# ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

***Дмитренко С.О.***
***Національний педагогічний університет***
***імені М.П.Драгоманова***

## ДВІЙКОВЕ КОДУВАННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ І ФРАКТАЛЬНІ РОЗПОДІЛИ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Використання різних систем числення розширило можливості для задання та вивчення об'єктів, що мають фрактальні властивості. Але, як правило, кожна система було пов'язана з певним класом таких об'єктів. Для окремих представлень існують властивості, які доводяться подібним чином, що наштовхнуло на думку дослідити більш загальну модель. В даній роботі пропонується розглянути континуальну множину представлень дійсних чисел і сформулювати властивості для певних класів представлень, а не окремих систем.

Нехай L – множина всеможливих нескінченних послідовностей з нулів та одиниць, тобто

$$L = \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...) \equiv \{\alpha_n\}, \alpha_n \in \{0,1\} \ \forall n \in N\}.$$

Далі $L$ називатимемо *простором послідовностей з нулів та одиниць*, а елементи множини $L$ – *точками цього простору*.

*Означення 1. Елементи* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ *і* $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...)$ *простору* $L$ називатимемо *рівними, якщо* $\alpha_i = \beta_i \ \forall i \in N$ *або* $\alpha = \alpha_1\alpha_2..\alpha_n 100...$ *і* $\beta = \alpha_1\alpha_2..\alpha_n 011....$

Введемо у просторі $L$ відношення порядку.

*Означення 2. Елемент* $\alpha \in L$ *називатимемо меншим елемента* $\beta \in L$, *якщо* $\alpha \neq \beta$ *і існує таке k, що* $\alpha_j = \beta_j$, $j = \overline{1, k-1}$, *і* $\alpha_k < \beta_k$.

*Означення 3. Циліндричним відрізком* $\blacksquare_{c_1c_2...c_n}$ *рангу n з основою* $c_1c_2...c_n$ *простору L називатимемо множину всіх послідовностей, у яких перші n елементів фіксовані, а решта довільні, тобто*

$$\blacksquare_{c_1c_2\ldots c_n} = \{\alpha : \alpha = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \alpha_{n+1}, \ldots),\ \alpha_{n+j} \in \{0,1\}\}.$$

*Циліндричним інтервалом рангу n з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ *називатимемо наступну множину* $\square_{c_1c_2\ldots c_n} = \blacksquare_{c_1c_2\ldots c_n} \setminus \{(c_1, c_2, \ldots, c_n, (0)), (c_1, c_2, \ldots, c_n, (1))\}$.

***Властивості циліндричних множин.***

1. $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n a} \subset \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\quad \forall a \in \{0;1\}$.

2. $\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0} \bigcup \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1}$.

3. $\square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\beta_k} \subset \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, якщо $\alpha_i = \beta_i\ i = \overline{1,n}$.

4. $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\beta_k} \Leftrightarrow n = k$ і $\alpha_i = \beta_i$, $i = \overline{1,n}$.

$\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \bigcap \square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\beta_k} = \varnothing$, тоді і тільки тоді, коли $\exists i : \alpha_i \neq \beta_i$.

5. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \equiv \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

*Означення 4. Околом точки* $\alpha = \{\alpha_k\} \in L$ *називається довільний циліндричний інтервал, що містить цю точку, тобто* $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, $\forall n \in N$.

*Означення 5. Точка* $\alpha \in A \subset L$ *називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує такий окіл точки* $\alpha$*, який повністю міститься в* множині А.

*Означення 6*. Множину А називатимемо відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Очевидно, що простір $L$ є відкритою множиною. Порожню множину вважатимемо відкритою за означенням.

**Лема 1.** *Множина всіх відкритих множин* $\tau$ *є топологією в L.*

*Доведення.* Розглянемо об'єднання довільної кількості відкритих множин $\bigcup A_k$. Нехай $x \in \bigcup A_k$. Тоді існує $k$ таке, що $x \in A_k$. Оскільки $A_k$ – відкрита множина, то існує окіл точки $x$, який належить множині $A_k$, а отже, належить і об'єднанню $\bigcup A_k$. Таким чином, об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Нехай $A$ і $B$ – відкриті множини і $x \in A \bigcap B$, тоді $x \in A,\ x \in B$ і існують околи $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \subset A$ і $\square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\beta_k} \subset B$. За властивістю 3 циліндричних множин, маємо $\square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \bigcap \square_{\beta_1\beta_2...\beta_n...\beta_k} = \square_{\beta_1\beta_2...\beta_n...\beta_k} \subset A \bigcap B$. Тобто $x$ є внутрішньою точкою множини $A \bigcap B$, а отже, остання є відкритою.

Оскільки множини $L$ та $\varnothing$ також належать до $\tau$, то $\tau$ – топологія, а пара $(L, \tau)$ – топологічний простір. Лему 1 доведено.

Побудуємо в даному просторі міру $\mu$ наступним чином: означимо $P_k = \{p_{0k}, p_{1k}\}$, де $p_{ik} \geq 0$ і $p_{0k} + p_{1k} = 1$, для $\forall k \in N$, тоді $\mu\{\Delta_{c_1...c_n}\} = \prod_{i=1}^{n} p_{c_i i}$ і $\mu\left(\bigcup \Delta_{c_1...c_n}\right) = \sum \mu\left(\Delta_{c_1...c_n}\right)$, де відрізки $\Delta_{c_1...c_n}$ не перетинаються.

Тоді міра Хаусдорфа означиться:

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\mu(\Delta_{c_1...c_n}) \leq \varepsilon} \left\{ \sum \mu^\alpha(\Delta_{c_1...c_n}), \bigcup \Delta_{c_1...c_n} \supset E \right\}.$$

Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини $E$ називатимемо число

$$\alpha_\mu(E) = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\}.$$

Розглянемо відображення $f$ множини $L$ на відрізок $[0;1] \subset R^1$. Множину всіх бієктивних відображень $f$, які зберігають порядок позначимо $L^f$.

Образ циліндричної множини $\blacksquare_{a_1a_2...a_n}$ при відображенні $f \in L^f$ позначатимемо через $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$.

Накладаючи певні обмеження на відображення $f$ ми будемо отримувати різні представлення чисел на відрізку [0;1]. Наприклад, якщо $\dfrac{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\right|} = \dfrac{1}{2}$, то відображення $f$ задає двійкове представлення, при $\dfrac{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\right|} = q_{\alpha_{n+1}}$ – $Q_2$ – представлення.

**Лема 2.** *Існує континуальна множина бієктивних відображень $f$ простору $L$ в $[0;1] \subset R^1$, які зберігають порядок: $\forall x_1, x_2 \in L : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

*Доведення.* Нехай $q_0$ – довільне дійсне число таке, що $0 < q_0 < 1$, $Q_2 = \{q_0, q_1\}$, де $q_1 = 1 - q_0$. Відображення $f : L \to [0;1]$ за законом

$$x = f\left(\{\alpha_k\}\right) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}\right],$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, є бієктивним і зберігає порядок [2]. З довільності вибору $q_0$ випливає існування континуальної кількість таких відображень. Лему 2 доведено.

**Лема 3.** *Множина* $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = f\,(\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \subset [0;1]$, *що є образом циліндричної множини* $\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ *при відображенні* $f$, *є відрізком.*

*Доведення.* Розглянемо довільне $\alpha \in \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, очевидно, що виконуються нерівності: $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \le \alpha \le \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}$.

При відображенні $f$, в силу його бієктивності існує образ $\alpha$: $x = f(\alpha) \in \Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, тобто $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \le x \le \Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}$. Якщо припустити, що остання нерівність не виконується, а оскільки відображення $f$ зберігає порядок, отримаємо, що $\alpha \notin \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$. Дістали протиріччя, отже в силу довільності $\alpha$ маємо, що $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ – відрізок. Лему доведено.

**Наслідок.** *Якщо відображення f простору L в* $[0;1] \subset R^1$ *бієктивне і зберігає порядок, то воно неперервне.*

*Доведення.* Нехай $\alpha$ довільна точка простору $L$ і $f(\alpha)$ – її образ, розглянемо довільний окіл образу – $O\left(f(\alpha)\right) = (a;b) \in [0;1]$. Вкажемо циліндричну множину $\nabla_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset (a;b)$, яка містить $f(\alpha)$, вона існує за вище доведеною лемою, і для неї існує прообраз $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \ni \alpha$, тобто $f(\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \nabla_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset (a;b)$.

В силу бієктивності та неперервності відображення $f$ індукує для циліндричних множин на [0;1] властивості аналогічні до властивостей циліндричних множин простору $L$.

**Теорема 1.** *Для* $\forall\alpha=\{\alpha_k\}\in L$ *переріз* $x=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Delta^f_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ *є точкою з відрізка* $[0;1]$, *яку символічно позначатимемо* $\Delta^f_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, *і називатимемо двійковим f- кодуванням точки x.*

Нехай $f$ – фіксоване відображення з $L^f$. Розглянемо випадкову величину $\xi=\Delta^f_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$, двійкові $f$–коди $\eta_k$, якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями $p_{0k}$ та $p_{1k}$ відповідно.

Лема. ***Функція розподілу випадкової величини*** $\xi=\Delta_{\xi_1\ldots\xi_n\ldots}$ ***запишеться у вигляді***

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \beta_1+\sum\limits_{i=2}^{\infty}\left[\beta_i\prod\limits_{j=1}^{i-1}p_{\alpha_j(x)j}\right] & \text{при } x\in[0;1],\\ 1 & \text{при } x>1;\end{cases}$$

**де** $\beta_i=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha_i=0,\\ p_{0i}, & \text{якщо } \alpha_i=1\end{cases}$.

**Теорема 2.** *Якщо відображення f має властивість:*

$$0<\underline{\mu_n}<\frac{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}}}{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}<\overline{\mu_n}<1,\ \ \forall n\in N. \quad (1)$$

*і матриця* $\|p_{ik}\|$ *має нескінченну кількість нулів, то випадкова величина* $\xi$ *має сингулярний розподіл канторівського типу.*

*Доведення.* Позначимо через $F_n$ сукупність інтервалів, які на певному кроці не містять точок спектру $S_\xi$, але $E_{n-1}=E_n\bigcup F_n$ і $E_{n-1}\bigcap S_\xi\ne\varnothing$. Тоді $S_\xi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ і $\lambda(S_\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}E_n$. Покладемо $\mu=\min\limits_n\underline{\mu_n}$, $E_0=[0;1]$, $\lambda(E_0)=1$. Тоді

$$\lambda(E_1)<\lambda(E_0)-\lambda(E_0)\cdot\mu=\lambda(E_0)(1-\mu)=(1-\mu)$$

$$\lambda(E_2)<(1-\mu)^2$$

..............................

$$\lambda(E_k)<(1-\mu)^k\to 0\ (k\to\infty).$$

Теорему доведено.

### Література


1. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. – К.: Вища школа, 1982. – 96 с.

2. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296с.

3. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знание, 1979. – 64с.

4. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208с.

5. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics magazine. – 1957. – 31. – P. 98-110.



***Залізко В.Д.***
***Національний педагогічний університет***
***імені М.П.Драгоманова***


## ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ КООПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ БІЛЬШЕ ОДНІЄЇ ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Нехай $C[a,b]$ позначає простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $f:[a,b]\to R,$ з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Замітимо, що якщо

$$f:\, f''\in C[-1,1], \text{то } f\in\Delta^{(2)}(Y)\Leftrightarrow f''(x)\Pi(x)\ge 0, x\in[-1,1].$$

Згадаємо, що для будь-якої обмеженої функції $f$ і $k\in N,$ $k-$та розділена різниця з кроком $h$ від функції $f$ в точці х має вигляд:

$$\sigma_h^k(f;x):=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih),$$

а $k-$ ий модуль неперервності функції $f\in C[a,b]$ визначається як

$$\omega_k(f;t;[a,b]):=\sup_{h\in[0,t]}\sigma_h^k(f;\cdot)_{[a,b-kh]}, t\in[0,(b-a)/k],$$

$$\omega_k(f;t;[a,b])\equiv\omega_k(f;(b-a)/k;[a,b]), t\ge(b-a)/k.$$

Надалі будемо використовувати спрощені позначення

$$C := C[-1,1], I := [-1,1], \omega_k(f;t) := \omega_k(f;t;I).$$

$$C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\},\ r \in N,$$

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, n \in N, x \in I,$$

$$\delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, n \in N, x \in I,$$

$$\Pi(x) := \Pi(x;Y) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i),$$

де $Y := Y_s := \{y_i\}^s_{i=1}$ позначає фіксований набір точок $y_i$ такий, що

$$y_{s+1} := -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1 =: y_0,\ s \in N.$$

Нагадаємо, що через $\Delta^{(2)}(Y)$ позначають множину неперервних на [-1,1] функцій f таких, що f є опуклою донизу на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$, якщо і парне і f є опуклою догори, на тому ж самому відрізку, якщо і непарне. Функції з множини $\Delta^{(2)}(Y)$ називаються кусковоопуклими або коопуклими.

В роботі доведемо наступну Лему 1.

**Лема 1.**

*Якщо* $s > 0,\ s \neq 1$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y) \cap C^{(r)}$, *то існує стала* $C(Y)$, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,..,s}(y_i - y_{i+1})$, *така, що для кожного* $n \geq s+2$, *існує* алгебраїчний *многочлен* $P_n$ *степеня* $\leq n$, *який задовольняє наступні нерівності*

$$P''_n(x)\Pi(x) \geq 0, x \in I,$$

$$\left| f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x) \right| \leq C(Y)\omega_{3-r}\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), x \in [-1,1],\ \text{r=1, 2}.$$

Для доведення Леми 1 ми будуємо кусково-опуклий сплайн степеня $\leq 2$, властивості якого наведені в Лемі 2, яка формулюється нижче.

Для кожного $j=\overline{1,n}$, позначимо

$$I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}].$$

Для фіксованих $n\in N$ і $Y=\{y_i\}_{i=1}^s$ позначимо

$$O_i := O_{i,n} := O_{i,n}(Y) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \text{якщо}\, y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{n+2}=x_{n+1}:=-1, x_{-1}=x_{-2}=x_{-3}:=1,\ O:=O(n,Y):=\bigcup_{i=1}^{s} O_i.$

Будемо писати

$$j\in H, \text{якщо}\, I_j \cap O = \varnothing,\ j=\overline{1,n}.$$

Сформулюємо допоміжну Лему 2.

**Лема 2.**

*Якщо $s>0$, $s\neq 1$ і $f\in\Delta^{(2)}(Y)$, то існують сталі $N(Y)$ і $C(Y)$, які залежать тільки від розташування точок в наборі $Y$, такі, що для кожного $n\geq N(Y)$, існує сплайн $L$, степеня $\leq 2$, з вузлами в точках* $x_j$ з $j\in H$,

*такий, що*

$$L\in\Delta^{(2)}(Y),$$

$$|f(x)-L(x)|\leq C(Y)\omega_3(f;\rho_n(x)), x\in I.$$

*Побудова коопуклого сплайна*

Побудуємо інтерполяційний коопуклий сплайн $S$ степеня $\leq 2$, з вузлами в кожній точці множини

$$X_n := \{x_j\}_{j\in H} \cup Y \cup \{1\},$$

і наведем допоміжні нерівності.

Через $|E|$ позначимо довжину $E$, зокрема,

$$|I_j| := x_{j-1}-x_j =: h_{j,n} =: h_j.$$

Нехай

$$\left(\underline{y}_i, \overline{y}_i\right) =: \left(\underline{y}_{i,n}, \overline{y}_{i,n}\right) =:^{*} O_i, i=\overline{1,s}.$$

Тобто, $\{\underline{y}_i, \overline{y}_i\}_{i=1}^s \subset X_n$. Покладем

$$\overline{y}_{s+1} := -1, \underline{y}_0 := 1.$$

Розіб'ємо множину $G := I \setminus (\bigcup_{i=1}^{s} {}^{*}O_i)$ на дві множини $\breve{G}$ і $\hat{G}$ так, що

$$G = \left( \bigcup_{\substack{i=0 \\ i-\text{парне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i] \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{i=1 \\ i-\text{непарне}}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i] \right) =: \breve{G} \cup \hat{G}.$$

Тобто, $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, є опуклою донизу для $x \in \breve{G}$, і є опуклою догори для $x \in \hat{G}$.

Нехай $l(x,g;b) := l(x,g;a,b,c)$ позначає многочлен Лагранжа, який інтерполює функцію $g \in C$ в точках *a, b і c* з множини $X_n$, таких, що $a < b < c$, і в множині $X_n$ немає точки $d \neq b$, для якої виконується нерівність $a < d < c$.

Через $S := S(x, f; X_n)$ позначимо неперервний сплайн, степеня $\leq 2, S' \notin C$, який інтерполює $f$ в кожній точці набору $X_n$.

Перенумеруємо точки набору $X_n$ у спадному порядку

$$-1 := z_{n-4s} < \ldots < z_1 < z_0 := 1, \; X_n = \{z_k\}_{k=0}^{n-4s}.$$

Покладемо $z_{-1} := 1$ і $z_{n-4s+1} := -1$.

Скористаємось сплайном $S = S(x; f; X_n)$, який має представлення

$$S(x) = \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k \Psi_k(x) + l(x, f; z_{n-4s-1}),$$

або, що те саме,

$$S(x) = l_1(x, f; -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k(\Psi_k(x) - \Psi_{k-1}(x)),$$

де $l_1(x, f; -1)$ позначає пряму, яка інтерполює $f$ в точках $-1$ і $z_{n-4s-1}$, (детальніше дивись [5]). Нехай точки $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n), j = 0, \ldots, n,$ складають чебишевське розбиття відрізку $I$.

Для зручності, многочлен $\mathrm{P}_n$ з Леми 1 побудуємо у вигляді суми двох многочленів $\tilde{P}_n$ та $\overline{P}_n$. Представимо многочлен $P_n$ у вигляді суми двох многочленів $\overline{P}_n$ та $\tilde{P}_n$ .

Нехай

$$\overline{P}_n(x) := l_1(x, f; -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k \, (U_k\,(x) - U_{k-1}\,(x)),$$

$$F_k := [z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f],$$

$$U_k(x) := \begin{cases} V_{j(k)}(x;-), & якщо\,|\,F_k\,| \le |\,F_{k+1}\,|, \\ V_{j(k)}(x;+), & якщо\,|\,F_k\,| > |\,F_{k+1}\,|, \end{cases}$$

j(k):=j, якщо $z_k = x_j$, $k = \overline{2, n-4s}.$

(Многочлени $V_{j(k)}(x;-)$ і $V_{j(k)}(x;+)$ підлягають визначенню ).

Для будь-якої фіксованої точки $a \in l,$ нехай

$$\chi(x;a) := \begin{cases} 0, якщо\, x \le a, \\ 1, якщо\, x > a. \end{cases}$$

$$\chi_j\,(x) := \chi\,(x; x_j).$$

Покладемо $(x-a)_+ := (x-a)(x-b)\,\chi\,(x;a).$ Для будь-яких двох фіксованих точок

$a$ і $b \in I,\ a < b,$

позначимо

$\psi\,(x; a, b; -) := (x-a)(x-b)\,\chi\,(x;a)$,

$$\Phi_k := [z_{k+1}, z_k, z_{k-1}, z_{k-2}; f\,](z_{k-2} - z_{k+1}), k = \overline{2,\, n-4s-1}.$$

Зазначимо, що многочлен $\overline{P}_n$ “добре ” наближає функцію $f \in \Delta^{(2)}(Y),$ але $\overline{P}_n \notin \Delta^{(2)}$ тоді як $\overline{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y),$ і оцінка наближення не “псується”.

Із задання многочлена $\overline{P}_n$ випливає наступна оцінка

$$\left| f^{(r)}(x) - \bar{P}_n^{(r)}(x) \right| \le C(Y)\omega_{3-r}(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}), x \in [-1,1], \quad r = 1, 2.$$

Враховуючи оцінку

$$\left| \tilde{P}_n\ (x) \right| \le C(Y)\omega_3(f\ ; \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}), x \in [-1,1], \quad r = 1, 2.$$

лему 1 доведено.

### *Література*


1. Kopotun K. A., Poitwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials, Constr. Approx. (1994), 153-178.

2. Leviatan D., I. A. Shevchuk, Coconvex Approximation J. Approx. Theory (2002) (to appear).

3. Kopotun K.A., D. Leviatan, I. A. Shevchuk, The degree of coconvex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc. (1999), 409-415.

4. Шведов А.С., Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – С. 839-846.

5. Dzyubenko G.A., J. Gilewicz, Nearly coconvex pointwise approximation, East J. Approxim. (2000), 357-383.

6. Leviatan D., Poitwise estimates for convex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc. (1986), 471-474.

7. Шевчук І. А., Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, С.224.

8. Leviatan D. and I. A. Shevchuk, Some Positiwe Results and Counterexamples in Comonotone approximation, II J. Approx. Theory (1999), 113-143.

9. Dzyubenko G. A., J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, Piecewise monotone pointwise approximation, Constr. Approx. (1998), 311-348.

10. Gilewicz J., I. A. Шевчук, Комонотонное приближение, Фундаментальная и прикладная математика (1996) 319-363.

11. Pleshakov M. G., A. V. Shatalina, Piecewise Coapproximation and the Whitney Inegualiti, J. Approx. Theory (2000), 189-210.