ЛЕМА ДЛЯ НЕРІВНОСТЕЙ З РАДИКАЛАМИ

Ясінський В. А.,
доцент,
Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського

Розглядається лема про нерівність з радикалами, яка є складовою системи використання новітніх технологій доведення нерівностей, що пропонувалися на математичних олімпіадах.

Рассматривается лемма о неравенстве с радикалами, являющаяся составляющей системы использования новейших технологий доказательства неравенств, которые предлагались на математических олимпиадах.

A lemma for inequalities with radical signs is discussed here. This lemma is a component of the system of applications of the newest technologies for proof of inequalities offered on Mathematical Olympiads.

Розв'язування математичних задач, а особливо олімпіадних, за допомогою новітніх технологій має важливе методичне значення і надає великі можливості для вдосконалення процесу навчання математики.

По-перше, пошук новітньої технології розв'язування задачі — один з ефективних шляхів реалізації дидактичних принципів *свідомості* й *активності* засвоєння навчального матеріалу. При розв'язуванні олімпіадної задачі різними новітніми методами нерідко відома учням вправа переноситься в якісно нові умови, повторюється в нових зв'язках і поєднаннях.

По-друге, для розв'язування олімпіадних задач різними новітніми технологіями, учням доводиться використовувати багато теоретичних фактів, методів і прийомів, аналізувати їх з точки зору застосування до заданої в задачі ситуації, що сприяє формуванню та розвитку *гнучкості мислення*.

По-третє, в процесі пошуку різних новітніх технологій розв'язування олімпіадних задач переважає *творче мислення*, що сприяє розвитку не тільки інтелекту, але й низки *моральних якостей*, багато в чому визначає *світогляд* школяра.

Крім того, розв'язування задач за допомогою новітніх технологій направлено і на *естетичне виховання* учнів. Саме тут школярі вчаться самостійно знаходити простіші та красивіші розв'язання завдань, починають бачити взаємозв'язок усіх частин математики, а отже, і красу цієї науки.

А тому виникає проблема створення і пошуку новітніх технологій доведень в умовах профільного навчання математики. Для розкриття учням суті новітніх методів доведення важливу роль відіграє застосування деяких особливих елементів алгебри та початків аналізу, з якими ми рекомендуємо ознайомлюватися на факультативних заняттях і бажано їх включати до програм поглибленого вивчення математики. Для цього спочатку треба ознайомити учнів з деякими відомостями про доведення нерівностей та алгебраїчних формул.

Для доведення нерівностей, які містять радикали, потрібно навчитися ***елементарними*** методами знаходити їх *верхні межі* (як правило не симетричні), як для середнього степеневого k-го степеня n невід'ємних чисел, і зуміти їх використати для конкретних нерівностей.

Лема 1. *Якщо a і b такі дійсні числа, що $a \ge b \ge 0$ і k – натуральне, $k > 1$, то для будь-якого $\lambda \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}\right]$ виконується нерівність $\sqrt[k]{a^k + b^k} \le a + \frac{b}{\lambda}$ (1).*

Лема 2. *Якщо $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ додатні дійсні числа і k – натуральне, $k > 1$, то для будь-якого $\lambda \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}\right]$ виконується така нерівність:*

$$\sqrt[k]{a_0^k + a_1^k + \ldots + a_n^k} \le a_0 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda^n} \quad (2).$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_i = \sqrt[k]{2^{n-i-1}} \cdot a_n$, де $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Застосування.

1. *(Румунія, 2009.) Нехай a і b – невід'ємні дійсні числа, причому $a \ge b$. Доведіть, що виконується нерівність $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt[3]{a^3+b^3} + \sqrt[4]{a^4+b^4} \le 3a + b$.*

Розв'язання. За лемою 1, одержуємо:

$\sqrt{a^2+b^2} \le a + \left(\sqrt{2}-1\right)b$, $\sqrt[3]{a^3+b^3} \le a + \left(\sqrt[3]{2}-1\right)b$, $\sqrt[4]{a^4+b^4} \le a + \left(\sqrt[4]{2}-1\right)b$.

Додавши ці нерівності, одержимо:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt[3]{a^3+b^3} + \sqrt[4]{a^4+b^4} \le 3a + \left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} - 3\right)b \quad (*).$$

Оскільки $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} - 3 < 1$, то $3a + \left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} - 3\right)b \le 3a + b$ $(**)$.

Із нерівностей $(*)$ і $(**)$ випливає нерівність, яку потрібно було довести. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $b = 0$.

Зауваження. Якщо скористатися так званою *нерівність Мілдорфа* $\sqrt[k]{a^k + b^k} \le a + \frac{b}{k}$, для $k = 2, 3, 4$, то задача розв'язаною не буде, бо $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

2. *(АРМО, 2003.) Нехай a, b, c – довжини сторін деякого трикутника, причому $a + b + c = 1$, і $n \ge 2$ – натуральне число. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Розв'язання. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $a \ge b \ge c$. Оскільки a, b і c – довжини сторін трикутника, то за нерівністю трикутника маємо:

$b+c>a \Leftrightarrow 1-a>a \Leftrightarrow a<\frac{1}{2}$.

За лемою 1, одержуємо: $\sqrt[n]{a^n+b^n} \le a+\left(\sqrt[n]{2}-1\right)b$, $\sqrt[n]{b^n+c^n} \le b+\left(\sqrt[n]{2}-1\right)c$,

$\sqrt[n]{a^n+c^n} \le a+\left(\sqrt[n]{2}-1\right)c$.

Додавши ці три нерівності, одержимо:

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n} \le 2a+\sqrt[n]{2}b+2\left(\sqrt[n]{2}-1\right)c=$$

$$=\left(a+b+c\right)+a+\left(b+2c\right)\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-c=1+a+\left(b+2c\right)\left(\sqrt[n]{2}-1\right)-c<$$

$$<1+a+\left(b+c\right)\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=1+a+\left(1-a\right)\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\left(2-\sqrt[n]{2}\right)a+\sqrt[n]{2}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2},\text{ бо } a<\frac{1}{2}.$$

Список використаної літератури

1. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities, volume 1, Gil Publishing House, 2007.
2. Radmila Bulajich Manfrino, Jose Antonio Gomez Ortega, Rogelio Valcez Delgado, Inequalities, Institudo de Matematicas, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2005.
3. http://www.mathlinks.ro