

ФІЗИКА

УДК 378:147:53

Аветісян Є. О., Дятлов Ю. В., Шенета О. М.

ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НЕСКЛАДНИХ СХЕМ ЗМІННОГО СТРУМУ

У статті розповідається історія створення операційного числення та використання його для розрахунку нескладних схем змінного струму. Історичні відомості, дозволяють використовувати цей матеріал на лекціях та практичних заняттях з фізики, математики та електротехніки. Розкрито переваги операційного числення перед іншими методами розрахунку нескладних схем змінного струму.

Ключові слова: операційне числення, інтегральні перетворення, символічне числення, комплексні числа, телеграфні рівняння, перетворення Лапласа, оператор, крайові задачі, теорія наближень, проблема моментів, теорія функцій комплексного змінного, теорія сингулярних інтегральних рівнянь.

Операційне числення є потужним апаратом для дослідження багатьох як теоретичних питань, так і прикладних задач, не лише математиці, а й в інших областях науки та техніки. Дуже активно операційне числення використовується при дослідженні багатьох питань фізики, механіки, теорії автоматичного регулювання, електротехніки, радіотехніки, теплопровідності, гірничої техніки [5]. Таким чином операційне числення доцільно викладати для студентів ВНЗ, які спеціалізуються в галузі фізики і математики. Знання методів операційного числення суттєво полегшує розв'язок практичних задач з електротехніки.

Саме від таких великих математиків як Лейбніц і Сервуа бере початок історія операційного числення. Також в цьому напрямку працювали такі вчені, як Буль, Гревс, Хергріву, Джиллет, Мерфі, Кермайл, Кейлі [5].

Прикладного напрямку операційне числення набуває ще в XVIII столітті. Саме в XVIII столітті була впорядкована звичайна математична символіка і це стало поштовхом для перших ідей про можливість введення нових символів, застосування яких змогло б спростити складні математичні операції.

Великий внесок у розвиток операційного числення зробив Ж. Ліувілл. Дослідження Ж. Ліувілля використовував в своїх роботах один із засновників Московського математичного товариства А. В. Летніков. Саме спроби знайти спільний метод інтегрування диференціальних рівнянь стали причиною досліджень А. В. Летникова в області операційного числення, але знайти розв'язки цього питання Летникову не вдалося. Взагалі математичні роботи, присвячені операційному численню з'явилися вже в середині XIX століття.

У 1886 р. швейцарський математик Габриель Ольтрамаре (1816–1906 рр.) спробував створити символічне числення. Його дослідження отримали назву функціональне символічне числення. Надалі, завдяки своїм розрахункам, Ольтрамаре отримав велику кількість формул.

Але через стрімкий розвиток техніки, який вимагав швидких відповідей на свої завдання, а самі інженери потребували практичних методів, а не теорії, в кінці XIX століття розвиток даної теорії почав зупинятися. Будувалася нова система операційного числення на основі перетворень Лапласа. Що знімає саму ідею дії “оператора” на “вираз, який оперується”, і тому, як вказує Ван-дер-Поль, знову з’являється право застосовувати замість терміна “операційне числення” термін “символічне числення”. Таким чином, математики знову повернулися до вихідної точки [5].

Роботи англійського вченого-самоучки, інженера, математика і фізика Олівера Хевісайда (1850–1925 рр.) були опубліковані на початку XX століття, в яких досліджувались різні питання електротехніки та електрозв’язку. Хевісайд першим застосував комплексні числа для вивчення електричних кіл, розробив техніку застосування перетворень Лапласа для розв’язання диференціальних рівнянь, сформулював рівняння Максвелла в термінах електричної і магнітної сил і потоку, і незалежно від інших математиків створив векторний аналіз. Хевісайд більшу частину життя не знаходив спільної мови з науковим співтовариством, проте його роботи змінили вигляд як математики, так і фізики на багато років. 1873 року він розробив теорію ліній передачі (також відому як “телеграфні рівняння”) [2].

Саме О. Хевісайд ввів позначення для диференціального оператора та метод розв’язання диференціальних рівнянь за допомогою зведення їх до звичайних алгебраїчних рівнянь. О. Хевісайд є автором відомої фрази: “Математика – наука експериментальна, визначення з’являються останніми”. Англійський вчений взяв за мету виробити метод для вирішення диференціальних рівнянь, де трансцендентна операція диференціювання повинна була бути замінена на алгебраїчну операцію множення. Свої ідеї О. Хевісайд виклав у другому томі тритомного твору “Електромагнітна теорія”. Найбільш серйозно О. Хевісайд підійшов до питання про поширення збурень у довгих лініях з урахуванням або без урахування індуктивності самих ліній, а також в лініях, що закінчуються будь-яким повним опором. Це питання він використовував для застосування операційного числення. Простота вирішення цих, іноді дуже складних завдань, були просто дивовижні.

Хевісайд дуже мало посилається на роботи своїх попередників, таким чином всі положення операційного числення були виведені їм більш-менш незалежно від інших математиків. Також одним з найважливіших результатів Хевісайда є теорема розкладання.

В подальшому вагомий внесок у розвиток операційного числення зробив А. М. Данилевський. За освітою він був інженером-електриком, а з 1935 р. працював в Математичному інституті Харківського університету. Данилевський був надзвичайно ерудованим в області математики, а тому в період своєї роботи в Харківському університеті він опублікував дуже багато досліджень, де особливої уваги заслуговує його робота “Про чисельне рішення хвильових рівнянь”. Колега Данилевського, А. М. Ефрос, також був співробітником Математичного інституту Харківського університету. Він закінчив Харківський електротехнічний інститут, захистив кандидатську і докторську дисертації і отримав звання професора. У 1937 р. А. М. Данилевський і О. М. Ефрос працювали разом і опублікували дуже об’ємну роботу по операційним методам числення – “Операційне числення та контурні інтеграли”. За основу своєї роботи вони взяли операційне числення Хевісайда в тій його формі, яка була розроблена Карсоном. А в своїй роботі під назвою “Деякі застосування операційного числення до аналізу” Ефрос значно доповнив співвідношення, виведені Карсоном, Ван-дер-Полем і іншими вченими. Для цього він

використовував різні методи і способи операційного числення, але звів він їх, в основному, до наступних: застосування теореми Бореля (звичайної і узагальненої); підсумовування зображень і початкових функцій; застосування рядів зображень і рядів початкових функцій; диференціювання та інтегрування символічних співвідношень по визначеному параметру; змішані перетворення; обчислення інтегралів за допомогою введення параметрів, які перетворюються символічно.

Випускник Харківського політехнічного інституту Айзенберг Яків Єйнович (1934-2003), який почав свою діяльність інженером, а став не лише впливовим вченим-теоретиком, а навіть доктором технічних наук, професором і академіком, присвятив свою наукову діяльність створенню алгоритмів управління ракетою. Взагалі саме по собі управління міжконтинентальними балістичними ракетами (МБР) – це одна з найбільш складних систем, створених людством, а техніка, яка свого часу була розроблена в СРСР, була однією з перших в світі. Таким чином, серед його робіт не можна не звернути увагу на роботу “Про застосування операційного числення до крайових задач” [4].

Ще один дійсно великий вчений, який зробив величезний внесок у розвиток науки, це Наум Ілліч Ахієзер (1901-1980). Він також працював в Харківському політехнічному інституті і був засновником кафедри прикладної математики та завідував нею з 1947 р. по 1955 р. Наукові результати Н. І. Ахієзера були пов’язані з теорією наближень, проблемою моментів, теорією функцій комплексного змінного, гідромеханікою і теорією сингулярних інтегральних рівнянь. У своїх дослідженнях цей вчений широко використовував методи теорії функцій комплексного змінного. На особливу увагу заслуговує його робота під назвою “Теорія лінійних операторів в гільбертовому просторі”. Варто відзначити, що написана вона не тільки самим Ахієзером, а в співавторстві з І. Н. Глазманом, який був добре обізнаний в області символічного числення.

Операційне (символічне) числення широко застосовується на практиці при розв’язанні різних задач науки і техніки. Особливо широке застосування воно має при дослідженні перехідних процесів у лінійних фізичних системах електротехніки, автоматики, радіотехніки і телемеханіки.

Велика універсальність операційного числення при розв’язанні задач пояснюється можливістю отримати їх розв’язки найбільш раціональним шляхом. В електротехніці операційне числення застосовується для розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах з постійними параметрами: R (опір), L (індуктивність) і C (ємність). Тобто під час переходу від одного режиму роботи електричного кола до іншого, який будь-яким чином відрізняється від попереднього. Найчастіше ці процеси викликані саме комутацією в колі (замиканням або розмиканням перемикачів). При перехідному процесі значно збільшуються значення напруг і струмів в усьому колі, або на окремих його елементах, а через це електричне обладнання може вийти з ладу. Лінійні диференціальні рівняння та їх системи, якими описуються процеси в цих колах, легко вирішуються методом операційного числення.

При розрахунках операторним методом перехідних процесів в електричних колах використовують певну послідовність дій: спершу визначають початкові умови, після чого записується рівняння або система рівнянь для даного кола в операторній формі, потім завдяки цьому можна знайти зображення шуканих струмів або напруг. Потім, по знайденим зображенням визначаються миттєві значення струмів або напруг перехідного процесу.

Класичний метод розрахунку електричних кіл зазвичай використовують тоді, коли електричне коло має невисокий порядок складності, а зовнішня дія після комутації є гармонійною функцією часу або лишається сталою. Якщо зовнішня дія має більш складний характер, то визначення примусової складової реакції кола суттєво ускладнюється, а при

підвищенні порядку кола ускладнюється визначення сталих інтегрування. В такому випадку, операторний метод, який базується на використуванні перетворень Лапласа, дає більше можливостей при аналізі перехідних процесів, ніж класичний метод. Операційне числення дозволяє розрахувати процеси в електричних колах при довільних зовнішніх напругах. Даний метод є настільки зручним для використання, що у більшості курсів електротехніки і теорії автоматичного регулювання він займає одне з центральних місць.

Розглянемо на прикладі використання операційного числення при розрахунку нескладних систем змінного струму.

Приклад. Знайти перехідний струм i_1 ланцюга, зображеного на малюнку (рис. 1), після комутації при дії постійної ЕРС $E = 10\text{В}$. Параметри кола: $R_1=R_2=10\text{ Ом}$, $C=10^{-3}\text{ Ф}$.

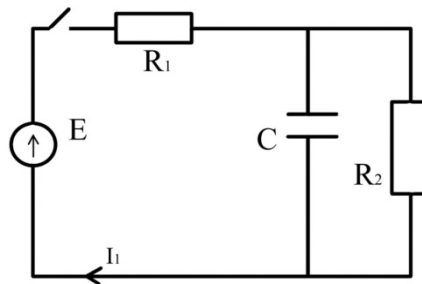


Рис. 1

Розв'язування. При $t=0$ вмикається постійна напруга E . За законом Ома операторний

струм $I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}$. Для паралельних гілок, що містять C та R_2 , операторний опір дорівнює $\frac{R_2}{C \cdot R_2 \cdot p + 1}$. Тому для всього контуру будемо мати (тепер розглядаємо послідовне

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{C \cdot R_2 \cdot p + 1} = \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot p + R_1 + R_2}{R_2 \cdot C \cdot p + 1}$$

з'єднання з R_1):

При такому з'єднанні операторний струм буде дорівнювати:

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \cdot \frac{R_2 \cdot C \cdot p + 1}{C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot p + R_1 + R_2} = \frac{E (R_2 \cdot C \cdot p + 1)}{p (C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot p + R_1 + R_2)}$$

Підставляємо дані з умови:

$$I(p) = \frac{0,1p + 10}{p(0,1p + 20)} = \frac{p + 100}{p(p + 200)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 200} = \frac{0,5}{p} + \frac{0,5}{p + 200}$$

За даним зображенням легко знаходиться оригінал $i(t)$: $i(t) = 0,5 + 0,5e^{-200t}$

Відповідь: $i(t) = 0,5 + 0,5e^{-200t}$ [1]

Методи операційного числення застосовуються також в математичній фізиці, теорії спеціальних функцій, при обчисленні інтегралів і рядів та ряді інших питань. Особливо велике і важливе значення вони мають в сучасних галузях науки і техніки, таких як автоматика та телемеханіка, теорія регулювання.

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко використовується для розв'язування диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об'єктів. Зокрема, для розрахунків перехідних режимів електричних ланцюгів. Однак треба зазначити, що операційний метод безпосередньо не може застосовуватись для кіл, параметри та структура яких змінюються з часом, а також таких, що містять нелінійні елементи. Методи варіаційного числення

знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язуванні задач моделювання, оптимізації та керування.

Отже, як висновок можна сказати, що теорія операційного числення в сучасній математиці має велике значення як логічне продовження вивчення числа, способів вирішення різноманітних задач природничо-математичних наук. Саме з цих причин курс операційного числення є необхідним для студентів ВНЗ, які спеціалізуються в галузі фізики і математики. Застосування операційного числення і комплексних чисел найбільш повно узагальнює математичні поняття і способи розв'язання диференціальних рівнянь, які можна застосовувати не тільки в математиці.

Використана література:

1. *Авдеева Т. В.* Операційне числення та його використання / Т. В. Авдеева. – Київ, 2017.
2. *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд / Б. М. Болотовский. – М. : “Наука”, 1985. – 259 с.
3. *Петрова С. С. О.* Хевисайд и развитие символического исчисления / С. С. Петрова. – ИМИ, 1985. – Вып. 28. – С. 98–122.
4. *Товажнянский Л. Л.* Харьковский политехнический университет. Ученые и педагоги / Л. Л. Товажнянский. – ХПИ, 2004. – 223 с.
5. *Штокало И. З.* Операционное исчисление (Обобщения и приложения) / И. З. Штокало. – К. : Наукова Думка, 1972. – 279 с.

References:

1. *Avdeeva T. V.* Operacijne chislennia ta iogo vikoristannia / T. V. Avdeeva. – Kyiv, 2017.
2. *Bolotovskij B. M.* Oliver Hevisaid / B. M. Bolotovskij. – M. : “Nauka”, 1985. – 259 s.
3. *Petrova S. S. O.* Hevisaid i razvitie simvolicheskogo ischislenija / S. S. Petrova. – IMI, 1985. – vip. 28. – S. 98–122.
4. *Tovazhnianskij L. L.* Harkovskij politehniceskij universitet. Uchenie i pedagogi / L. L. Tovazhnianskij. – HPI, 2004. – 223 s.
5. *Shtokalo I. Z.* Operacionnoe ischislenie (Obobchenija i prilozhenija) / I. Z. Shtokalo. – K. : “Naukova Dumka”, 1972. – 279 s.

Аветисян Є. О., Дятлов Ю. В., Шепета О. М. *Использование операционного исчисления для расчётов несложных схем переменного тока.*

В данной статье рассматриваются аспекты истории создания операционного исчисления, а так же его использования для расчета несложных схем переменного тока. Исторические сведения, которые раскрываются в статье, позволяют использовать этот материал во время проведения лекций и практических занятий по физике, математике и электротехнике. Особое внимание обращено на весомый научный вклад в развитие операционного исчисления группы украинских ученых А. М. Данилевского, О. М. Ефроса, Я. Е. Айзенберга, Н. И. Ахиезера и И. Н. Глазмана. Так же в статье раскрываются преимущества операционного исчисления перед другими методами расчета несложных схем переменного тока. Так же обозначены и ограничения, накладываемые на типы цепей переменного тока, для которых применение выше указанного метода будет не корректным. Для примера приведено решение задачи из раздела электричество курса общей физики.

Ключевые слова: *операционное исчисление, интегральные преобразования, символическое исчисление, комплексные числа, телеграфные уравнения, преобразование Лапласа, оператор, краевые задачи, теория приближений, проблема моментов, теория функций комплексного переменного, теория сингулярных интегральных уравнений.*

Avetisyan E., Dyatlov Y., Shepeta O. Operational calculus: historical aspects.

The article tells the story of the creation of operational calculus and use it to calculate simple AC circuits. Interesting historical information disclosed in the article allow you to use this material in lectures on physics, mathematics and electrical engineering. Operational calculus reveals advantages over other methods of calculating simple AC circuits.

Keywords: *operational calculus, integral transformation, symbolic calculus, complex numbers, telegraph equations, Laplace transform, operator, boundary value problems, approximation theory, the problem points, complex variable theory, the theory of singular integral equations.*

УДК 373.371 : 53

Солоденко А. П.

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНФРАЗВУКОВИХ ХВИЛЬ НА УРОКАХ ФІЗИКИ У 9 КЛАСІ

У статті розглянуто методичні підходи до вивчення питання “Інфразвук. Джерела інфразвуку. Застосування інфразвуку” на уроках фізики в 9 класі. Зазначено, що вивчення властивостей хвиль завжди викликає в учнів певні ускладнення, що пояснюється недостатньою пропедевтичною підготовкою, наданням великої кількості нової інформації в обмежені терміни, утрудненнями у виконанні пізнавальних операцій відповідно до способів засвоєння інформації тощо. Констатовано, що кількість навчальних годин, відведених на вивчення властивостей інфразвукових хвиль, не дозволяє повністю ознайомити з ними учнів, до того ж розгляд питань, що стосуються властивостей ультразвуку та інфразвуку, передбачено здійснити протягом одного уроку, що може негативно вплинути на рівень сприйняття їх змісту. Висловлено думку про те, що ці питання доцільно розглядати в рамках навчальних проєктів, оскільки в умовах проєктної діяльності для учнів будуть забезпечені найбільш сприятливі умови щодо створення нових способів пізнання у процесі здобуття знань, а також досягнення максимального рівня самостійності.

Ключові слова: *методичні підходи до вивчення властивостей інфразвукових хвиль, закономірності та наслідки впливу інфразвуку на живі організми, предметна компетентність з фізики.*

Згідно чинної навчальної програми з фізики властивості механічних, зокрема, інфразвукових хвиль, вивчаються в розділі 3 “Механічні та електромагнітні хвилі” курсу фізики 9 класу. Слід зазначити, що вивчення властивостей хвиль завжди викликає в учнів певні ускладнення. Це пояснюється багатьма як об’єктивними, так і суб’єктивними причинами – недостатньою пропедевтичною підготовкою, наданням великої кількості нової інформації в обмежені терміни, утрудненнями у виконанні пізнавальних операцій відповідно до способів засвоєння інформації тощо. Що ж стосується питань, пов’язаних з виникненням та використанням інфразвуку, то вони зазвичай розглядаються поверхнево, до того ж інформація, яка ілюструє технічні застосування інфразвуку, у засобах масової інформації подана дуже обмежено. Проте, вона є необхідною не лише для підвищення рівня знань учнів з фізики, а й для підвищення загального рівня їх інтелектуального розвитку. Дійсно, останні дослідження у галузі інфразвуку зумовили їх бурхливе впровадження у техніку та технології. Крім того, в умовах сучасної цивілізації гостро відчувається необхідність ефективних підходів до поєднання наукових знань з їх гуманістичним тлумаченням. За думкою більшості учених, сфера дії науково-технічного прогресу на сучасному етапі розширюється не лише