## *МАТЕМАТИКА*

***Олалі Н. В.***
***Найджа Дельта Університет (Штат Байельса, Нігерія)***
***Залізко В.Д.***
***Національний педагогічний університет***
***імені М. П. Драгоманова***

# ПРО ОСОБЛИВОСТІ РЕПРЕЗЕНТАТИВНО-ІЛЮСТРАТИВНОГО СПОСОБУ ДОВЕДЕННЯ ДЕЯКИХ ТЕОРЕМ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ З УРАХУВАННЯМ ПРОФЕСІЙНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ СТУДЕНТІВ

*У роботі наведено авторський спосіб доведення теореми про обчислення довжини явно заданої спрямлюваної дуги та показано переваги репрезентативно-ілюстративного доведення цієї теореми для студентів нематематичних спеціальностей.*

***Ключові слова:*** *спрямлювана дуга, репрезентативно-ілюстративний метод, математичний аналіз, нематематичні спеціальності.*

**Постановка проблеми.** Питання вивчення математичних дисциплін у непрофільних ВНЗ різних рівнів акредитації є актуальним досить давно. Добре відомо, що викладачі економічних, соціально-гуманітарних, медичних, педагогічних та ін. вишів мають балансувати між строгістю формулювання математичних тверджень та формальним їх вивченням. Намагання скрупульозно вводити математичні об’єкти на фоні незначної кількості аудиторних занять (як правило 1-2 рази на тиждень) призводить до не виконання навчальної програми та незасвоєння студентами більшості базових понять математичного аналізу або вищої математики. Формулювання теорем без доведень, не обґрунтованість лем та інших математичних тверджень призводить до формалізації математичної освіти, що обмежує можливості майбутніх економістів, фізиків, інформатиків та ін.

Тому спробуємо використовуючи системний підхід показати переваги репрезентативно-ілюстративного способу доведення однієї з важливих теорем інтегрального числення функції однієї змінної.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Деякі теоретико-методологічні аспекти що стосувалися вдосконалення та реформування вітчизняної математичної освіти на різних рівнях розглянуто у роботах таких дослідників  як О. Абрамов, Ж. Адамар, Д. Аносов, Л. Атанасян, Г. Бевз, В. Бевз, Г. Білянін, М. Бурда, С. Гарлін, Г. Глейзер, М. Жалдак, М. Ігнатенко, Т. Колесник, Є. Нелін, Г. Михалін, З. Слєпкань, І. Тесленко, В. Швець, М. І. Шкіль та багато інших [[1]], [[2]].

[1] Гирлин С.К. Иллюстративно-репрезентативное доказательство теоремы ферма о необходимом условии существования экстремума функции / С. К. Гирлин, И. В. Кузнецов, 2009. – Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pspo/2009_22_2/girlin.pdf

[2] Ровенська О. Г. Про необхідність професійної спрямованості під час вивчення базових понять курсу «вища математика» / О. Г. Ровенська, 2009. – Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/vchu/ped/2011_201_1/N201-1p105-108.pdf

По при значну кількість науково-методичних публікацій в зазначеній області досліджень проблемам встановлення особливостей репрезентативно-ілюстративного способу доведення більшості теорем математичного аналізу з урахуванням професійної спрямованості студентів приділяється не значна увага.

**Мета та завдання дослідження.** Показати ефективність застосування репрезентативно-ілюстративного способу доведення деяких теорем інтегрального числення функції однієї змінної з урахуванням професійної спрямованості студентів.

**Виклад основного матеріалу.** Аналіз навчальних та робочих програм такої важливої дисципліни як математичний аналіз, що вивчається студентами, напрям підготовки яких 6.040203 «Фізика» показує, що тижневе аудиторне навантаження для першокурсників не перевищує 6 год. Враховуючи досить низький рівень математичної підготовки (ЗНО з математики не обов'язкове), то викладання навчального матеріалу на основі таких класичних підручників з математичного аналізу як Фіхтенгольц [[3]], Нікольський [[4]] є неможливим у зв'язку із високим рівнем абстракції.

Підручники з математичного аналізу під редакцією педагогів-дослідників М. Давидова, М. Шкіля та ін. роблять дещо доступнішим навчальний матеріал, але більшість математичних тверджень ними доводяться так само (можливо за виключенням позначень) як і у підручнику 1964 р. за редакцією Г. Фіхтенгольца.

Наприклад, якщо говорити про теоретичний матеріал, що стосується виведення формули довжини дуги $l$ деякої спрямлюваної, явно заданої кривої $y = f(x)$, то у всіх проаналізованих нами підручниках чи посібниках з математичного аналізу та вищої математики (а це близько трьох десятків) або зовсім не доводиться формула обчислення довжини дуги явно заданої функції, або ж пропонується наступна схема доведення:

1) доводиться відповідна теорема для кривої, яка задана параметрично, тобто досить громіздко (кілька сторінок доведення, див., наприклад [[5]], [[6]]) виводиться формула

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi(t)')^2 + (\phi(t)')^2}\, , t \in [\alpha;\ \beta],\ \alpha, \beta\ \in R,\ x = \varphi(t), y = \phi(t); \quad (1)$$

2) потім припускається, що

$$x = \varphi(t) = t, y = \phi(t) = f(t), \qquad t \in [a;\ b]$$

і отримується відома ще з ШКМ формула

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x)')^2}\, dx, x \in [a;\ b], a, b\ \in R. \quad (2)$$

На нашу думку доцільніше було б безпосередньо довести формулу (2) не використовуючи громіздке доведення, яке необхідне для встановлення співвідношення (1).

---

[3] Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1964. – Т. 1. – 440 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: В 2-е.: Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды. – Висагинас: «Alfa», 1998. – 400 с.
соромся

[5] Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1964. – Т. 1. – 440 с.

[6] Давидов М.О. Курс математичного аналізу / М. О. Давидов. – К. : Вища школа, 1990. Ч. 1. – 384 с.

Далі проведемо доведення формули (2) за допомогою репрезентативно-ілюстративного методу. Нагадаємо, що цей спосіб є не новим і він був відомий ще за часів Діофанта і успішно використовується у сучасній статистиці, економічній теорії та інших дисциплінах. Як зазначає С. Гирлин [7] суть цього методу полягає в тому, що «міркування проводяться із використанням представників певного класу об'єктів, що розглядаються». Дійсно у перекладі з англійської мови «represent» означає представляти, а французький аналог «representant» - представник. Таким чином ми будемо розуміти під цим методом такий набір (мінімальний) засобів, що дозволяє відтворювати основні характеристики досліджуваного об'єкту. У свою чергу репрезентативність будемо досягати за рахунок формування оптимального, доступного та раціонального шляху доведення тих чи інших математичних тверджень.

Доведемо наступну теорему 1 використовуючи репрезентативно-ілюстративний метод.

**Теорема 1. (про довжину кривої заданої явно)** Нехай маємо явно задану криву, яка визначається рівнянням $y = f(x)$. Тоді, якщо функція $f(x)$ визначена, неперервна разом із своєю похідною першого порядку на відрізку $[a;\ b]$, то довжина такої кривої обчислюється за формулою (2).

**Доведення.**

1) Спочатку зобразимо на рисунку 1 геометричну ілюстрацію до теореми показавши ($T$)-розбиття відрізка $[a;\ b]$ та зобразивши криву. Зауважимо, що на рисунку спеціально (візуально) акцентується увага, що точки $x_0, x_1, x_2, \dots,$ розбивають відрізок $[a;\ b]$ довільним чином, а не на рівні частини (це одна з типових помилок, які допускають студенти та молоді викладачі).

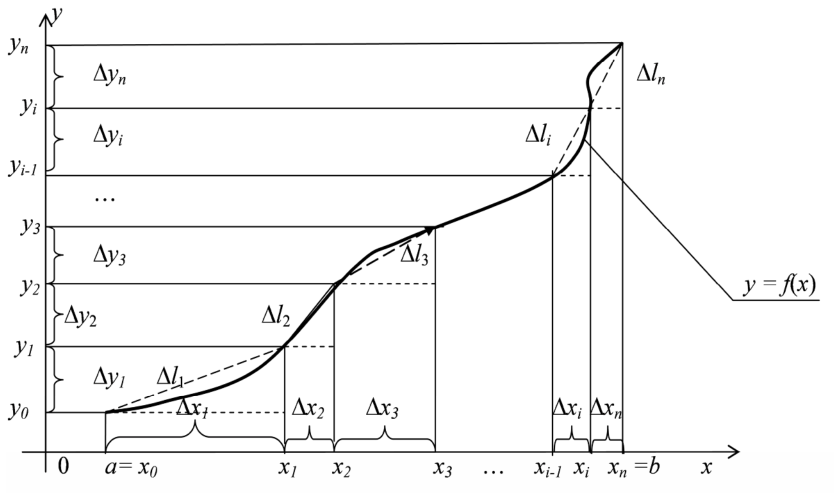


Рис. 1

[7] Гирлин С.К. Иллюстративно-репрезентативное доказательство теоремы ферма о необходимом условии существования экстремума функции / С. К. Гирлин, И. В. Кузнецов, 2009. – Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pspo/2009_22_2/girlin.pdf

2) Позначимо довжини відповідних відрізків через $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$, $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots, \Delta y_n$ та ламаних $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots, \Delta l_n$ (див. рис. 1). Тоді справедливо, що

$\Delta x_1 = x_1 - x_0$;

$\Delta x_2 = x_2 - x_1$;

$\Delta x_3 = x_3 - x_2$;

…………………

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

…………………

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$;

$\Delta y_1 = y_1 - y_0$;

$\Delta y_2 = y_2 - y_1$;

$\Delta y_3 = y_3 - y_2$;

…………………

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$;

…………………

$\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$.

Тоді, використовуючи теорему Піфагора, будемо мати

$\Delta l_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$;

$\Delta l_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$;

……………………

$\Delta l_n = \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}$.

Отже, довжину ламаної обчислюватимемо як суму довжин відповідних відрізків

$$l_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \dots + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

3) Позначимо найбільший відрізок (*T*)-розбиття відрізка $[a;\ b]$ через

$$\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i.$$

Враховуючи теорему Лагранжа, будемо мати

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x^*)\,\Delta x_i, \qquad x^* \in [x_{i-1}, x_i].$$

Тепер

$$\Delta l_n = \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}.$$

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(x_i^*)\Delta x_i)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i.$$

4) Враховуючи, що остання сума є інтегральною, тому можемо записати

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f^*(x_i^*))^2}\, dx = l.$$

Отже, ми довели формулу (2).

**Висновки.** Таким чином, враховуючи низький математичний рівень підготовки студентів-першокурсників, оскільки за останні роки зміст навчального матеріалу з алгебри та початків аналізу значно розширився (наприклад, у ШКМ з 1963 до 1973 рр. не вивчалось інтегральне числення, до 1992 р. не вивчались елементи теорії границь тощо), то саме активізація використання репрезентативно-ілюстративного методу доведення математичних тверджень дасть змогу з одного боку відійти від формального сприйняття доволі складного математичного апарату, а з іншого – охопити якомога ширше коло математичних проблем, що значно розширить кругозір студентів і дозволить виконувати свої професійні завдання на більш високому рівні.

У результаті апробації запропонованого авторського способу доведення теореми 1 (про обчислення довжини дуги спрямлюваної кривої, яка задана явно) студентах першого курсу спеціальності «Інформатика» показали якість розуміння та наступного відтворення доведення на рівні 85%. У порівнянні із класичним способом вивчення даної теми результати були значно нижчі – 45%.

Таким чином, впровадження репрезентативно-ілюстративного методу доведення математичних тверджень надає можливість викладачам більш гнучко використовувати всі можливі сучасні засоби навчання, що сприяють розвитку логічного та абстрактного мислення студентів.

### *Список використаної літератури*


1. Власенко К. В. Формування умінь і навичок студентів інженерних вищих навчальних закладів у процесі евристичної діяльності / К. В. Власенко // Рідна школа. – 2005. – № 4. – С. 55–58.
2. Максимова Т. С. Особливості самоосвіти майбутніх фахівців технічного профілю в процесі формування та розвитку їх професійно-орієнтованої евристичної діяльності / Т. С. Максимова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. – 2007. – Вип. 28. – С. 53–56.

3. Крилова Т. В. Шляхи активізації навчання математики у вищій технічній школі / Т. В. Крилова, П. О. Стеблянко, О. Ю. Орлова // Вісник Черкаського університету: серія «Педагогічні науки». – 2010. – Вип. 181. – С. 47–53.
4. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл. - К.: Зодіак-Еко, 2000. - 512 с.
5. Гірлін С.К., Кузнєцов І.В. Наочні методи доведень теорем // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт: Труди міжнародної науково - методичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє». – Вип. 28. - Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2007. – С. 140 – 144.

***Олали Н.В., Securityзко В.Д. Об особенностях репрезентативно-иллюстративного способа доказательства некоторых теорем математического анализа с учетом профессиональной направленности студентов.***

*В работе приведен авторский способ доказательства теоремы о вычислении длины явно заданной спрямляемых дуги и показаны преимущества репрезентативно-иллюстративного доказательства этой теоремы для студентов нематематических специальностей.*

***Ключевые слова:*** *спрямляемая дуга, репрезентативно-иллюстративный метод, математический анализ, нематематические специальности.*

***Olali N.V., Zalizko V.D. On the specifics using of representative and illustrative way for proving of some theorems of mathematical analysis based on professional orientatated direction of students.***

*In this paper we presents the author's way of proving theorem about calculating the length of immediately defined rectifiable arc and shows advantages of representative and illustrative proof of this theorem for students of non-mathematical specialities.*

***Keywords:*** *rectifiable arc, representative and illustrative way, mathematical analysis, non-mathematical specialities.*