виведення рівнянь ліній та поверхонь, що використовується в аналітичній геометрії. Адже, коли ми пояснюємо введення системи координат, вибираємо біжучу точку, записуємо основне співвідношення в координатах і здійснюємо перетворення отриманого рівняння, то ми шукаємо аналітичний запис характеристичної умови, яка визначає фігуру. А особливо коли перевіряємо, чи для точки, яка задовольняє виведене рівняння, виконується зазначена властивість. Адже це відповідає другому етапу виведення ГМТ – доведенню того, що кожна точка фігури має характеристичну властивість. Цей зв’язок дозволяє по-іншому поглянути на здійснювані раніше дії, обґрунтовує їх необхідність. Близьким до аналітичної геометрії є й алгебраїчний спосіб розв’язування конструктивних задач. Він дозволяє вирішувати задачі на побудову так, як і звичайні задачі на обчислення і простіше здійснювати етап дослідження. Тему про розв’язність задач на побудову варто викладати в курсі алгебри.

Отримані навички під час розв’язування задач методом геометричних перетворень не тільки демонструють основні властивості рухів та подібності. Вони ще й стають у нагоді при вивченні спецкурсу “Геометричні перетворення та їх застосування” (який читається для студентів V курсу і нараховує 40 лекційних та 20 годин практичних занять). Адже виведені основні властивості, включно з груповими, використовуються при викладанні розділу “Ортогональні перетворення”. А клас уже розв’язаних задач збагачує практичну частину спецкурсу. Крім того, при вивченні кругових перетворень площини є можливість довести основні властивості інверсії та описати вирішення задачі Аполлонія. При потребі, алгебраїчний спосіб розв’язування задач чи інші теми можна винести до розгляду в “Практикумі розв’язування задач з елементарної математики”. Зрозуміло, що про задачі на побудову йдеться і в курсі методики викладання математики, але тільки про ті специфічні питання, що виникають при поясненні теми учням.

Дотичні питання конструктивної геометрії вивчаються також на спецкурсах з проективної геометрії (гомологія, теореми Дезарга, Паскаля, Бріаншона) та “Методах зображення просторових фігур” (позиційні просторові задачі). Зрозуміло, що зазначені вище ліміти виділеного часу і те, що тема частково вивчається на спецкурсах, не може повністю вирішувати питання повного ознайомлення з розділом. А, як зазначає Ленчук І. Г. [4, с. 62]: “… без фахового подання у студентській аудиторії курсу “Конструктивна геометрія” (в якості навчального), головним діючим об’єктом якого є геометрична фігура, а головним засобом навчання – візуалізований проекційний рисунок (зображення), неможливо викликати справжню цікавість до першонауки і домогтися системного засвоєння суб’єктами навчання такого потужного, самобутнього, специфічного методу пізнання світу, яким є Геометрія. Оволодіння цим методом – одна з найважливіших цілей освіти!”.

Конструктивна геометрія як розділ геометрії має багатовікову історію, сама є історією, адже здобутки цієї теорії вилились у найперші геометричні висновки, теореми та формули. Виникнувши як прикладні проблеми, задачі на побудову не стали сукупністю практичних порад та розв’язаних питань, а вплинули на розвиток геометрії в цілому, сформувались у окрему теорію з багатим змістом та значенням. Тому процес викладання основ конструктивної геометрії значно виграє від супроводження курсу даними щодо історичного розвитку цієї науки.

Шлях від розв’язування перших прикладних задач, що стосувались вивчення форми об’єктів, земельних наділів до формулювань загальних геометричних висновків був довгим і непростим. Перші математичні доведення, які приписують грецьким математикам і, зокрема, Фалесу Мілетському (VII-VI ст. до н.е.) були величезним кроком у формуванні дедуктивного характеру математики. Але подальший розвиток цих досягнень розбився об проблему несумірності відрізків і подальший поступ математики знайшов інше русло – геометричну алгебру, коли дії над довжинами відрізків замінювались певними побудовами щодо самих відрізків, оминаючи їх реальні числові характеристики. Ми досі вживаємо “квадрат числа”, не задумуючись, що під цією дією розуміли древні – побудову квадрата за даною стороною. Тоді добуток чисел розумівся як площа відповідного прямокутника чи квадрата.

Саме внаслідок такого підходу Евклід формулював свої аксіоми як чіткі приписи про можливість певних геометричних побудов. Наприклад, “Від будь-якої точки до будь-якої точки можна провести пряму лінію” [1, с. 5]. Нам, читаючи такі твердження, здається, що автор описує конкретні геометричні задачі. Тим більшу вартість має цей прорив для науки – відштовхнутись від задач, прикладних по своїй суті, і подати чітку логічну схему аксіоматичної побудови геометрії. Така справа гідна пам’яті і поваги наступних поколінь. Не дарма “Начала” Евкліда впродовж багатьох століть лишались основним джерелом геометричних знань. В книзі [3, с. 14] наведено такий емоційний відгук А. Ейнштейна про “Начала”: “Це найдивовижніше творіння думки дало людському розуму ту впевненість в собі, яка була необхідна для його наступної діяльності. Той не народжений для теоретичних досліджень, хто в молодості не захоплювався цим творінням”. В Евкліда простежуються й серйозні висновки щодо нескінченності, адже допускається можливість безмежної кількості поділів відрізка на частини.

Цікавою темою для аналізу може бути поява аксіом інструментів геометричних побудов саме в такій формі, яка використовується тепер. Зрозуміло, що допустити можливість будувати з допомогою циркуля коло чи його частину довільно малого радіуса було дещо простіше, ніж здійснити крок до нескінченності. А аксіома лінійки твердить про можливість побудови променя. Це є свідченням серйозного абстрагування від реальних інструментів шляхом їх ідеалізації.

Основні методи розв’язування задач на побудову, що використовувались в ті часи, носили геометричний характер, тому алгебраїчний спосіб з’явився значно пізніше. Але основні етапи розв’язування задач були сформульовані ще древніми греками. І дуже важливо, що вони містили стадії, пов’язані з глибоким рівнем вивчення – доведення і дослідження. Адже саме доведення вимагає застосування загальних тверджень для пояснення правильності побудов та отриманих результатів. А дослідження, крім прямого призначення – відповіді на питання про кількість розв’язків та умови їх існування, надає самим конструктивним задачам глибший, теоретичний рівень. Нам важливо, досліджуючи задачу, описати різні частинні випадки, інші способи розв’язання для випадків, коли наведений загальний метод побудови не діє, а отже, такі дії більш нагадують дослідницько-теоретичну роботу і далеко стоять від простих землемірних питань. Такий підхід сприяв розвитку геометрії в цілому і дав чимало серйозних результатів, які цікаві і глибиною, і оригінальністю методів розв’язання.

Величезні здобутки, які були отримані щодо геометричних побудов на площині в древні часи, важко було відтворити людству через багато століть вдруге. Наприклад, задача Аполлонія (ІІІ ст. до н. е.) наново була розв’язана у XVI столітті Ф. Вієтом. Тобто минуло біля дев’ятнадцяти століть між першим відкриттям та його повторенням. Цій важкій сторінці історії треба приділити при викладанні достатньо уваги, пояснивши основні передумови такого стану речей та тісно пов’язавши їх з етапами існування людської цивілізації. Жахливо, що тільки в новий час (з XVII ст.) теорія задач на побудову, основи якої були закладені ще до нашої ери, змогла рухатись вперед, знаходячи нові джерела розвитку та застосування. Саме тоді на часі стали питання про можливе і неможливе в побудовах циркулем і лінійкою, наближені методи побудов, використання інших наборів інструментів, побудови з обмеженнями. Поява першого з них пояснювалась великими потугами і втратами часу на відшукання способу розв’язування деяких знаменитих задач. Тому логічно, що виникло бажання знайти критерій розв’язності задач, аби не шукати дарма вирішення там, де його не може бути.

Про зацікавленість питаннями задач на побудову в ті часи промовисто свідчить список декотрих вчених, що займались дослідженнями в цій галузі: Декарт, Ферма, Ейлер, Гаусс та інші. Р. Декарт, наприклад, створивши метод координат, ілюстрував його можливості, розв’язуючи конструктивні задачі. Д. Гільберт, у праці, присвяченій обґрунтуванню основ геометрії, наводить побудови з допомогою лінійки та заданого еталону довжини.

Вся ця інформація з історії геометрії може бути подана в залежності від виділеного на вивчення курсу часу та рівня обізнаності аудиторії у різних формах – від пояснень на лекції, повідомлень студентів на спеціально відведеному занятті до оформлення відповідних матеріалів для ознайомлення з ними ширшого кола зацікавлених осіб.

З плином часу, внаслідок проведених ґрунтовних досліджень, викристалізувався певний об’єм знань, що входить тепер до класичної частини сучасної конструктивної геометрії. У XIX ст. з’являється ряд фундаментальних творів, у яких автори подають основні факти, методи розв’язування, критерії розв’язності задач на побудову. Студентам на практичних заняттях варто дати можливість ознайомитись з найбільш відомими посібниками і збірниками задач. Зокрема, попрацювати з книгою І. Александрова "Методи розв'язування геометричних задач на побудову". аби продемонструвати широку гаму вправ та прийомів їх розв'язування, багатство оригінальних формулювань та порад.

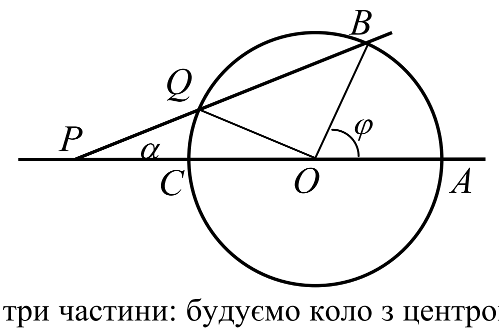
Важливою і повчальною для студентів може стати історія зв'язку теми з теорією алгебраїчних і трансцендентних чисел. Здавалося б далекі від алгебри питання побудов циркулем і лінійкою напряму пов'язані з рівняннями та доведенням трансцендентності числа π. Питання про можливість побудови класичними інструментами правильних многокутників було вирішене завдяки дослідженням Ейлера, а з ним – і проблема класичної задачі про квадратуру круга.

Всю палітру зв'язків задач на побудову з іншими розділами математики та практики, через обмеженість навчального часу та багатоплановість теми, доцільно винести для самостійних розвідок та досліджень у формі рефератів, повідомлень, курсових робіт. Тоді перша зацікавленість вивченими фактами стане стимулом до подальшої роботи допоможе подолати початковий інформаційний бар'єр та усвідомлено здійснювати пошук відповідей на поставлені питання. А можливості досліджень тут вельми багаті. Назвемо тільки кілька напрямків: наближені способи розв'язування задач на побудову, побудови правильних многокутників, вплив проективної геометрії, різні способи розв'язання знаменитої задачі Аполлонія, побудови з обмеженнями.

Оскільки у нашому університеті задачі на побудову студенти спеціальності "математика" вивчають на III курсі, тому, з необхідною інформацією для дослідження деяких із зазначених вище питань вони ще не знайомились (зокрема, з матеріалами з основ геометрії, проективної геометрії). І тому не доцільно такі теми виносити до розгляду в цей період навчання. А для написання курсових чи дипломних робіт отримані знання стануть в нагоді.

Зазначимо тут і про чималий потенціал історичного матеріалу при вивченні класичних нерозв'язних циркулем і лінійкою задач. Адже приклади іноді драматичних пошуків вирішення цих природних і логічних питань, спроб пояснити їх нерозв'язність підсилюється прикладами дуже оригінальних рішень за допомогою іншого набору інструментів побудов. Іноді при допомозі мінімальних додаткових засобів отримуються конструктивно нескладні алгоритми побудов.

Так, в задачі про трисекцію кута можна запропонувати до розгляду метод, який приписують Архімеду; навести рисунок з деякими позначеннями і, вслід за древніми, закликати за ілюстрацією відновити хід доведення. Причому спосіб цей оригінальний, не вимагає великих викладок та застосування багатьох тверджень.



Доведення випливає з аналізу рівнобедреного трикутника *PQO* (рівні кути якого позначимо α), трикутника *QOB* (тут рівні кути по 2α). Врешті, розгорнутий кут *POA*, утворений з кутів: $\angle AOB = \varphi$, $\angle BOQ$ та $\angle QOP$, тому: $\varphi + (180^0 - 4\alpha) + \alpha = 180^0$. Звідки: $\varphi = 3\alpha$. Таким чином кут α втричі менший від φ. Звідси й отримуємо простий алгоритм поділу кута на три частини: будуємо коло з центром у вершині кута і радіусом, рівним відстані між мітками на лінійці; розміщуємо лінійку так, щоб мітки були по одній на прямій, яка є продовженням сторони кута та колі (це точки *P* та *Q* на рисунку). Тоді кут *POQ* – шуканий.

Подібні розв'язання гарно ілюструють синтетичний характер геометрії та здатні захоплювати несподіваністю рішення складних проблем. Такі рафіновані, чисто геометричні міркування та обґрунтування здатні слугувати прикладами доведень і в наш час.

Отже, на прикладі застосування історії математики при вивченні задач на побудову бачимо серйозні можливості позитивних змін у навчальному процесу. Виділимо деякі з них. Історія науки здатна наочно продемонструвати генезис певних теоретичних проблем та цілих розділів, їх значення; розвинути інтерес до навчання, сприяти свідомому вибору засобів дослідження; вплинути на глибину розуміння нового матеріалу та активність його застосування. Вона чекає методичних розробок конкретних тем і здатна розв'язати немалу кількість викликів сучасної школи.

Використана література:

1. *Аргунов Б. И.* Геометрические построения на плоскости : пособие для пед. ин-тов : утв. М-вом просвещения РСФСР / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – 2-е изд. – Москва : Учпедгиз, 1957. – 266 с.
2. *Бурда М. І.* Розв'язування задач на побудову в 6-8 кл. : методичний посібник / М. І. Бурда. – К. : Радянська школа, 1986. – 112 с.
3. *Глухов А. Г.* Книги, пронизывающие века / А. Г. Глухов– 3-е изд. – К. : Рад. школа, 1979. – 152 с.
4. *Ленчук І. Г.* Конструктивна геометрія як галузь математики і навчальна дисципліна / І. Г. Ленчук // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі : зб. наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – № 8. – С. 61-69.
5. *Розуменко А. О.* Знамениті задачі математики / А. О. Розуменко, В. Ф. Власенко, А. М. Розуменко // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 51-65.

References:

1. *Argunov B. I.* Geometricheskie postroeniya na ploskosti : posobie dlya ped. in-tov : utv. M-vom prosveshcheniya RSFSR / B. I. Argunov, M. B. Balk. – 2-e izd. – Moskva : Uchpedgiz, 1957. – 266 s.
2. *Burda M. I.* Rozv'jazuvannja zadach na pobudovu v 6-8 kl. : Metodychnyj posibnyk / M. I. Burda. – K. : Radjans'ka shkola, 1986. – 112 s.
3. *Glukhov A. G.* Knigi, pronizyvayushchie veka / A. G. Glukhov– 3-e izd. – K. : Rad. shkola, 1979. – 152 s.
4. *Lenchuk I. G.* Konstruktyvna geometrija jak galuz' matematyky i navchal'na dyscyplina / I. G. Lenchuk // Naukovyj chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Serija № 3. Fizyka i matematyka u vyshhij i serednij shkoli: Zb. naukovyh prac' – K. : NPU imeni M. P. Dragomanova, 2011. – № 8. – C. 61-69.
5. *Rozumenko A. O.* Znamenyti zadachi matematyky / A. O. Rozumenko, V. F. Vlasenko, A. M. Rozumenko // Fizyko-matematychna osvita. Naukovyj zhurnal. – 2015. – Vypusk 3 (6). – S. 51-65.

Антонюк О. П. Историческая составляющая изучения темы "Задачи на построение" в высшей школе.

Статья посвящена описанию основных моментов использования истории науки в процессе преподавания задач на построение. Исторические знания относительно основных этапов развития конструктивной геометрии и влияния не него отдельных личностей, современного состояния науки и взаимосвязи со смежными областями точно так же важны для понимания, как и основные факты. В работе описаны возможности использования исторического материала для формирования у студентов представлений о природе геометрических знаний, их влияния на развитие математики в целом, осознания прикладного происхождения ряда проблем. В частности, идет речь о первых достижениях конструктивной геометрии, изменении их характера от прикладного к абстрактному; возникновении аксиом инструментов построений; повторных исследованиях и открытиях в эпоху Возрождения; приведен пример решения известной задачи о трисекции угла, приписываемый Архимеду. В статье проанализированы значение и возможности изучения элементов конструктивной геометрии для студентов специальности "математика".

Также обращено внимание на то, что насыщенная эмоциональными, порой драматическими коллизиями информация способна создать соответствующий психологический климат, иметь позитивное воспитательное влияние на студентов. При описании методических аспектов использован опыт преподавания элементов конструктивной геометрии в Восточноевропейском национальном университете им. Леси Украинки.

Ключевые слова: *история математики, задачи на построение, трисекция угла, проективная геометрия, трансцендентные числа, аксиома, познавательный интерес, гуманизация обучения, учебно-воспитательный процесс.*

Antonyuk O. P. Historical component in studying of the theme "Construction problems" in high school.

The article is dedicated to the description of highlights while applying the History of Science in teaching problems for construction. Considerable luggage of historical facts about the main milestones in the development of constructive geometry and the impact on it of individuals, the state of the interpenetration of adjacent sectors are just as important to understand as the basic theoretical facts. This article describes the capabilities of this educational techniques at forming ideas about the origin and nature of geometrical knowledge, their impact on the development of mathematics in general, awareness of applied nature of some problems. Also high attention is devoted to the fact that the rich emotional, dramatic collisions can generate information relevant psychological atmosphere of learning, facilitate educational impact on pupils and students. When describing the methodological recommendations it was taken into account the experience of teaching the elements of constructive geometry at Lesia Ukrainka Eastern European National University.

Keywords: *history of mathematics, construction problems, trisection of angle, projective geometry, transcendental numbers, axiom, cognitive interest, humanization of education, educational process.*

УДК 37.378

Бишевець Н. Г.

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО КОМПЛЕКСУ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Виконано огляд сучасних технологій підтримки навчального процесу студентів ВНЗ. Виявлено головні вимоги, що висуваються до забезпечення навчального процесу студентів ВНЗ при вивченні математичних дисциплін. Представлено авторський електронний навчально-методичний комплекс "Практикум з математичного програмування". Комплекс містить методичний, інформаційно-навчальний та контролюючий блоки. Запропоновано методику застосування навчально-методичного комплексу на практичних заняттях з математичного програмування. Доведено необхідність поєднання у навчальному процесі студентів традиційних і інноваційних методів, прийомів і засобів навчання.

Ключові слова: *комплекс, навчання, підтримка, забезпечення, методика, алгоритм, розв'язання, практика.*

Наряду зі скороченням годин, відведених на вивчення математичних дисциплін студентів різних напрямків навчання, професійна діяльність сучасних фахівців вимагає все вищого рівня їх математичної підготовки. Вирішення існуючого протиріччя покладено на вищу школу. Ситуація, що виникла, передбачає інтенсифікацію навчального процесу у ході вивчення студентами циклу математичних дисциплін.

Вдосконалення освітнього процесу у ВНЗ відбувається за рахунок застосування сучасних педагогічних технологій із застосуванням інформаційних технологій навчання (ІТН), що створює передумови для інноваційної діяльності науково-викладацького складу ВНЗ.