Література

1. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. – К.: Вища школа, 1982. – 96 с.

2. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296с.

3. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знание, 1979. – 64с.

4. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208с.

5. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics magazine. – 1957. – 31. – P. 98-110.

Залізко В.Д.
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ КООПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ БІЛЬШЕ ОДНІЄЇ ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Нехай $C[a,b]$ позначає простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $f:[a,b]\to R,$ з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Замітимо, що якщо

$$f: f''\in C[-1,1], \text{то} f\in\Delta^{(2)}(Y)\Leftrightarrow f''(x)\Pi(x)\geq 0, x\in[-1,1].$$

Згадаємо, що для будь-якої обмеженої функції f і $k\in N,$ $k-$та розділена різниця з кроком h від функції f в точці x має вигляд:

$$\sigma_h^k(f;x):=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih),$$

а $k-$ ий модуль неперервності функції $f\in C[a,b]$ визначається як

$$\omega_k(f;t;[a,b]):=\sup_{h\in[0,t]}\sigma_h^k(f;\cdot)_{[a,b-kh]}, t\in[0,(b-a)/k],$$

$$\omega_k(f;t;[a,b])\equiv\omega_k(f;(b-a)/k;[a,b]), t\geq(b-a)/k.$$

Надалі будемо використовувати спрощені позначення

$$C := C[-1,1], I := [-1,1], \omega_k(f;t) := \omega_k(f;t;I).$$

$$C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\},\ r \in N,$$

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, n \in N, x \in I,$$

$$\delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, n \in N, x \in I,$$

$$\Pi(x) := \Pi(x;Y) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i),$$

де $Y := Y_s := \{y_i\}^s{}_{i=1}$ позначає фіксований набір точок y_i такий, що

$$y_{s+1} := -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1 =: y_0,\ s \in N..$$

Нагадаємо, що через $\Delta^{(2)}(Y)$ позначають множину неперервних на [-1,1] функцій f таких, що f є опуклою донизу на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$, якщо i парне i f є опуклою догори, на тому ж самому відрізку, якщо i непарне. Функції з множини $\Delta^{(2)}(Y)$ називаються кусковоопуклими або коопуклими.

В роботі доведемо наступну Лему 1.

Лема 1.

Якщо $s > 0$, $s \neq 1$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y) \cap C^{(r)}$, то існує стала $C(Y)$, яка залежить тільки від $\min\limits_{i=0,\ldots,s}(y_i - y_{i+1})$, така, що для кожного $n \geq s+2$, існує алгебраїчний *многочлен P_n степеня $\leq n$, який задовольняє наступні нерівності*

$$P''_n(x)\Pi(x) \geq 0, x \in I,$$

$$\left|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)\right| \leq C(Y)\omega_{3-r}\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), x \in [-1,1],\ r=1, 2.$$

Для доведення Леми 1 ми будуємо кусково-опуклий сплайн степеня ≤ 2, властивості якого наведені в Лемі 2, яка формулюється нижче.

Для кожного $j=\overline{1,n}$, позначимо

$$I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}].$$

Для фіксованих $n \in N$ і $Y=\{y_i\}_{i=1}^{s}$ позначимо

$$O_i := O_{i,n} := O_{i,n}(Y) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \text{якщо } y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{n+2}=x_{n+1}:=-1, x_{-1}=x_{-2}=x_{-3}:=1,\ O:=O(n,Y):=\bigcup_{i=1}^{s} O_i$.

Будемо писати

$$j \in H, \text{якщо } I_j \cap O = \varnothing, j=\overline{1,n}.$$

Сформулюємо допоміжну Лему 2.

Лема 2.

Якщо $s>0$, $s\neq 1$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то існують сталі* $N(Y)$ *і* $C(Y)$, *які залежать тільки від розташування точок в наборі* Y, *такі, що для кожного* $n \ge N(Y)$, *існує сплайн* L, *степеня* ≤ 2, *з вузлами в точках* x_j з $j \in H$,

такий, що

$$L \in \Delta^{(2)}(Y),$$

$$|f(x)-L(x)| \le C(Y)\omega_3(f;\rho_n(x)), x \in I.$$

Побудова коопуклого сплайна

Побудуємо інтерполяційний коопуклий сплайн S степеня ≤ 2, з вузлами в кожній точці множини

$$X_n := \{x_j\}_{j\in H} \cup Y \cup \{1\},$$

і наведем допоміжні нерівності.

Через $|E|$ позначимо довжину E, зокрема,

$$|I_j| := x_{j-1}-x_j =: h_{j,n} =: h_j.$$

Нехай

$$\left(\underline{y}_i, \overline{y}_i\right) =: \left(\underline{y}_{i,n}, \overline{y}_{i,n}\right) =:^{*} O_i, i=\overline{1,s}.$$

Тобто, $\{\underline{y}_i, \overline{y}_i\}_{i=1}^{s} \subset X_n$. Покладем

$$\overline{y}_{s+1} := -1, \underline{y}_0 := 1.$$

Розіб'ємо множину $G := I \setminus (\bigcup_{i=1}^{s} {}^{*}O_i)$ на дві множини $\breve{G}$ і $\hat{G}$ так, що

$$G = \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ i-\text{парне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i] \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i-\text{непарне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i] \right) =: \breve{G} \cup \hat{G}.$$

Тобто, $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, є опуклою донизу для $x \in \breve{G}$, і є опуклою догори для $x \in \hat{G}$.

Нехай $l(x,g;b) := l(x,g;a,b,c)$ позначає многочлен Лагранжа, який інтерполює функцію $g \in C$ в точках *a, b і c* з множини X_n, таких, що $a < b < c$, і в множині X_n немає точки $d \neq b$, для якої виконується нерівність $a < d < c$.

Через $S := S(x, f; X_n)$ позначимо неперервний сплайн, степеня $\leq 2, S' \notin C$, який інтерполює f в кожній точці набору X_n.

Перенумеруємо точки набору X_n у спадному порядку

$$-1 := z_{n-4s} < ... < z_1 < z_0 := 1, \ X_n = \{z_k\}_{k=0}^{n-4s}.$$

Покладемо $z_{-1} := 1$ і $z_{n-4s+1} := -1$.

Скористаємось сплайном $S = S(x; f; X_n)$, який має представлення

$$S(x) = \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k \Psi_k(x) + l(x, f; z_{n-4s-1}),$$

або, що те саме,

$$S(x) = l_1(x, f; -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k(\Psi_k(x) - \Psi_{k-1}(x)),$$

де $l_1(x, f; -1)$ позначає пряму, яка інтерполює f в точках -1 і z_{n-4s-1}, (детальніше дивись [5]). Нехай точки $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n), j = 0,...,n,$ складають чебишевське розбиття відрізку I.

Для зручності, многочлен P_n з Леми 1 побудуємо у вигляді суми двох многочленів $\tilde{P}_n$ та $\bar{P}_n$.Представимо многочлен P_n у вигляді суми двох многочленів $\bar{P}_n$ та $\tilde{P}_n$.

Нехай

$$\bar{P}_n(x) := l_1(x, f; -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k\,(U_k(x) - U_{k-1}(x)),$$

$$F_k := [z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f],$$

$$U_k(x) := \begin{cases} V_{j(k)}(x;-), & якщо\, |F_k| \le |F_{k+1}|, \\ V_{j(k)}(x;+), & якщо\, |F_k| > |F_{k+1}|, \end{cases}$$

j(k):=j, якщо $z_k = x_j$, $k = \overline{2, n-4s}.$

(Многочлени $V_{j(k)}(x;-)$ і $V_{j(k)}(x;+)$ підлягають визначенню).

Для будь-якої фіксованої точки $a \in l$, нехай

$$\chi(x;a) := \begin{cases} 0, якщо\, x \le a, \\ 1, якщо\, x > a. \end{cases}$$

$$\chi_j(x) := \chi(x; x_j).$$

Покладемо $(x-a)_+ := (x-a)(x-b)\chi(x;a).$ Для будь-яких двох фіксованих точок

a і $b \in I,\ a < b,$

позначимо

$\psi(x;a,b;-) := (x-a)(x-b)\chi(x;a)$,

$$\Phi_k := [z_{k+1}, z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f](z_{k-2} - z_{k+1}), k = \overline{2,\, n-4s-1}.$$

Зазначимо, що многочлен $\bar{P}_n$ “добре ” наближає функцію $f \in \Delta^{(2)}(Y),$ але $\bar{P}_n \notin \Delta^{(2)}$ тоді як $\bar{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y),$ і оцінка наближення не “псується”.

Із задання многочлена $\bar{P}_n$ випливає наступна оцінка

$$\left|f^{(r)}(x)-\bar{P}_n^{(r)}(x)\right|\le C(Y)\omega_{3-r}(f^{(r)};\frac{1}{n^2}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}),x\in[-1,1],\quad r=1,2.$$

Враховуючи оцінку

$$\left|\tilde{P}_n(x)\right|\le C(Y)\omega_3(f\ ;\frac{1}{n^2}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}),x\in[-1,1],\quad r=1,2.$$

лему 1 доведено.

Література

1. Kopotun K. A., Poitwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials, Constr. Approx. (1994), 153-178.

2. Leviatan D., I. A. Shevchuk, Coconvex Approximation J. Approx. Theory (2002) (to appear).

3. Kopotun K.A., D. Leviatan, I. A. Shevchuk, The degree of coconvex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc. (1999), 409-415.

4. Шведов А.С., Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – С. 839-846.

5. Dzyubenko G.A., J. Gilewicz, Nearly coconvex pointwise approximation, East J. Approxim. (2000), 357-383.

6. Leviatan D., Poitwise estimates for convex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc. (1986), 471-474.

7. Шевчук I. A., Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, С.224.

8. Leviatan D. and I. A. Shevchuk, Some Positiwe Results and Counterexamples in Comonotone approximation, II J. Approx. Theory (1999), 113-143.

9. Dzyubenko G. A., J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, Piecewise monotone pointwise approximation, Constr. Approx. (1998), 311-348.

10. Gilewicz J., I. A. Шевчук, Комонотонное приближение, Фундаментальная и прикладная математика (1996) 319-363.

11. Pleshakov M. G., A. V. Shatalina, Piecewise Coapproximation and the Whitney Inegualiti, J. Approx. Theory (2000), 189-210.