ДОЦІЛЬНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ» В КУРСІ «ВСТУП ДО СПЕЦІАЛЬНОСТІ МАТЕМАТИКА»

Працьовитий М.В.,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Василенко Н.М.,
кандидат фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Лисенко І.М.,
кандидат фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У роботі обґрунтовується доцільність вивчення теми «Діофантові рівняння» у курсі «Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА» для студентів педагогічних університетів напряму підготовки «Математика» та пропонується методика її вивчення.

В работе обосновывается целесообразность изучения темы «Диофантовые уравнения» в курсе «Введение в специальность МАТЕМАТИКА» для студентов педагогических университетов направления подготовки «Математика» и предлагается методика ее изучения.

In the paper we substantiate the advisability of study of the topic “Diophantine equations” in the course “An Introduction to MATHEMATICS” for students of mathematical specialities of pedagogical universities. Also a methodology of study of this topic is proposed.

Підготовленість випускника сучасної загальноосвітньої української школи до вивчення курсів вищої математики, м’яко кажучи, бажала би бути кращою. Причини цього загальновідомі. Особливо гостро стоїть ця проблема в системі підготовки професійного математика та вчителя математики, де передбачається наявність у першокурсника високої математичної культури, ерудиції, ґрунтовних знань шкільного курсу математики і сформованість початкового неілюзорного уявлення про математику як науку. Оскільки такі передумови відсутні, то багато ВУЗів України сьогодні намагаються ліквідувати прогалини в знаннях шкільного курсу математики (ШКМ) шляхом введення для першокурсників різних за назвою дисциплін, метою яких, як правило, є повторення понять та фактів ШКМ.

З метою розширення кругозору, посилення інтересу до математики і занять нею, підвищення загальної математичної культури, створення міцних основ для вивчення фундаментальних математичних курсів, у Фізико-математичному інституті НПУ імені М.П. Драгоманова до навчального плану напряму підготовки МАТЕМАТИКА* включено навчальну дисципліну «Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА» (далі «Вступ ...»). На нашу думку, вона має бути значно глибшою за змістом, ніж повторювальний курс шкільної математики. Її вивчення має розв’язувати значно ширше коло завдань,зокрема:

1. Повторити ті факти шкільного курсу математики, які використовуються у фундаментальних математичних курсах, зокрема, лінійній алгебрі, аналітичній геометрії, математичному аналізі;

2. Підвищити рівень загальної математичної культури першокурсників, зокрема, здатності використовувати геометрично-образне та аналітичне мислення;
3. Сформувати вміння працювати з математичною теорією та математичною задачею, з математичною літературою та навчальними посібниками;
4. Озброїти широковживаними методами розв'язання математичних задач, зокрема, методом математичної індукції, методом доведення від супротивного, конструктивним методом доведення теорем існування тощо;
5. Сформувати вміння (внутрішню потребу) широко використовувати прийоми розумової діяльності (аналіз, синтез, індукція, дедукція), вмінням конкретизувати та узагальнювати;
6. Сформувати уявлення про прикладну математику і математичне моделювання, як метод пізнання навколишньої дійсності;
7. Посилити мотиваційні основи процесу навчання;
8. «Пробудити» інтерес до математики як науки і засобу пізнання навколишнього світу, до наукової діяльності та математичної творчості;
9. Сформувати готовність студентів брати участь: в роботі наукових гуртків, в олімпіадах та конкурсах;
10. Ознайомити студентів з роботою математика-науковця, популяризатора математичних знань, з періодичними науковими та науково-популярними виданнями, широким спектром наукових та науково-популярних книг для школярів та вчителів.

РІВНЯННЯ є однією із змістових ліній шкільного курсу математики, на вивчення якої відводиться значна частина всього навчального часу в курсі алгебри. Вміння розв'язувати рівняння (алгебраїчні, раціональні, ірраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні та змішані) є ґрунтовною складовою математичної культури школяра. Апарат рівнянь широко використовується у різноманітних застосуваннях математики, у суміжних навчальних дисциплінах, в першу чергу, у фізиці та хімії. Вони лежать в основі законів збереження і присутні в моделях різноманітних процесів і явищ реального світу. Особливо важливим є зв'язок (тісний, органічний) цієї змістової лінії зі змістовою лінією ФУНКЦІЇ. Випускник школи має не лише вміти формально розв'язувати рівняння (володіти методами та прийомами), а й усвідомлювати функціональне походження рівнянь, які вивчаються, їх нерозривний зв'язок з відповідними функціями.

У класичному розумінні, *діофантові рівняння* — це поліноміальні рівняння з цілими (раціональними) коефіцієнтами, в яких змінні можуть приймати тільки цілі значення, названі так на честь давньогрецького математика III ст. Діофанта Александрійського. Основний твір Діофанта — „Арифметика" містив 13 книг. До нашого часу збереглось лише перших 6 книг, в яких зібрано 189 задач на знаходження додатних цілих розв'язків невизначених рівнянь з вдало підібраними ілюстраціями та методами розв'язання.

Розв'язати діофантове рівняння означає:

1) з'ясувати, чи має рівняння розв'язок в цілих числах;
2) якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків;

3) знайти всі цілі розв'язки рівняння.

Сьогодні в термін «діофантове рівняння» вкладають ширший зміст, розуміючи під цим рівняння (не обов'язково раціональне) з вимогою знайти його цілі (раціональні) корені.

Діофантові рівняння, не будучи програмною темою шкільного курсу математики, часто зустрічаються в завданнях математичних олімпіад різних рівнів (школярів та студентів) і не залишають байдужими до себе тих, хто по-справжньому цікавиться математикою. Зауважимо, що діофантовими рівняннями займались видатні математики, серед яких Ф. Вієт, П. Ферма, А. Пуанкаре, А. Вейль, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, К. Гаус, А. Лежандр, К. Якобі, П. Л. Чебишев, Г. Ф. Вороний та ін. [2, 8]. Підкреслимо, що Велика теорема Ферма: «*Для довільного натурального* $n \geq 3$ *рівняння* $x^n + y^n = z^n$ *не має ненульових розв'язків у цілих числах*», яку майже 300 років ніхто не міг довести, стосується саме діофантових рівнянь. Нагадаємо, що ця теорема була доведена у 1994 року Ендрю Вайлсом (129-сторінкове доведення, надруковане у журналі «Annals of Mathematics» у 1995 році, містило недоліки, які були ліквідовані того ж року з допомогою Лоуренса Тейлора).

Загальна теорія діофантових рівнянь є далекою до завершеності. Яскравим підтвердженням цього факту є згадана історія Великої теореми Ферма. Лише для окремих невеликих класів діофантових рівнянь вибудувана цілісна теорія. Зокрема, для алгебраїчних рівнянь довільного степеня з однією змінною, лінійних рівнянь з довільною кількістю змінних, деяких типів рівнянь другого степеня з двома невідомими та небагатьох інших [7, 8]. Багато інших типів діофантових рівнянь чекають своїх розв'язків у загальній постановці.

Тема «Діофантові рівняння» заслуговує на те, щоб бути включеною до навчальної програми вказаного курсу «Вступ …», оскільки дозволяє:

- повторити теорію подільності та основні числові системи, які вивчаються в школі;
- розширити уявлення про методи та прийоми розв'язування рівнянь;
- підвищити математичну культуру та готовність брати участь в олімпіадах;
- посилювати інтерес до математики, теоретичної та прикладної, і занять нею;
- ознайомити учнів з цікавою історією розвитку окремих розділів математики, зокрема, здобутками вітчизняних науковців;
- виховувати альтернативність, конструктивізм та винахідливість;
- формувати вміння гармонійно поєднувати алгоритмічні методи і штучні прийоми розв'язання задач.

Не дивлячись на те, що існує чимало робіт присвячених діофантовим рівнянням, авторам невідомі джерела, в яких би був систематично викладений навчальний матеріал в доступній для початківця формі, слідуючи принципам від простого до складного, повноти і цілісності. Реалії нашого сьогодення такі, що переважна більшість випускників шкіл, а як наслідок, і студентів-першокурсників, не мають ніякого уявлення про такі рівняння.

Природний інтерес до діофантових рівнянь можна збудити задачами прикладного характеру, які виникають в простих життєвих ситуаціях. Наведемо приклади таких.

1. Туристичне бюро, яке має у своєму розпорядженні двадцятитрьохмісні автобуси та шестимісні легкові автомобілі, організовує екскурсійну поїздку для 310 туристів. Скільки

автомобілів першого і другого типів потрібно виділити для екскурсантів, при умові, що в виділених автомобілях не повинно залишатись вільних місць?

2. Чи можна заплатити за покупку вартістю 1000 грн. 40 купюрами номіналом 1 грн., 10 грн. та 100 грн.?

3. Для перевезення зерна є мішки місткістю по 60 і 80 кг. Скільки потрібно тих і інших мішків для перевезення 440 кг зерна?

4. Товарні вагони з вантажами типу А і Б важать відповідно 27 т і 43 т. Скільки вагонів, навантажених товарами А і Б, потрібно для формування товарного потягу для перевезення вантажу масою 1800 т?

Ми пропонуємо вивчення даної теми на лекції за наступним планом:

1. Задачі, які приводять до поняття «діофантове рівняння»;
2. Рівняння *n*-го степеня з однією змінною;
3. Лінійне рівняння з двома змінними;
4. Лінійне рівняння з *m* змінними;
5. Рівняння Пелля;
6. Піфагорові числа та піфагорові трикутники.
7. Деякі прийоми та методи розв'язання діофантових рівнянь;
8. Системи діофантових рівнянь;
9. Задачі для самостійного розв'язання.

Використовуючи метод проблемного навчання, пропонуємо розпочати лекцію з конкретної задачі: *знайти всі цілі розв'язки рівняння а)* $3x+5y=1$, *б)* $3x+5y=17$.

Наведемо виклад деяких **фрагментів лекції** (згідно з пунктами плану).

2. Задача про **знаходження цілих розв'язків рівняння *n*-го степеня з однією змінною** розв'язується достатньо легко. Дійсно, нехай $x=x_0$ — цілий розв'язок рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

Тоді $a_0 = -x_0\left(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \ldots + a_1\right)$. З останньої рівності зрозуміло, що a_0 ділиться на x_0 без остачі. Таким чином, кожен цілий розв'язок рівняння (1) є дільником його вільного члена. Для знаходження цілих розв'язків рівняння потрібно вибрати ті з дільників a_0, які при їх підстановці в рівняння (1) перетворюють його на тотожність.

Продемонструвати дієвість вище наведеного способу знаходження цілочисельних розв'язків рівнянь *n*-го степеня з однією змінною можна, розв'язавши наступну задачу: *знайти цілочисельні розв'язки рівняння* $x^3-4x^2+x+6=0$.

3. Розглянемо **лінійні діофантові рівняння з двома невідомими:**

$$ax - by = c, \tag{2}$$

де $a, b, c \in \mathrm{N}$, $a \neq 0 \neq b$, і нехай $НСД(a,b) = d$.

Нехай *c* ділиться на *d*. Якщо (x_0, y_0) — цілочисельний розв'язок рівняння (2), то для довільного $k \in \mathrm{Z}$ матимемо $a(x_0+kb) - b(y_0+ka) = c$.

Отже, $x = x_0 + kb$, $y = y_0 + ka$, $k \in \mathrm{Z}$, і рівняння (2) має безліч розв'язків в цілих числах.

Якщо *c* не ділиться на *d*, то рівняння (2) розв’язків у цілих числах немає.

Нехай маємо рівняння

$$ax + by = c, \tag{3}$$

де $a, b, c \in \mathrm{N}$, $a \neq 0 \neq b$, і нехай $НСД(a,b) = d$.

Нехай *c* ділиться на *d*. Тоді поділивши числа *a*, *b* і *c* на $НСД(a,b)$, отримаємо рівняння в якому коефіцієнти при змінних будуть взаємно простими.

Припустимо тепер, що в рівнянні (3) $НСД(a,b) = 1$. Якщо (x_0, y_0) — цілочисельний розв’язок рівняння (3), то для довільного $k \in \mathrm{Z}$ матимемо

$$a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = c.$$

Отже, рівняння (3) має безліч цілочисельних розв’язків — $x = x_0 + bk$, $y = y_0 - ak$, $k \in \mathrm{Z}$.

Варто зауважити, що кількість натуральних розв’язків рівняння (3) у цьому випадку буде залежати від числа *c*. А саме, якщо

1) $c = ab$, то рівняння (3) не має розв’язків у натуральних числах, оскільки в протилежному випадку отримаємо

$$ax + by = ab, \tag{4}$$

що рівносильно $ax = b(a - y)$.

З того, що $НСД(a,b) = 1$, випливає подільність *x* на *b*, а отже, $x \geq b$. Звідки $ax + by > ax \geq ab,$ що суперечить (4).

2) $c > ab$, то рівняння (3) має безліч цілочисельних розв’язків, які знаходяться за вище вказаними формулами.

Обґрунтуємо, що для кожного натурального $c > ab$ рівняння (3) має розв’язки в натуральних числах.

З рівності (2) випливає, що існують такі натуральні числа *u* і *v*, що $au - bv = c > ab,$ звідки

$$\frac{u}{b} - \frac{v}{a} > 1.$$

А, отже, існує таке ціле число *t*, що

$$\frac{v}{a} < t < \frac{u}{b}.$$

Нехай $x = u - bt > 0$ і $y = at - v > 0$ такі цілі числа. Отже, для натуральних чисел *x* і *y* маємо

$$ax + by = a(u - bt) + b(at - v) = au - bv = c,$$

що і потрібно було довести.

Частинний розв’язок (x_0, y_0) для малих *a* і *b* можна знайти підбором, а у випадку, коли числа *a* і *b* великі, доцільно використовувати алгоритм Евкліда.

Якщо *c* не ділиться на *d*, то рівняння (3) розв’язків у цілих числах немає.

Для усвідомлення суті та закріплення вище описаного методу, зі студентами доцільно розв'язати в цілих числах наступні рівняння: *а*) $45x-37y=25$; *б*) $275x+145y=10$.

4. Значно більший інтерес становить **розв'язання в цілих числах рівнянь з багатьма невідомими**. Розв'язання таких рівнянь потребує спеціальних знань, вмінь та навичок. Найпростішими серед них є лінійні рівняння, тобто рівняння виду

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=b\text{, де } 1\le m\in N,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\in \mathrm{Z}. \qquad (5)$$

Варто зауважити, що всі коефіцієнти рівняння (5) можна вважати натуральними, оскільки члени з нульовими коефіцієнтами можна відкинути, а від'ємний коефіцієнт можна замінити рівним йому за абсолютною величиною додатним коефіцієнтом, змінивши при цьому знак у невідомої.

Отже, далі вважатимемо, що всі коефіцієнти рівняння (5) натуральні і різні. Нехай a_1 — найбільший з коефіцієнтів, зокрема $a_1>a_2$. Тоді за теоремою про ділення з остачею матимемо

$$a_1=a_2k+a_2',\ \ 0<a_2'<a_2,\ \ k\in N,\ \ a_2'\in Z.$$

Покладемо $x_1'=kx_1+x_2$, $x_2'=x_1$, $a_1'=a_2$. Тоді $a_1x_1+a_2x_2=a_2(kx_1+x_2)+a_2'x_1=a_1'x_1'+a_2'x_2'$ і рівняння (5) набуде вигляду

$$a_1'x_1'+a_2'x_2'+a_3x_3+\ldots+a_mx_m=b. \qquad (6)$$

Таким чином, розв'язування в цілих числах рівняння (5) зводиться до розв'язування в цілих числах рівняння (6), в якому найбільший серед коефіцієнтів при невідомих, менший ніж найбільший серед коефіцієнтів при невідомих у рівнянні (5). Міркуючи аналогічно, з рівняння (6) можна отримати рівняння, в якому найбільший серед коефіцієнтів, буде меншим, ніж найбільший з коефіцієнтів рівняння (6) і т.д.

Оскільки спадна послідовність в натуральних числах не може бути нескінченною, то, користуючись вище вказаним прийомом, одержимо рівняння з одним невідомим або рівняння, в якому всі коефіцієнти при невідомих рівні, наприклад, до рівняння $cy_1+cy_2+\ldots+cy_k=b$.

З останнього рівняння зрозуміло, що вільний член ділиться на *c*. В протилежному випадку останнє рівняння, а отже, і рівняння (5), не мало б розв'язків у цілих числах. Якщо $b=c\cdot d$, то одержимо рівняння $y_1+y_2+\ldots+y_k=d$, всі розв'язки якого в цілих числах отримуємо надаючи $y_2,\ldots,y_k$, довільних цілих значень і вважаючи $y_1=d-y_2-\ldots-y_k$.

Необхідною і достатньою умовою розв'язності рівняння (5) в цілих числах є подільність вільного члена b на $НСД(a_1,a_2,\ldots,a_m)$.

Використовуючи вище описаний спосіб, знайдемо цілочисельні розв'язки рівняння

$$6x+10y-7z=11. \qquad (7)$$

Оскільки $10=7+3$, то рівняння (7) можна переписати у вигляді

$$6x+7t_1+3y=11, \qquad (8)$$

де $t_1=y-z$.

Аналогічно, оскільки $7=6+1$, то рівняння (8) можна переписати у вигляді

$$6t_2 + t_1 + 3y = 11, \text{ де } t_2 = x + t_1.$$

З останнього рівняння $t_1 = 11 - 3y - t_2$. Тоді

$$z = y - t_1 = 4y + 6t_2 - 11 \quad \text{і} \quad x = t_2 - t_1 = 3y + 7t_2 - 11,$$

де y, t_2 — довільні цілі числа, містять всі розв'язки рівняння (7).

Лекцію пропонуємо завершити розв'язанням не класичного діофантового рівняння підвищеної складності: розв'язати в натуральних числах рівняння $4^x + 7^x = 2011^x$.

Розв'язання. Нехай $x_0 \in N$ — розв'язок заданого рівняння. Тоді $4^{x_0} + 7^{x_0} = 2011^{x_0}$. Знайдемо остачу від ділення 4^{x_0} на 3. Одержимо $4^{x_0} = (3+1)^{x_0} = 3q_1 + 1$ для деякого $q_1 \in N$. Отже, шукана остача дорівнює 1.

Аналогічно, з рівності $7^{x_0} = (6+1)^{x_0} = 6q_2 + 1$ для деякого $q_2 \in N$ одержимо, що остача від ділення 7^{x_0} на 3 дорівнює 1. Тоді остача від ділення суми $4^{x_0} + 7^{x_0}$ на 3 повинна дорівнювати 2. Але оскільки

$$2011^{x_0} = (2010+1)^{x_0} = 2010q_3 + 1 \text{ для деякого } q_3 \in N,$$

то остача від ділення 2011^{x_0} на 3 також дорівнює 1. Отримали суперечність. Це означає, що такого $x_0 \in N$, що $4^{x_0} + 7^{x_0} = 2011^{x_0}$, не існує. Тобто задане рівняння розв'язків в натуральних числах не має.

5. *Рівняння Пелля* — це рівняння виду $x^2 - ay^2 = 1$, де *a* — натуральне число, яке не є квадратом іншого натурального числа. Це рівняння назване рівнянням Пелля Л. Эйлером, який помилково прийняв перекладача однієї з книг з теорії чисел за автора цієї книги.

Очевидно, що пари чисел (1, 0) та (-1, 0) є розв'язками довільного рівняння Пелля. Вони називаються *тривіальними*.

Теорема (про розв'язки рівняння Пелля). *Довільне рівняння Пелля має нетривіальні додатні розв'язки, які можна отримати з рівностей:*

$$(x_i, y_i) = (x_0 x_{i-1} + a y_0 y_{i-1}, x_0 y_{i-1} + y_0 x_{i-1}), \; i \in \mathrm{N},$$

де (x_0, y_0) — один з нетривіальних додатних розв'язків рівняння, знайдений підбором.

Наслідок. Розв'язками рівняння Пелля будуть також пари чисел

$$(-(x_0 x_{i-1} + a y_0 y_{i-1}), x_0 y_{i-1} + y_0 x_{i-1}),$$
$$(x_0 x_{i-1} + a y_0 y_{i-1}, -(x_0 y_{i-1} + y_0 x_{i-1})),$$
$$(-(x_0 x_{i-1} + a y_0 y_{i-1}), -(x_0 y_{i-1} + y_0 x_{i-1})), \; i \in \mathrm{N}.$$

Для прикладу, розглянемо рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$. Перепишемо його у вигляді $x^2 = 1 + 2y^2$, звідки, шляхом підбору, отримуємо нетривіальний розв'язок — $(3, 2)$. Тоді, з теореми про розв'язки рівняння Пелля, множина всіх його додатних розв'язків знаходиться за формулами

$$(x_i, y_i) = (3x_{i-1} + 4y_{i-1}, 3y_{i-1} + 2x_{i-1}), \; i \in \mathrm{N}.$$

У випадку, коли нетривіальний розв'язок рівняння важко знайти шляхом підбору, використовують метод ланцюгових дробів, суть якого відображена в наступних теоремах.

Теорема. *Нехай* (x_0, y_0) *— нетривіальний додатний розв'язок рівняння Пелля. Тоді дріб* x_0/y_0 *є підхідним* $\sqrt{a}$.

Теорема. *Нехай n — довжина періоду послідовності елементів ланцюгового дробу для числа* $\sqrt{a}$*. Тоді чисельник і знаменник підхідного дробу числа* $\sqrt{a}$ *є розв'язками рівняння Пелля тоді і тільки тоді, коли його номер є непарним і має вигляд* $kn-1$ (*при діленні на n дає остачу* $n-1$).

6. *Піфагоровими числами* називають трійки натуральних чисел *x*, *y*, *z*, які задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = z^2$. Піфагорові числа часто тлумачать як довжини сторін деяких прямокутних трикутників. Існує нескінченна множина піфагорових чисел, найпростішими з яких є трійки чисел (3, 4,5), (5, 12, 13).

Теорема. *Розв'язками рівняння* $x^2 + y^2 = z^2$ *в натуральних числах є трійки чисел*

$$x = \left(m^2 - n^2\right)k,\ y = 2mnk,\ x = \left(m^2 + n^2\right)k,$$

де m, n, k — довільні натуральні числа, причому m > n.

Доведення теореми проводиться безпосередньою підстановкою.

Зауваження. Помінявши вирази *x* та *y* місцями, отримаємо нові розв'язки. Всі натуральні розв'язки даного рівняння можна знайти в [1].

Методичні рекомендації щодо проведення практичного заняття. При актуалізації опорних знань на практичному занятті варто повторити наступні факти: ознаки подільності, способи знаходження НСД, теореми Вієта (пряму та обернену), загальний вигляд розв'язків лінійного рівняння з двома змінними. Далі пропонується розв'язати наступні задачі.

1. Усно знайти цілі розв'язки рівняння а) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$, б) $x^3 - 4x^2 + 9x - 6 = 0$, в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$. *Відповідь*: а) $\{-6; 0; 1\}$, б) $\{1\}$, в) $\varnothing$.

2. Використовуючи алгоритм Евкліда, знайти цілі розв'язки лінійного рівняння $7x + 12y = 43$. *Відповідь*: $x = -215 + 12t$, $y = 129 - 7t$, $t \in Z$.

3. Використовуючи метод розсіювання (ґрунтується на тому, що невизначене рівняння зводиться до ланцюга рівнянь з коефіцієнтами, які зменшуються за абсолютною величиною) розв'язати рівняння $19x - 8y = 13$. *Відповідь*: $x = 39 + 8t$, $y = 91 + 19t$, $t \in Z$.

4. Використовуючи ланцюгові дроби, знайти цілочисельні розв'язки рівняння $142x + 82y = 6$. *Відповідь*: $x = -4 + 41t$, $y = 7 - 71t$, $t \in Z$.

5. З'ясувати скільки точок з цілими координатами лежать на прямій $8x - 13y + 6 = 0$, між прямими $x + 100 = 0$ та $x - 150 = 0$? *Відповідь*: 19 точок.

6. Використовуючи розклад на множники, розв'язати рівняння $2xy + 3x + y = 0$. *Відповідь*: (0, 0), (1, -1), (-1, -3), (-2, 2).

7. Знайти цілочисельні розв'язки рівняння $x^2 - xy + y^2 = x + y$. *Відповідь*: (2, 2), (0,0), (1,2), (1,0), (2,1), (0,1).

8. Розв’язати рівняння Пелля $x^2-5y^2=1$. *Відповідь*: $(x_0,y_0)=(9,4)$, $(x_i,y_i)=(9x_{i-1}+20y_{i-1},4x_{i-1}+9y_{i-1})$, $i\in\mathrm{N}$.

9. Знайти цілочисельні розв’язки системи $\begin{cases} x^2+y-z=0, \\ y^2+x-z^2+2=0. \end{cases}$ *Відповідь*: $(1,1,2)$, $(-1,0,1)$, $(-2,-2,2)$.

Практичне заняття пропонуємо завершити розв’язанням не класичного діофантового рівняння.

10. Розв’язати в цілих числах рівняння $x^{2010}-9y^2=2010$.

Зауваження: У підсумковій частині практичного заняття слід повторити назви та суть основних прийомів та методів, застосовних до розв’язання діофантових рівнянь.

Вдома ми пропонуємо розв’язати наступні задачі.

1. Розкладіть число 150 на два додатних доданки, один з яких кратний 11, а другий — 17.

2. Різними методами розв’язати лінійні діофантові рівняння *а*) $13x-16y=7$, *б*) $258x-172y=56$, *в*) $9x+17y=105$.

3. Розв’язати в цілих числах лінійне рівняння $7x-3y+9z=5$.

4. Знайти цілочисельні розв’язки рівнянь другого степеня: *а*) $x^2-3xy-2=x-3y$, *б*) $x^2-3xy+2y^2=3$, *в*) $x^2-y^2=402$.

5. Розв’язати рівняння Пелля $x^2-6y^2=1$.

6. Знайти цілочисельні розв’язки $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$.

7. Розв’язати в натуральних числах рівняння $5^x-3^y=2$.

Завдання пошукового характеру:

1. Ознайомившись зі щоденником Георгія Вороного [6д], пересвідчитись в тому, що діофантові рівняння цікавили цього вітчизняного математика і, що великі вчені теж помиляються;
2. У книзі [11д] відшукати три задачі з діофантовими рівняннями та виписати їх розв’язання.
3. З’ясувати скільки існує не подібних трикутників з кутом 60^0 і цілочисельними довжинами сторін?

Тим, хто зацікавиться даною темою ми пропонуємо ознайомитись з наступною літературою і розв’язати наступні задачі (підвищеної складності).

1. Для кожного простого *p* розв’яжіть рівняння $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ в натуральних числах.
2. Доведіть, що для довільного натурального *n* рівняння $(x+1)^3+\ldots+(x+n)^3=y^3$ має цілочисельні розв’язки.

3. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння $n! = 20n^2$.

Список використаної літератури

Основна література

1. Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения. — Мн.: НТЦ „АПИ”, 1999. — 160 с.
2. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. — М: Наука, 1972.
3. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. — М.: Наук, 1984. — 256 с.
4. Бевз Г.П., Конфорович А.Г., Резніченко З.О., Ченакал Є.О. Математика: Посібник для факульт. занять у 7 кл. — К.: Рад. школа, 1982. — 152 с.
5. Бугаенко В.О. Уравнения Пелля. — М.: МЦНМО, 2001. — 32 с.
6. Бухштаб А.А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1996. — 284 с.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.-Л.: Госстехиздат, 1952. — 182 с.
8. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978. — 63 с. (Популярные лекции по математике).
9. Серпинский В.Н. О решении уравнений в целых числах. — М.: Физматлит, 1961. — 88 с.
10. Сивашский И.Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарной математике. — М.: Гостехиздат, 1965. — 367 с.
11. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы алгебры и теории чисел (арифметика). — М.: Гостехиздат, 1950. — 382 с.

Додаткова література

1д. Айэрленд К.А., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – – М.: Мир, 1987. — 416 с.

2д. Арнольд В.И. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2002. — 104 с.

3д. Бородін О.І. Теорія чисел. — К.: Рад. школа, 1965. — 262 с.

4д. Ван дер Варден Уравнение Пелля в математике греков и индийцев // УМН. — 1976. — В. 5 (191). — Т. 31. — С. 57–70.

5д. Вінер Н. Я – математик. — М.: Наука, 1964. — 356 с.

6д. Вороний Г.Ф., Кратко І.М. Щоденник: 1885 – 1890. — К.: Віпол, 1994. — 132с.

7д. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. — М.: Наука. — 1991. — 240 с.

8д. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ. — М.: Наука, 1987. — 432 с.

9д. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия — М.: Наука, 1988. — 288 с. – – (Б-чка «квант». Вып. 64.)

10д. Кочева А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч. III. — М.: Просвещение, 1984. — 41 с.

11д. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006. — Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.
12д. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. — М.: Наука, 1967. — 200 с.
13д. Постников М.М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. — М.: Наука, 1978. — 130 с.
14д. Прасолов В.В. Многочлены. — М.: Наука, 2001. — 336 с.
15д. Рыбников К.А. Профессия – математик: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. — М.: Просвещение, 1989. — 96 с.
16д. Сендеров В., Спивак А. Уравнения Пелля (часть I) // Квант. — 2002. — № 3. — С. 2-9.
17д. Скоробагатько В.Я. Дивлюсь на світ як математик. — Львів: Афіша, 1994. — 80 с.
18д. Сойер У.У. Прелюдия к математике // Пер. с англ. М.Л. Смолянского и С.Л. Романовой. Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предвар. анализом математ. склада ума и целей математики. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1972. — 190 с.
19д. Спивак А. Уравнения Пелля (часть II) // Квант. — 2002. — № 4. — С. 5-11.
20д. Спивак А. Уравнения Пелля (часть III) // Квант. — 2002. — № 6. — С. 10-15.
21д. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике: Кн. для .учащихся. — М.: Просвещение, 1985. — 112 с.
22д. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся старших классов. 3-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 1989. — 192 с.
23д. Шнирельман Л.Г. Простые числа. — М.: Гостехиздать, 1940. — 178 с.
24д. Ядренко М.Й. Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма // У світі математики. — К., 2004. — Т. 11. — Вип. 2. — С. 1-9.