“Additional units of teaching methods of mathematics” and “Technologies of profile mathematics teaching”. In particular, the main ways include: the use of innovative forms of learning, organization kvaziprofessional activity of students in the practical and laboratory classes, attracting students to use information and communication technologies, including the innovative, in the process of lectures, practical, laboratory work and organization of independent work; use of innovative forms of control and so on.

Keywords: *readiness to innovative pedagogical activities, methodical disciplines, teacher of mathematics.*

УДК 514

Грищук А. М., Грищук В. В., Корнійчук П. П.

ГЕОМЕТРИЧНЕ ДОВЕДЕННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОРЕНЦА

В статті представлено геометричне доведення перетворень Лоренца та їх наслідків. Результати статті можуть бути використані при вивченні спеціальної теорії відносності.

Ключові слова: *перетворення Лоренца, спеціальна теорія відносності, метрика простору.*

Як відомо, перетворення Лоренца встановлюють зв’язок між координатами подій відносно різних інерціальних систем відліку, при якому інтервал s між двома подіями залишається незмінним, тобто

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = const\,. \tag{1}$$

При цьому простір подій можна взаємно однозначно відобразити на чотирьохвимірний псевдоевклідовий простір індексу 1 таким чином, що координати події (ct, x, y, z) обчислені в довільній інерціальній системі відліку будуть ортонормованими координатами в псевдоевклідовому просторі:

$$x^0 = ct, \quad \mathrm{x}^1 = x, \quad \mathrm{x}^2 = y, \quad \mathrm{x}^3 = z$$

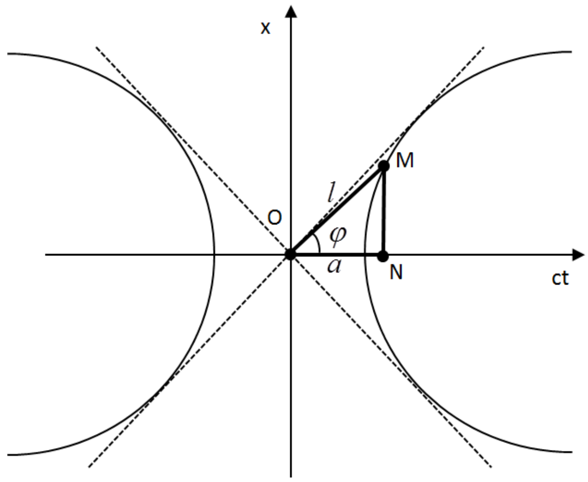
Тоді

$$s^2 = (x^0)^2 - (\mathrm{x}^1)^2 - (\mathrm{x}^2)^2 - (\mathrm{x}^3)^2$$

Тим самим вибір інерціальної системи в просторі подій рівнозначний вибору ортонормованої координатної системи в псевдоевклідовому просторі, а перехід від однієї інерціальної системи до іншої рівнозначний переходу від однієї ортонормованої системи до іншої. Оскільки метричні властивості псевдоевклідового простору відрізняються від метричних властивостей евклідового простору, то існуючі доведення перетворень Лоренца мають аналітичний характер [1-3].

Метою даної статті є встановлення співвідношень між метрикою псевдоевклідового простору та метрикою евклідового простору і одержання геометричного доведення перетворень Лоренца.

Інтервал між двома подіями (1), можна розглядати як відстань між двома точками в чотирьохвимірному псевдоевклідовому просторі і перетворення Лоренца залишають незмінною цю відстань. Нетривіальні перетворення повинні математично виражатися як обертання чотирьохвимірної системи координат (ct, x, y, z). Будь-яке обертання в чотирьохвимірному просторі можна розкласти на шість обертань в площинах (x, y), (z, y), (x, z), (ct, x), (ct, y), (ct, z). Перші три обертання відповідають звичайним просторовим поворотам в евклідовому просторі. Розглянемо поворот в площині (ct, x), який відповідає переходу від нерухомої інерціальної системи до системи, що рухається зі швидкістю V вздовж осі x. Це перетворення залишає незмінною різницю $c^2t^2 - x^2$, яку можна вважати "відстанню" між точками (ct, x), та початком координат, оскільки координати y та z при такому повороті не змінюються.



1. Евклідове зображення кола радіуса a

Розглянемо коло радіуса a $(a > 0)$ в псевдоевклідовій площині, рівняння якого буде мати вигляд $c^2t^2 - x^2 = a^2$. Це коло відобразиться на дві гіперболи в евклідовій площині (рис. 1). З трикутника OMN випливає:

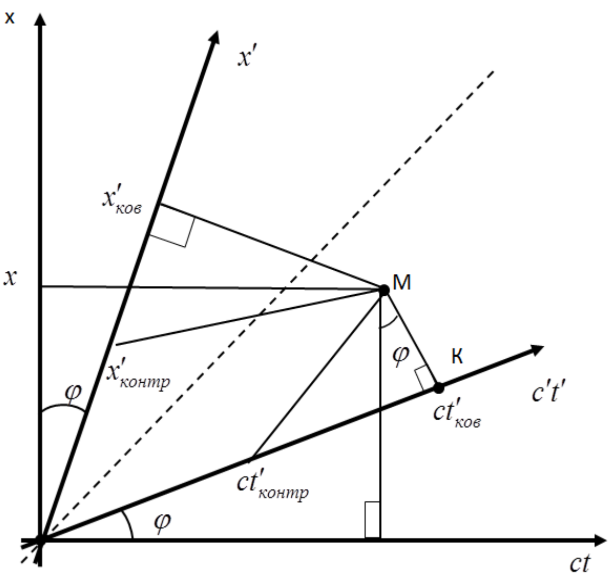
$$OM^2 = l^2 = (ON)^2 + (MN)^2 = c^2t^2 + x^2$$

Оскільки $l^2 = c^2t^2 + x^2$ і $a^2 = c^2t^2 - x^2$, то додавши ці два рівняння одержимо $2c^2t^2 = a^2 + l^2$, де $ct = l\cos\varphi$. Спираючись на ці рівняння отримаємо:

$$a = l\sqrt{\frac{1 - tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi}} \tag{2}$$

Тобто, числове значення координати на псевдоевклідовій площині можна одержати, якщо відповідну координату на евклідовій площині помножити на $\sqrt{\frac{1 - tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi}}$. Враховуючи, що $tg\varphi = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{V}{c}$, формула (2) набуває вигляду:

$$a = l\sqrt{\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{1+\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (3)$$



2. Координати події в різних інерціальних системах відліку

В косокутній системі координат (ct', x') слід розрізняти коваріантні і контраваріантні координати (рис. 2). Оскільки перетворення Лоренца встановлюють зв'язок між контраваріантними координатами, то надалі обмежимося ними. Встановимо зв'язок між t і t':

$$OK = \frac{ct}{\cos\varphi} + (x - ct \cdot tg\varphi)\sin\varphi = c't' + x'\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) \qquad (4)$$

Встановимо зв'язок між x' та x

$$MK = x'\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = (x - ct \cdot tg\varphi)\cos\varphi \qquad (5)$$

Використовуючи основні тригонометричні співвідношення та формули (4,5) отримаємо $t'_{евкл} = \dfrac{\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Згідно рівняння (3) значення t' на псевдоевклідовій площині дорівнює:

$$t'_{псевд} = t'_{евкл}\sqrt{\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{1+\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\left(t-\frac{Vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{6}$$

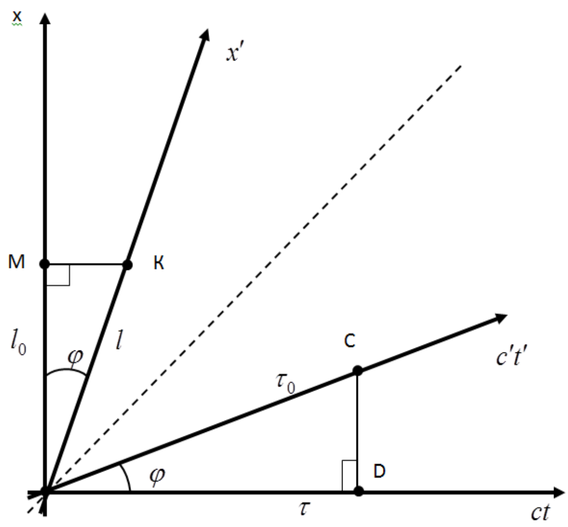
Подібними перетвореннями одержимо

$$x'_{евкл} = \frac{(x-Vt)\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}}$$

Дане значення $x'_{евкл}$ дає можливість визначити $x'_{псевд}$:

$$x'_{псевд} = x'_{евкл}\sqrt{\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{1+\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(x-Vt)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{7}$$

Таким чином проведені нами розрахунки повністю узгоджуються з відомим виглядом перетворень Лоренца.



3. До встановлення наслідків з перетворень Лоренца

Скориставшись одержаними результатами та рисунком 3 встановимо відносність просторових та часових інтервалів. Як випливає з трикутника ОМК (рис. 3),

$$l_{евкл} = \frac{l_0}{\cos\varphi} = l_0\sqrt{1+tg^2\varphi} = l_0\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

Тоді для $l_{псевд}$ за формулою (3) одержимо:

$$l_{псевд} = l_{евкл}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\bigg/1+\frac{V^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{8}$$

Подібними перетвореннями з трикутника OCD отримаємо

$$\tau = \tau_0 \bigg/ \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{9}$$

Представлені результати є наглядним методом одержання перетворень Лоренца та їх наслідків, і можуть бути використані при вивченні спеціальної теорії відносності.

Використана література:

1. *Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – С. 11-28.
2. *Паули В.* Теория относительности / В. Паули. – М. : Наука, 1983. – С. 13-40.
3. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – С. 34-66.

References:

1. *Landau L. D.* Teoryja polja / L. D. Landau, E. M. Lyfšyc. – M. : Nauka, 1973. – S. 11-28.
2. *Pauly V.* Teoryja otnosytelnosty / V. Pauly. – M. : Nauka, 1983. – S. 13-40.
3. *Uharov V. A.* Specyalnaja teoryja otnosytelnosty / V. A. Uharov. – M. : Nauka, 1977. – S. 34-66.

Грищук А. М., Грищук В. В., Корнийчук П. П. Геометрическое доказательство преобразований Лоренца.

Поскольку метрические свойства псевдоевклидового пространства отличаются от метрических свойств евклидового пространства, то существующие доказательства преобразований Лоренца имеют аналитический характер.

Целью данной статьи является установление соотношений между метрикой псевдоевклидового пространства и метрикой евклидового пространства, а также получение геометрического доказательства преобразований Лоренца и их следствий. В статье рассмотрен поворот в плоскости (ct, x), который соответствует переходу от неподвижной инерциальной системы до системы, что движется со скоростью V вдоль оси x. Это преобразования оставляют неизменной разницу $c^2t^2 - x^2$*, которую можно считать расстоянием между точками* (ct, x)*, и началом координат.*

Рассматривая круг радиуса a в псевдоевклидовой плоскости, который отображается в две гиперболы на евклидовой плоскости, установлена связь между метриками псевдоевклидового и евклидового пространств. Используя представленные в статье рисунки и тригонометрические соотношения, получены преобразования Лоренца, а также показана относительность пространственных и временных интервалов. Результаты статьи могут быть использованы при изучении специальной теории относительности.

Ключевые слова: *преобразования Лоренца, специальная теория относительности, метрика пространства.*

Gryschuk A. M.,Gryschuk V. V., Korniychuk P. P. Geometric proof of the Lorentz transformations.

The paper presents a geometric proof of the Lorentz transformations and their consequences. The results of the article can be used to study the special theory of relativity.

Keywords: *Lorentz transformations, special theory of relativity, metric space.*