

**Pikhtar N. Some peculiarities of conducting activities in solving olympiad mathematics problems in pedagogical universities.**

*The article deals with the ways of improving the training of modern students – future mathematics teachers to work with gifted pupils. Some methodological peculiarities and basic principles of choosing problems for training gifted students at pedagogical universities are also reviewed.*

**Keywords:** student, professional training, gifted students, system of problems, Small Academy of Science (SAS).

УДК 37.015:514.112

**Снігур Т. О.**  
**Національний педагогічний університет**  
**імені М. П. Драгоманова**

## **ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ ПЛОСКОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ТІЛА**

*У статті розглянуто формування поняття площі як функції на множині плоских геометричних тіл. Наведено історико-математичні відомості, які сприятимуть позитивній мотивації, розвитку інтересу до вивчення даної геометричної величини.*

**Ключові слова:** Геометричне тіло, площа плоского геометричного тіла, вимірювання площі фігури, одиниці вимірювання, народні міри, палетка.

Перші відомості про площу фігури та способи її вимірювання учні здобувають на пропедевтичному рівні в 4 класі під час вивчення змістової лінії “Величини”. У курсі математики 5-6 класів їх знання розширюються та узагальнюються відомостями про одиниці вимірювання площі та формули її обчислення.

У курсі геометрії 7-9 класів поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини. У 8 класі в учнів формується поняття площі фігури, а також виводяться формули для обчислення площ прямокутника, паралелограма, трикутника, ромба, трапеції, правильних многокутників [6].

Практика показує, що навіть після вивчення даної теми мало хто з учнів може пояснити, що таке площа геометричної фігури, якими властивостями вона володіє, в чому полягає необхідність вивчення даної геометричної величини. Це вказує на те, що має бути інший, більш ефективний підхід для вивчення теми “Многокутники. Площі многокутників”.

Вчений-математик М. Є. Ващенко-Захарченко говорив: “Ніщо так не допомагає утримувати в пам’яті відомі істини, як історія їх походження. Геометрія, висвітлена історичними даними, стає більш живою й цікавою” [3, с. 76]. У зв’язку з цим перед вивченням вказаної теми ми пропонуємо розглянути історичні відомості, факти, пов’язані з обчисленням площі фігури, народні задачі, міри та способи вимірювання. Це допоможе розвинути інтерес до вивчення теми, показати роль математичних знань у пізнанні дійсності.

Методику вивчення та вимірювання геометричних величин в курсі математики, в тому числі площ геометричних фігур, розглядали в своїх дисертаційних дослідженнях вітчизняні та зарубіжні вчені М. О. Журбас, К. Ф. Рубін, В. М. Шишлянникова, С. А. Алборов, Ш. С. Гаджиагаєв, М. А. Казакова, І. О. Климов, О. П. Кузнецова, М. С. Мацкін, Ш. Мусавиров, В. Юнгк та інші.

Що таке площа фігури і як її вимірювати намагалися вяснити вчені-математики. Одні

означували площу як частину площини (А. Ю. Давидов, М. О. Извольський, С. Ф. Лакруа), інші – як число (Н. О. Глаголев, В. М. Брадїс, П. О. Долгушин), або як величину (Ж. Адамар, М. М. Бескін, А. М. Лежандр, А. П. Кисельов) [11].

Постає питання: яке з цих означень краще і зрозуміліше для учнів, чи, можливо, варто по-іншому поглянути на поняття площі?

**Мета статті** – запропонувати доступне для сприйняття школярами визначення поняття площі плоского геометричного тіла та методику його формування.

Як вимірювати площу фігури? Цим питанням люди задавалися не одне тисячоліття. Ще 4-5 тис. років тому вавилоняни вміли обчислювати площу прямокутника і трапеції у квадратних одиницях. Квадрат здавна служив еталоном під час вимірювання площ завдяки таким своїм властивостям як рівні сторони, рівні і прями кути, симетричність і загальна досконалість форми. Квадрати легко будувати, ними можна повністю заповнити площину (але поряд з цим у Стародавньому Китаї мірою площі був прямокутник) [2, с. 27].

Здавалося б, якщо є одиниця вимірювання довжини, то з вимірюванням площ не може бути ніяких проблем. Беремо квадрат із стороною, значення якої становить цю одиницю, наприклад, сажень, і отримуємо квадратний сажень – ось і одиниця площі. Або з версти утворюємо квадратну версту.

Потреба у вимірюванні площ виникла через необхідність знати числову характеристику земельних ділянок, щоб знати розмір данини чи податку.

Відомо, що населення Стародавнього Єгипту в основному займалось землеробством, але родючої землі було дуже мало – тільки в долині р. Нілу, а далі йшли безкраї пустелі. Щовесни Ніл розливався й удобрював землю родючим мулом. Але при розливі ріки змивалися межі ділянок, змінювалися їхні площі. Тоді потерпілі зверталися до фараона, він посилав землемірів, щоб відновити межі ділянок, з'ясувати, як змінилася їхня площа й встановити розмір податку. Вже тоді “єгиптяни почали замислюватися над тим, у який же спосіб слід вимірювати поля, щоб можна було віддати кожному те, що йому належить” [9].

У стародавньому Вавилоні також доводилося відновлювати межі ділянок після розливу двічі на рік річок Тигр і Євфрат.

Наші предки слов'яни для вимірювання площі розбивали земельні ділянки на прямокутники, трикутники та майже прямокутні трапеції. Площа трикутника обчислювалась як половина добутку основи на бічну сторону, а площа трапеції – як добуток півсуми основ на бічну сторону (“хобот”). Поле неправильної форми ділили на окремі прямокутники, трапеції, трикутники; вимірювали кожену площу окремо, а результати складали. У монографії Л. М. Граціанської можна знайти спосіб вимірювання поля, яке мало вигляд неправильного чотирикутника чи неправильного трикутника [3, с. 63-64].

Для виконання таких обчислень не варто було вивчати геометрію, докладати значних зусиль для вимірювання земельних ділянок квадратними одиницями; тут високої точності не вимагалось. Навіть термін “площа” не використовувався. Наприклад, давньокитайські задачі про вимірювання полів закінчувалися стандартним питанням: “Запитується, яке поле?”. Слово “поле” виступало в ролі терміна “площа”, оскільки останнього ще не існувало [1, с. 240]. У китайській “Математиці в дев'яти книгах” можна знайти наступну задачу: “Маємо кругле поле, довжина якого 30 бу. Діаметр 10 бу. Запитується, яке поле?” [5, с. 445].

На етнічній території України населення здавна займалося хліборобством. У хліборобській практиці потрібно було вимірювати поле. Народні міри, що з'явилися у процесі тих чи інших польових робіт, мали досить умовний характер, були надто приблизними. Найбільш поширеною була міра “день орати”, чи “день землі”, або “на один плуг”, тобто величина поля, зорана впродовж дня.

Оскільки продуктивність оранки залежала від типу ґрунту, досконалості знарядь

оранки і тяглової сили, то і величини були неоднакові. У Карпатах міра “день орати” становила один морг (0,57 га) землі, а на переважній більшості етнічної території наближалась до одного гектара. На Поліссі побутувала міра “соха”, тобто приблизно 0,40 га. Меншою за розміром була “упруга” – третя частина міри “день землі”, поширена на Лівобережжі. “Упруги” були ранкові, обідні, вечірні.

Великі площі поля вимірювалися “ланами” (19-25 га), на Поліссі, Волині – “волоками” (21 га), що поділялися на “прути” (1,2-1,5 га). Це були дещо регламентовані міри поля, на відміну від тих, які визначались за виконаною роботою протягом одиниці часу. Існували міри площі за величиною скошеного поля (“день косити”), за кількістю висіяного зерна – “віко” (1/8 га, на яку припадає 25л зерна для засіву).

На Закарпатті селяни послуговувалися мірою, яка називалася “ділець” (“телека”) – величина сільськогосподарських угідь, що забезпечувала прожитковий мінімум для господаря. Сюди належали: садиба, орне поле, луки, пасовисько. Народні міри виявилися живучими: навіть після запровадження стандартизованих одиниць, таких, як десятина (1 га), морг (0,57 га), гольд (0,48 га), кадастральний гольд (0,57 га), угр (1 га) тощо, селяни використовували давні міри [4].

З часом для орних земель головну роль почала виконувати четверть – площа, на якій висівали четверть (міру об’єму) жита. Однак уже в XVI столітті стало очевидним, що четверть – замала одиниця для опису земель, тому почали використовувати десятину. На той час десятина становила  $50 \times 50 = 2\,500$  сажнів квадратних або 1,166 гектара і складалася з двох четвертей по 0,58 га. От тільки слова “квадратний” тоді не існувало, і такі міри називали “круглими”, “дробними” або “чотиригранними”.

Десятина була офіційною лічильною одиницею, але на практиці застосовували більш зручну одиницю – четверть, або четь, яка дорівнювала половині десятини. Четверть (четь) ділилась на дві осьмини, осьмина – на дві півосьмини, а восьмина – на два четверика. Четверть по коефіцієнту три могла ділитись на три третника, шість півтретників і т.д. 1/64 частина четверті (четі) називалася малий четверик.

Учням буде цікаво розглянути конкретний історичний приклад вимірювання площі земельної ділянки.

*Задача.* У книзі В. Подова “К тайнам истории” [8]написано, що в 1714 році на правому березі Сіверського Дінця на території Привільного, де через 40 років розташувалася п’ята рота полку Депрерадовича, Василь Щабельський отримав близько 300 четей землі “для пашеннях леба” і сінокосного луку на 1000 кіп, та ще й лісний острів посеред Дінця. Спробуйте оцінити розмір землі, яку отримав Василь Щабельський.

*Розв’язання.* Четь (четверть) становила 1/2 десятини. Перехід на 7-футовий сажень ще тільки-но розпочався, і в першу чергу він стосувався кораблебудування. Тільки в середині XVIII ст. почав широко впроваджуватися сажень, що дорівнював 7 футам або 213,36 см. А землемірна справа була найбільш консервативною, та ще й на периферії імперії. Тому впевнено можна вважати десятину рівною 1,12 га, а четь, відповідно, 0,56 га.

Отже, 300 четей орної землі, отриманої Щабельським, становить близько 168 гектарів. А 1 000 кіп сіножаті можна прирівняти до 100 десятин по 1,12 га, бо 10 кіп = 1 десятина. Тож додамо ще 112 га. Всього ж, не рахуючи острова з лісом, він отримав 280 га землі або  $2\,800\,000\text{ м}^2$ , або ж  $2,8\text{ км}^2$ .

У 1875 році 17 країн, у тому числі і Росія, підписали Метричну конвенцію, за якою зобов’язувалися ввести в своїх країнах систему мір, що, за думкою її авторів, годилася “на всі часи і для всіх народів”. У відповідності з нею довжина вимірювалася в метрах, маса – в кілограмах, а площа земельних ділянок – в арах. Ара становив площу квадрата зі стороною 10 метрів, тобто 100 квадратних метрів – звична нам “сотка”. Для вимірювання великих

площ ця величина була замалою, тому в землекористуванні використовують одиницю в сто “соток” – гектар. Слово “гектар” утворено із слова “ар” (походить від латинського “ареа” – площа) і приставки “гекто”, що позначає “сто”.

Зрозуміло, як вимірювались площі земельних ділянок. Але як виміряти площу невеликих предметів, які не є прямокутниками чи квадратами, наприклад, площу листка дерева? В таких випадках користуються палеткою – прозорою пластиною, на яку нанесена масштабна квадратна сітка. Ця пластинка накладається на фігуру, площу якої потрібно виміряти (рис. 1). Підрахувавши кількість квадратів (повних і неповних), можна знайти площу фігури.



Рис. 1

Площа є однією із властивостей геометричних фігур. Але не кожній геометричній фігурі притаманна властивість мати площу. Тоді виникає запитання, які фігури мають площу?

Щоб відповісти на нього, пропонуємо перед вивченням теми “Многокутники. Площі многокутників” ознайомити учнів з поняттям плоского геометричного тіла.

Під *геометричним тілом* будемо розуміти: геометричну фігуру  $F$  площини, яка є замиканням деякої області [7].

Розкриття поняття площі плоского геометричного тіла варто розпочати з практичних вправ на вимірювання площі за допомогою палетки (для невеликих за розміром геометричних плоских тіл), а також задач на знаходження та порівняння площі земельної ділянки, квартири, держави тощо. На основі таких вправ учні можуть зробити ряд важливих висновків:

- а) кожному з розглянутих плоских фізичних об’єктів ставиться у відповідність додатне число, яке називається його площею;
- б) щоб отримати це число, необхідно встановити одиницю вимірювання;
- в) однакові фізичні об’єкти мають рівні площі;
- г) якщо плоске тіло складається із кількох частин, то його площа дорівнює сумі площ цих частин.

Після обговорення та узагальнення результатів розглянутих задач від фізичних плоских об’єктів слід перейти до розгляду плоских геометричних тіл: прямокутника, паралелограма, трикутника, ромба, трапеції, круга, які є математичними моделями плоских фізичних об’єктів. Тільки тепер можна з’ясувати, що розуміти під площею плоского геометричного тіла?

Учням можна запропонувати наступне означення:

**Означення.** Площею плоского геометричного тіла називається додатна функція, яка володіє наступними властивостями:

- 1) задана на множині плоских геометричних тіл;
- 2) рівним плоским тілам ставить у відповідність рівні значення;
- 3) адитивна (якщо плоске тіло розбити на кілька частин, то його площа дорівнює сумі площ цих частин);

4) для плоского квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини, значення функції дорівнює одиниці.

Тобто *площа плоского геометричного тіла* – функція  $S: M \rightarrow R_+$ , де  $M$  – множина плоских геометричних тіл;  $R_+$  – множина додатних чисел [10].

Як відомо, основними способами задання функції є аналітичний, графічний, табличний і описовий. Як може бути задана введена нами функція? Відповідь на дане запитання учні можуть отримати лише частково, вивчивши вказану тему і тему “Первісна та інтеграл” в курсі алгебри і початків аналізу.

Якщо класифікувати плоскі геометричні тіла на прості і непрості, а потім виділити інші класи – паралелограми, трикутники, круг тощо, то таку функцію можна задати аналітично. Наприклад:

(1)  $S = ab$  – площа прямокутника, де  $a, b$  – виміри прямокутника; у випадку квадрата  $S = a^2$ ;

(2)  $S = ah_a$  – площа паралелограма, де  $a, b$  – сторони паралелограма,  $h_a, h_b$  – висоти, проведені до відповідних сторін;

(3)  $S = ah$  – площа ромба, де  $a$  – сторона,  $h$  – висота ромба;

(4)  $S = \frac{1}{2}(a+b)h$  – площа трапеції, де  $a, b$  – сторони трапеції,  $h$  – її висота;

(5)  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$  – площа будь-якого опуклого чотирикутника, де  $d_1, d_2$  – його діагоналі,  $\varphi$  – кут між діагоналями;

(6)  $S = \frac{1}{2}ah_a$ ,  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$  – площа трикутника, де  $a, b$  – сторони трикутника;  $\gamma$  – кут, що лежить навпроти сторони  $c$ ;  $h_a$  – висота, опущена на сторону  $a$ ;

(7)  $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$  – площа прямокутного трикутника;

(8)  $S = pr = \frac{1}{2}nar = \frac{1}{4}a^2 n \cot g \frac{180^\circ}{n}$  – площа правильного многокутника, де  $a$  – сторона,  $n$  – кількість сторін многокутника,  $r$  – радіус вписаного в многокутник кола;

(9)  $S = \pi R^2$  – площа круга, де  $R$  – радіус круга.

У курсі алгебри і початків аналізу учні ознайомляться зі ще одним класом фігур – криволінійними трапеціями – і формулою для знаходження площі цих фігур за допомогою визначеного інтеграла:

(10)  $S = \int_a^b f(x) dx$  – площа криволінійної трапеції.

Учні повинні зрозуміти, що загальної формули немає і для конкретного класу плоских тіл вона своя. Розгляд інших геометричних тіл, імовірно, дасть інші формули.

**Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі.** Одним з ефективних засобів формування позитивної мотивації засвоєння учнями математичних знань є використання на уроках математики елементів історизму. Використання історичного матеріалу при вивченні теми “Многокутники. Площі многокутників” істотно вплине на більш глибоке засвоєння учнями поняття площі плоского геометричного тіла та його властивостей.

Подальші перспективи розвитку нашого дослідження вбачаємо у виведенні формул площ многокутників на основі наведеного вище означення площі плоского геометричного тіла та з врахуванням всіх її властивостей.

#### **Використана література:**

1. Березкина Э. И. Математика древнего Китая / Э. И. Березкина. – М. : Наука, 1980. – 311 с.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе VII–VIII кл. : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.
3. Граціанська Л. М. Нариси з народної математики України / Л. М. Граціанська. – К. : Вид-во Київського університету, 1968. – 100 с.
4. Каленюк С. П. Краєзнавцю про вимірювання / С. П. Каленюк. – Лисичанськ : ПП “Прінтекспрес”, 2011. – С. 56-62.
5. Математика в девяти книгах / пер. и примеч. Э. И. Березкиной // Ист.-мат. исслед., 1957, вып. X. – С. 445.
6. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. / програму підготували : М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір. – К. : Затверджено МОНМСУ (наказ МОНМСУ від 06.06.2012 р. № 664), 2012.
7. Михалін Г. О., Швець В. О., Снігур Т. О. Щодо визначення поняття геометричного тіла у шкільному курсі геометрії / Г. О. Михалін, В. О. Швець, Т. О. Снігур // Математика в рідній школі. – 2015. – № 6. – С. 17-21.
8. Подов В. И. К тайнам истории [Текст]: Заметки краеведа / В. И. Подов; Луганский региональный научно-исследовательский центр по проблемам истории Донбасса. – Луганск : Світлиця, 1996. – 103 с.
9. Прокопович Феофан. Філософські твори : в трьох томах. – Т. 3 : Математика, історичні праці, вірші, листи [Електронний ресурс] / Прокопович Феофан ; переклад з латинської. – К., 1981. – Режим доступу : <http://litopys.org.ua/procop/proc304.htm>.
10. Снігур Т. О. Формування в учнів поняття площі фігури / Т. О. Снігур // Проблеми математичної освіти : матеріали Міжнародної науково-методичної конференції (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4-5 червня 2015 р. – Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 76-77.
11. Шишлянникова В. Н. Понятие площади в систематическом курсе геометрии / В. Н. Шишлянникова // Математика в школе. – 1952. – № 6. – С. 13-20.

#### **References:**

1. Berezkina E. I. Matematika drevnego Kitaya / E. I. Berezkina. – M. : Nauka, 1980. – 311 s.
2. Gleyzer G. I. Istoriya matematiki v shkole VII–VIII kl. : posobie dlya uchiteley / G. I. Gleyzer. – M. : Prosveshchenie, 1982. – 240 s.
3. Hratsianska L. M. Narisy z narodnoi matematyky Ukrainy / L. M. Hratsianska. – K. : Vyd-vo Kyivskoho universytetu, 1968. – 100 s.
4. Kaleniuk S. P. Kraieznavtsiu pro vymiriuvannia / S. P. Kaleniuk. – Lysychansk : PP “Printekspres”, 2011. – S. 56-62.
5. Matematika v devyati knigakh / per. i primech. E. I. Berezkinoy // Ist.-mat. issled., 1957, vyp. Kh. – S. 445.
6. Matematyka. Navchalna prohrama dlia uchniv 5-9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. / prohramu pidhotuvaly : M. I. Burda, Yu. I. Malovanyi, Ye. P. Nelin, D. A. Nomirovskiy, A. V. Pankov, N. A. Tarasenkova, M. V. Chemerys, M. S. Yakir. – K. : Zatverdzheno MONMSU (nakaz MONMSU vid 06.06.2012 r. № 664), 2012.
7. Mykhalin H. O., Shvets V. O., Snihur T. O. Shchodo vyznachennia poniattia heometrychnoho tila u shkilnomu kursu heometrii / H. O. Mykhalin, V. O. Shvets, T. O. Snihur // Matematyka v ridnii shkoli. – 2015. – № 6. – S. 17-21.
8. Podov V. I. K taynam istorii [Tekst]: Zаметki kraevеda / V. I. Podov ; Luganskiy regionalnyy nauchno-issledovatel'skiy tsentr po problemam istorii Donbassa. – Lugansk : Svitlitsya, 1996. – 103 s.
9. Prokopovych Feofan. Filosofski tvory : v trokh tomakh. – T. 3 : Matematyka, istorychni pratsi, virshi, lysty [Elektronnyi resurs] / Prokopovych Feofan ; pereklad z latynskoi. – K., 1981. – Rezhym dostupu : <http://litopys.org.ua/procop/proc304.htm>.
11. Shishlyannikova V. N. Ponyatie ploshchadi v sistematicheskome kurse geometrii / V. N. Shishlyannikova // Matematika v shkole. – 1952. – № 6. – S. 13-20.

10. Snihur T. O. Formuvannia v uchniv poniattia ploshchi fihury / T. O. Snihur // Problemy matematychnoi osvity : materialy Mizhnarodnoi naukovo-metodychnoi konferentsii (PMO – 2015), m. Cherkasy, 4-5 chervnia 2015 r. – Cherkasy : ChNU im. V. Khmelnytskoho, 2015. – S. 76-77.

**Снигур Т. А. Формирование понятия площади плоского геометрического тела.**

*В статье рассмотрено формирование понятия площади как функции на множестве плоских геометрических тел.*

*Сначала рекомендуем познакомить учащихся с историческими сведениями, фактами, связанными с исчислением площади фигуры, народными задачами, мерами и способами измерения. Это будет способствовать положительной мотивации, развитию интереса к изучению темы “Многоугольники. Площади многоугольников”.*

*Раскрытие понятия площади плоского геометрического тела предлагаем начать с практических упражнений на измерение площади с помощью палетки (для небольших по размеру геометрических плоских тел), а также задач на нахождение и сравнение площади земельных участков, квартиры, государства и т.д.*

*После обсуждения и обобщения результатов рассмотренных задач от физических плоских объектов стоит перейти к рассмотрению плоских геометрических тел: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, круга, которые являются математическими моделями плоских физических объектов. Только теперь можно выяснять, что понимать под площадью плоского геометрического тела и какими свойствами обладает данная геометрическая величина.*

**Ключевые слова:** геометрическое тело, площадь плоского геометрического тела, измерение площади фигуры, единицы измерения, народные меры, палетка.

**Snihur T. Development of concept of square of the flat geometric body.**

*In the article we considered methodical recommendations in relation to forming for the students of concept of area of flat geometrical body as function on the plural of flat bodies.*

*The article also shows the historical and mathematical details that contribute to positive motivation, the development of interest in the study of the geometrical magnitude.*

**Keywords:** Geometric body, square of the flat geometric body, measurement of square of figures, units of measurement, national measures, measuring grid.

УДК 378.016:519.21

**Трунова О. В.**  
**Чернігівський національний технологічний університет**

**ЕНТРОПИЯ ЯК МІРА ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ПРИВАБЛИВОСТІ ПІДПРИЄМСТВА  
В КУРСІ СТОХАСТИКИ ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

*Розглядається доцільність впровадження в курс стохастики для економістів поняття ентропії - міри невизначеності випробування. Розкритий історичний аспект розвитку поняття ентропія. Показано, що ентропію дискретного випробування зручно знаходити як вагу графа. Визначено поняття ентропії економічної системи. Сформульовано визначення інвестиційної привабливості підприємства з урахуванням ентропії. Наведено приклад аналізу ринкових ситуацій для трьох можливих варіантів введення на ринок нового товару, на основі ентропії.*

**Ключові слова:** ентропія, економічна система, підприємство, стохастика для економістів, інвестиційна привабливість.