ТЕМА «БАРИЦЕНТР ТА БАРИЦЕНТРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ» У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ «МАТЕМАТИКА»

Працьовитий М.В.,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Креш Л.Л.,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Обговорюється місце, роль і значення поняття «барицентр» у векторній алгебрі курсу «Аналітична геометрія» для математичних спеціальностей педагогічних університетів, а також пропонується методика вивчення теми «Барицентрична система координат».

Обсуждается место, роль и значение понятия «барицентра» у векторной алгебре курсу «Аналитическая геометрия» для математических специальностей педагогических университетов, а также предлагается методика изучения темы «Барицентрическая система координат».

We discuss a position, role and value of the notion of barycenter in the vector algebra of the course «Analytic geometry» for mathematical specialities of pedagogical universities. A methodology of study of the topic «Barycentric coordinate system» is also proposed.

Вступ. Навчальна дисципліна «Аналітична геометрія» є нормативною дисципліною у системі підготовки математика у педагогічному університеті. Вона традиційно вивчається у перших двох семестрах і є фундаментальною дисципліною для всієї системи математичної освіти майбутнього фахівця. Відносно бідна в ідейному відношенні галузь математики (оскільки в її основі лежить лише дві головні ідеї: ідея координат та ідея геометричного тлумачення рівнянь і нерівностей), яка займається вивченням геометричних фігур, геометричних відношень та геометричних перетворень просторів методом координат з використанням засобів алгебри, є достатньо багатою змістом і застосуваннями у різних галузях науки, у першу чергу, в математичному аналізі, фізиці тощо.

Основна мета навчання аналітичної геометрії полягає у глибокому оволодінні студентами методом координат, який ґрунтується на знаннях про різні системи координат, геометричний зміст координат точки, координатні лінії, найпростіші задачі та найпростіші застосування систем координат, формул переходу від однієї системи координат до іншої тощо.

Зміст курсу «Аналітична геометрія» в останні десятиріччя мало оновлювався. З нього то вилучали геометричні перетворення, то знову вводили. На сьогоднішній день, ми вважаємо, без геометричних перетворень, які, до речі, нерозривно пов’язані з перетворенням координат, неможливий. Більше того, розділ «Геометричні перетворення» збагатити курс питаннями, які стосуються самоподібних множин, самоподібної розмірності фігур, самоподібних фракталів. На порядку денному стоїть питання введення в курс фрактальних систем координат, що э темою окремого обговорення.

Частково збагатити курс, допомогти вирішувати його основні завдання може включення до програми теми «Барицентрична система координат», яка тісно пов'язана з важливим геометричним поняттям барицентра, векторною алгеброю та афінною системою координат. Наявність цієї теми в курсі, безсумнівно, допоможе розширити уявлення про системи координат, можливості методу координат, конкретизувати зміст основних задач методу координат стосовно геометричних місць точок. На жаль, навчальна література стосовно барицентричної системи координат практично відсутня.

Розробка методики вивчення цієї теми, збалансованість змісту, замкненість його викладу, вдалий підбір ілюстративного матеріалу, цікаві контрприклади, доцільні задачі на застосування, добірка розвивальних задач, підбір запитань для самоконтролю і задач для самостійного розв'язання вимагають системного підходу через призму основних завдань курсу.

В даній роботі ми намагаємось висвітлити своє бачення місця і ролі даної теми в межах існуючих стандартів з аналітичної геометрії для студентів педагогічних вузів.

Барицентр системи точок. Нагадаємо, що *барицентром (центроїдом)* системи точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (площини або простору) називається точка G, для якої має місце рівність

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Обґрунтовує коректність даного означення наступне твердження: *довільна скінченна множина* (*система*) *точок має єдиний* барицентр. Доведемо це.

Існування. Доведення проведемо методом математичної індукції. Якщо $n = 2$, тобто система містить дві точки, то очевидно, що барицентром є середина відрізка A_1A_2.

Припустимо, що твердження правильне для $n = k$, тобто існує точка G' така, що

$$\overrightarrow{G'A_1} + \overrightarrow{G'A_2} + \ldots + \overrightarrow{G'A_k} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Розглянемо точку G, яка ділить напрямлений відрізок $\overline{A_{k+1}G'}$ у відношенні k, тобто точку для якої має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{A_{k+1}G} = k\overrightarrow{GG'}. \qquad (3)$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\overrightarrow{A_{k+1}G} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1G'} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{A_2G'} + \cdots + \overrightarrow{GA_k} + \overrightarrow{A_kG'},$$

$$\overrightarrow{G'A_1} + \overrightarrow{G'A_2} + \cdots + \overrightarrow{G'A_k} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_k} + \overrightarrow{GA_{k+1}}.$$

Але з (2) випливає, що ліва частина останньої рівності дорівнює $\vec{0}$. Тому

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_k} + \overrightarrow{GA_{k+1}} = \vec{0}.$$

Отже, точка G є барицентром системи точок $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Тоді, згідно з принципом математичної індукції дане твердження правильне для довільної скінченної кількості точок.

Єдиність. Нехай крім рівності (1) має місце і рівність

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Віднявши від рівності (1) рівність (4) одержимо

$$\left(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{OA_2}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{GA_n} - \overrightarrow{OA_n}\right) = \vec{0},$$

$$n\overrightarrow{GO}=\vec{0}.$$

Звідки $G=O$. *Твердження доведено.*

Якщо в афінній системі координат (в афінному репері) $R=G\vec{e}_1\vec{e}_2$ точки A_i задані своїми координатами, а саме: $A_i\left(x_i;y_i\right)$, $i=\overline{1,n}$, то

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0 \quad \text{і} \quad y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Якщо координати точок задані в довільній афінній системі координат, то легко встановити, що координати барицентра обчислюються за формулами $x_G=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$, $y_G=\frac{1}{n}\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right)$.

Це поняття важливе для фізичних застосувань векторної алгебри та векторного аналізу. В курсі аналітичної геометрії воно пов’язане з такими питаннями як центр мас системи матеріальних точок [16] та кінематичний метод розв’язання геометричних задач [7]. Воно є одним з центральних понять в темі «Барицентрична система координат» [17].

Взагалі кажучи, поняття барицентра є афінним, а не метричним, хоча йому можна дати і метричне тлумачення. Наступна задача пояснює це.

З а д а ч а 1. *На площині дано n точок $A_1, A_2,\ldots,A_n$, $n>1$. Знайти геометричне місце точок M, для яких сума $MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2$ є мінімальною.*

Розв’язання. Нехай в прямокутній декартовій системі координат точки задані своїми координатами: $A_1\left(x_1;y_1\right),\ldots,A_n\left(x_n;y_n\right)$, $M\left(x,y\right)$ – довільна точка площини. Тоді

$$\begin{aligned}MA_1^2+\ldots+MA_n^2&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2+(y-y_n)^2=\\&=nx^2+ny^2+x_1^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+\ldots+y_n^2-2(xx_1+yy_1+xx_2+yy_2+\ldots+xx_n+yy_n)=\\&=nx^2+ny^2-2x(x_1+\ldots+x_n)-2y(y_1+\ldots+y_n)+(x_1^2+\ldots+x_n^2)+(y_1^2+\ldots+y_n^2)=\\&=n\left[\left(x-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^2\right]+A,\end{aligned}$$

де $A=\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)+\left(y_1^2+\ldots+y_n^2\right)-\frac{1}{n}\left[\left(x_1+\ldots+x_n\right)^2+\left(y_1+\ldots+y_n\right)^2\right]$.

Оскільки число A не залежить від координат точки M, то останній вираз набуває найменшого значення, якщо $x=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$, $y=\frac{1}{n}\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right)$, тобто коли M є барицентром системи точок $A_1,A_2,\ldots,A_n$.

Барицентр трикутника співпадає з точкою перетину його медіан і називається ще, по-іншому, *центроїдом* або *центром мас* (ваги) трикутника. Згідно з задачею 1 єдиною точкою площини, сума квадратів відстаней якої від вершин заданого трикутника є мінімальною, є точка перетину медіан цього трикутника.

Поняття барицентра фігурує в багатьох задачах елементарної геометрії. Розглянемо кілька прикладів.

З а д а ч а 2. Дано трикутник ABC і точку X, що йому належить. Довести твердження:

1) Необхідною і достатньою умовою того, щоб точка X співпадала з центроїдом педального трикутника $X_1X_2X_3$ для $\triangle ABC$ (X_1, X_2, X_3 – проекції точки X на сторони трикутника), є виконання рівностей:

$$\frac{XX_1}{BC}=\frac{XX_2}{CA}=\frac{XX_3}{AB};$$

2) Точка X є цетроїдом трикутника $X_1X_2X_3$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $XX_1\cdot h_a=XX_2\cdot h_b=XX_3\cdot h_c$, де h_a,h_b,h_c – висоти трикутника ABC.

Барицентрична система координат. Метод координат, суть якого полягає в тому, що з введенням системи координат точки простору ототожнюється з наборами дійсних чисел, що дозволяє задавати об’єкти (множини, відношення, перетворення тощо) за допомогою співвідношень між числами ґрунтується на системах координатизації (системах координат), яких, взагалі кажучи, існує багато. Кожна з них відносно просто розв’язує значне коло важливих властивих (адекватних) їй задач і має певні переваги перед іншими. Найбільш поширеними для площини є афінна система координат, полярна система координат, криволінійні системи координат тощо.

Тому сформувати цілісне, відносно повне уявлення про метод координат, його можливості наукові, навчальні та розвивальні неможливо без широкого погляду на системи координат (системи координатизації). Це важливо для різних фундаментальних математичних дисциплін і галузей математики, в першу чергу, алгебри та математичного аналізу.

Традиційним для курсу аналітичної геометрії (планіметрії) є вивчення афінної, зокрема, прямокутної декартової та полярної систем координат. Щоб сформувати цілісний, достатньо широкий погляд на метод координат цього, взагалі кажучи, недостатньо. Ефективною при розв’язанні ряду задач є барицентрична система координат, яка має свої особливості і принципові відмінності, починаючи від координатних ліній і зручних форм запису рівнянь деяких геометричних місць точок, і закінчуючи гнучкістю застосування методу скорочених позначень.

Барицентричні координати вперше були введені А. Мьобіусом в 1827 р. (див. [1]) при розв'язанні задачі: *які маси слід помістити в вершинах даного трикутника, щоб задана точка була центром мас даної системи трьох матеріальних точок*. Таким чином ідея розвивалась, починаючи з барицентра.

На вивчення барицентричної системи координат на прямій та площині доцільно виділити чотири лекційні години і дві години на практичні заняття. Лекцію, якій передуватиме вивчення афінної системи, можна провести за наступним планом.

1. Барицентрична система координат на прямій: означення, визначення, геометричний та фізичний зміст барицентричних координат, застосування.
2. Барицентрична система координат на площині.
3. Зв’язок барицентричних координат з афінними та декартовими.
4. Найпростіші задачі барицентричної системи координат.
5. Взаємозв’язок координат однієї і тієї ж точки в різних барицентричних системах.
6. Координатні лінії.
7. Застосування барицентричних координат, зокрема, до розв’язання задач.

Мотивуючи інтерес до даної теми (а це робити не важко після того як вивчена афінна система координат), важливо акцентувати увагу на доцільності розгляду такої в контексті наступних застосувань і продуктивності понять, які вводяться. Порівняльний аналіз афінних і барицентричних координат, висвітлення їх тісного зв'язку є невід'ємною ланкою мотиваційної системи в цілому.

Важливим моментом в оволодінні афінною системою координат є усвідомлення «рівноправності» осей координат і координат точки. Ця симетрія має проглядатися з самого спочатку введення системи координат і бути потужним засобом в процесі розв'язання складних задач. Барицентрична система координат має аналогічну, і навіть глибшу, властивість, оскільки породжує додатково ще й однорідність координат, не властиву афінній системі координат.

Освоївши основи теорії систем координат та метод координат в цілому, студент відносно легко міг би іти далі самостійно, вивчаючи нові системи координатизації, зокрема криволінійні.

Вивчаючи різні системи координат на прямій варто акцентувати увагу на тому, що в цьому випадку поняття «системи координат» і «система числення» мають майже однаковий зміст (дуже близький).

Висвітлюючи питання застосування барицентричних координат доцільно зупинятись на застосуваннях в геометрії, фізиці, алгебрі та математичному аналізі, ілюструючи це вдало підібраними прикладами, для цього можна використати наступні задачі.

По-можливості на консультації або на засіданні гуртка можна розглянути зв'язок барицентричної системи координат з фракталами, зокрема, задання кривих Серпінського (килима, серветки та їх узагальнень) в барицентричних координатах.

Варто зазначити, що при формулюванні означення барицентричних координат на площині існує принаймні дві альтернативи, одну з яких дає наступна теорема, а іншу – наслідок з неї.

Теорема 1. Якщо $B=\left(A_1, A_2, A_3\right)$ – впорядкована трійка неколінеарних точок, то для довільної точки M існує єдина трійка чисел $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ таких, що

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=x_1\overrightarrow{OA_1}+x_2\overrightarrow{OA_2}+x_3\overrightarrow{OA_3}, \\ x_1+x_2+x_3=1,\end{cases} \tag{1}$$

де O – довільна точка площини.

Наслідок 1. Якщо $B=\left(A_1, A_2, A_3\right)$ – впорядкована трійка неколінеарних точок, то для довільної точки M існує єдина трійка чисел $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ таких, що

$$\begin{cases}x_1\overrightarrow{MA_1}+x_2\overrightarrow{MA_2}+x_3\overrightarrow{MA_3}=\vec{0}, \\ x_1+x_2+x_3=1,\end{cases} \tag{1*}$$

де O – довільна точка площини.

Означення 1. Впорядкована трійка чисел $\left(x_1, x_2, x_3\right)$, існування і єдиність яких констатує теорема 2.3.1 та наслідок з неї, називаються координатами точки M в барицентричній системі координат $B=\left(A_1, A_2, A_3\right)$.

Означення на основі теореми 1 є важливим для встановлення взаємозв'язку афінних та барицентричних координат, але викликає деякі труднощі, пов'язані з невизначеністю статусу точки O. Означення на основі наслідку є зрозумілішим для більшої кількості студентів, але його безпосереднє обґрунтування вимагає деяких затрат часу. Тому вважаємо доцільним формулювання двох еквівалентних означень з наведеною вище їх послідовністю.

При вивченні афінної, зокрема, прямокутної декартової системи координат традиційно є питання про взаємозв'язок однієї і тієї ж точки в різних системах. Не слід оминати його при вивченні барицентричної системи координат.

Теорема 2. Координати точки X в барицентричній системі координат $B=(A_1, A_2, A_3)$ визначаються за формулами:

$$x_1=\pm\frac{S_{A_2XA_3}}{S_{A_1A_2A_3}},\ x_2=\pm\frac{S_{A_1XA_3}}{S_{A_1A_2A_3}},\ x_3=\pm\frac{S_{A_1XA_2}}{S_{A_1A_2A_3}},$$

причому для внутрішньої точки X трикутника $A_1A_2A_3$ всі координати додатні, а коли точка X лежить зовні трикутника, то координати можуть мати різні знаки.

У підсумковій частині лекції варто запропонувати студентам придумати нові (свої) системи координат на площині і спробувати вибудувати їх теорію за аналогією з темами «Афінна система координат на площині» та «Барицентрична система координат на площині». При цьому варто пам'ятати, що така система заслуговує на увагу лише тоді, коли буде вказано коло важливих задач, які в даній системі координатній формі розв'язуються відносно просто. При у спішній роботі над даною темою можна було би на другому курсі виконати курсову роботу з даної теми.

На практичному занятті вважаємо за доцільним розв'язання наступних задач.

Запитання для самоконтролю та усні задачі. 1. Дати означення афінної системи координат на прямій та площині.

2. Відомо, що $M_1(-2)_R,\ M_2(4)_R,\ M_1(3)_R$. У якому відношенні точка *M* ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$?

3. Як виражається відстань між двома точками заданими своїми координатами в афінній системі координат $R=O\vec{e}_1$ на прямій?

4. В заданій афінній системі координат на прямій точки мають координати $A(5)$, $B(3)$, $C(-2)$. Яка з точок лежить між двома іншими?

5. Дати означення барицентричної системи координат на прямій.

6. Який фізичний зміст мають барицентричні координати точки M відрізка A_1A_2 в барицентричній системі координат $B=(A_1,\ A_2)$?

7. Який геометричний зміст мають барицентричні координати точки M відрізка A_1A_2 в барицентричній системі координат $B=(A_1,\ A_2)$?

8. Чи існує на прямій l, на якій задана барицентрична система координат $B=(A_1,\ A_2)$, точка з двома від'ємними координатами?

9. Перша координата точки A в заданій барицентричній системі координат дорівнює -3. Якою є друга координата цієї точки?

10. В барицентричній системі координат на прямій задано точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Відомо, що точка M ділить напрямний відрізок у відношенні λ. Які координати має точка M ?

11. Який фізичний зміст координат точки $M \in [A_1A_2]$ в барицентричній системі координат $B=(A_1,\, A_2)$?

12. В барицентричній системі координат $B=(A_1,\, A_2)$ $|A_1A_2|=3$. Задано точку $M\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)_B$. Знайти її координати у декартовій системі $R_0=A_1\vec{e_1}$, де $\vec{e_1}$ – орт вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$.

13. Чи належить точка $D(3;-2)_B$ відрізку AB, якщо $A(2;-1)_B$, $B(-3;4)_B$?

14. Знайдіть $\lambda=(AC,D)$, якщо $A(-7;8)_B$, $C(5;-4)_B$, $D(2;-1)_B$.

15. Яка точка має однакові координати в барицентричних системах $B=(A_1,\, A_2)$ і $B'=(A_2,\, A_1)$?

16. Точка A_0 є серединою відрізка $[A_1A_2]$. Які координати має точка A_2 в барицентричній системі координат $B=(A_0,\, A_1)$?

17. Відомо, що $|A_1A_2|=3$, $B=(A_1,\, A_2)$, $M_1(2,-1)$, $M_2(-1,2)$. Знайти довжину відрізка $[M_1M_2]$.

18. Яка з точок $M_1(3;2)_B$, $M_2(-3;4)_B$, $M_3(1;0)_B$ лежить між двома іншими?

19. Знайти координати середини відрізка C_1C_2 в барицентричній системі координат $B=(A_1,\, A_2)$, якщо відомо, що точки C_1 і C_2 здійснюють подвійний золотий поділ A_1A_2.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Відомо, що $A_1-C_1-C_2-A_2$, причому $|A_1C_1|=|C_1C_2|=|C_2A_2|$. Які барицентричні координати в системі $B=(A_1,A_2)$ мають точки C_1 і C_2?

2. Які координати в барицентричній системі координат $B=(A_1,A_2)$ має точка Z, яка здійснює золотий поділ напрямленого відрізка $\overline{A_2A_1}$?

3. В заданій барицентричній системі координат задано три точки $M_1(3;-2)$, $M_2(-1;2)$, $M_3\left(\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$. Яка з точок лежить між двома іншими?

4. Чи лежить точка $K(\pi,1-\pi)$ між точками $L\left(3;-\frac{8}{3}\right)$ і $P\left(-2;3\frac{2}{3}\right)$?

5. Дано матеріальні точки $M_1(\quad)$ і $M_2(\quad)$ з масами 2 і 3 відповідно. Чи є точка $M(\quad)$ центром мас системи матеріальних точок (M_1, M_2)?

6. Відомо, що точка M в барицентричній системі координат $B=(A_1, A_2)$ має координати $(0,7;0,3)$, які маси m_1, m_2 слід помістити в точки A_1 і A_2, щоб точка M була центром мас системи двох матеріальних точок (A_1, m_1), (A_2, m_2)?

7.Скільки існує на прямій l точок $M(u,v)$, координати яких в заданій барицентричній системі координат $B=(A_1, A_2)$ задовольняють умову $u = const$?

8. Множина Кантора C – множина дійсних чисел відрізка [0,1], які в трійковій системі числення записується за допомогою цифр 0 і 2 (без вживання цифри 1), тобто

$$C=\left\{x : x=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\ldots\frac{\alpha_n}{3^n}+\ldots, \alpha_n \in \{0,2\}\right\}.$$

Чим є множина точок X, барицентричні координати (u,v) яких в системі $B=(A_1, A_2)$ задовольняють умову $(u,v) \in C \times C$?

9. Які властивості має множина точок прямої

$$L=\left\{M(u,v)_B : u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{5^k},\ \alpha_k \in \{0,2,4\}\right\}?$$

10. Нехай $0 < s$ – фіксоване натуральне число. Описати властивості множини

$$G_V=\left\{M(u,v)_B : u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{s^k},\ \alpha_k \in V \subset \{0,1,2,\ldots,s-1\}\right\}?$$

11. Знайти барицентричні координати точок C_1 і C_2, які здійснюють подвійний золотий поділ відрізка $[A_1A_2]$ в системі $B=(A_1, A_2)$.

12. Знайти координати точки Z, яка здійснює золотий поділ напрямленого відрізка M_1M_2, де $M_1(-4;5)_B$, $M_2(5;-4)_B$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Які барицентричні координати в системі $B=(A_1, A_2, A_3)$ а) має точка перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$? б) середини сторін трикутника $A_1A_2A_3$?

2. Довести, що точка M тоді і тільки тоді належить межі трикутника $A_1A_2A_3$, тобто ламаній $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup [A_3A_1]$, коли хоча б одна з її барицентричних координат λ_1, λ_2, λ_3 в системі $B=(A_1, A_2, A_3)$ дорівнює нулю. Довести, що точка M є внутрішньою точкою $\Delta A_1A_2A_3$ тоді і тільки тоді, коли λ_1, λ_2, λ_3 додатні.

3. Де розміщені точки, у яких тільки одна з барицентричних координат від'ємна?

4. Точки $M \in [A_1A_2]$ і $N \in [A_2A_3]$ задано так, що $|A_1M| = \frac{1}{3}|A_1A_2|$; $|A_2N| = \frac{1}{3}|A_2A_3|$. Знайдіть барицентричні координати точки перетину відрізків A_1N і A_3M.

5. Через точку Q з ненульовими барицентричними координатами λ_1, λ_2, λ_3 проведено пряму A_1Q. а) При якій умові вона паралельна (A_2A_3)? б) Якщо цю умову не

виконано, то які барицентричні координати точки P перетину прямих A_1Q і A_2A_3? б) Чому дорівнює відношення $\dfrac{|A_1Q|}{|A_1P|}$?

6. Точка Q має барицентричні координати $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Знайдіть число k, яке задовольняє відношення $\overrightarrow{A_1Q} = k\overrightarrow{QA_2}$.

7. Які барицентричні координати відносно $\Delta A_1A_2A_3$ має четверта вершина і центр паралелограма $A_1A_2A_3A_4$?

8. Доведіть, що якщо точка P має барицентричні координати λ_1, λ_2, λ_3, а точка Q – барицентричні координати μ_1, μ_2, μ_3, то середина відрізка PQ має (відносно того ж базисного трикутника) барицентричні координати $\dfrac{\lambda_1+\mu_1}{2}$, $\dfrac{\lambda_2+\mu_2}{2}$, $\dfrac{\lambda_3+\mu_3}{2}$.

9. У точках $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ і $Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ розміщено маси p і q. Знайдіть барицентричні координати їх центра мас. Зробіть узагальнення на випадок довільної кількості мас.

10. На прямих A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 взято такі точки B_1, B_2, B_3, що $\overrightarrow{A_2B_1} = k\overrightarrow{B_1A_3}$, $\overrightarrow{A_3B_2} = l\overrightarrow{B_2A_1}$, $\overrightarrow{A_1B_3} = m\overrightarrow{B_3A_2}$. Доведіть, що якщо $k = l = m$, то трикутники $A_1A_2A_3$ і $B_1B_2B_3$ мають спільний центроїд. Чи правильне обернене твердження?

11. Доведіть, що якщо Q – внутрішня точка трикутника $A_1A_2A_3$, то її барицентричні координати дорівнюють $\dfrac{S_1}{S}$, $\dfrac{S_2}{S}$, $\dfrac{S_3}{S}$, де S_1, S_2, S_3 – площі трикутників QA_2A_3, QA_1A_3, QA_1A_2, $A_1A_2A_3$.

12. Знаючи довжини сторін базисного трикутника, знайдіть барицентричні координати центра кола, вписаного в цей трикутник.

13. На сторонах трикутника $A_1A_2A_3$ взято наступні точки M, N, P так, що $\overline{A_1M} = \dfrac{1}{2}\overline{MA_2}$, $\overline{A_2N} = \dfrac{1}{2}\overline{NA_3}$, $\overline{A_3P} = \dfrac{1}{2}\overline{PA_1}$. Визначити барицентричні координати вершин трикутника, утвореного прямими A_1N, A_2P, A_3M, і обчисліть його площу.

14. Три точки задані їх барицентричними координатами в деякому базисному трикутнику: $A(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)$, $B(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$, $P(x;y;z)$. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, якщо існують такі числа α і β, що задовольняють умову $\alpha + \beta = 1$, такі що $x = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1$, $y = \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2$, $z = \alpha\lambda_3 + \beta\mu_3$.

15. Доведіть, що довільна пряма може бути задана в барицентричних координатах рівнянням $ax + by + cz = 0$, в якому не всі коефіцієнти a, b, c однакові.

16. Доведіть, що якщо точки P і Q мають відносно базисного трикутника $A_1A_2A_3$ барицентричні координати λ_1, λ_2, λ_3 і μ_1, μ_2, μ_3, то

$$|PQ|^2 = -(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)|A_1A_2|^2 - (\lambda_1-\mu_1)(\lambda_3-\mu_3)|A_1A_3|^2 - (\lambda_2-\mu_2)(\lambda_3-\mu_3)|A_2A_3|^2.$$

17. Знаючи довжини сторін трикутника $A_1A_2A_3$, знайдіть відстань між центроїдом цього трикутника і центром його вписаного кола.

18. Доведіть, що точка $P(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)$ тоді і тільки тоді належить описаному колу базисного трикутника $A_1A_2A_3$, якщо виконується хоча б одна з наступних умов:

а) $\lambda_1|PA_1|^2+\lambda_2|PA_2|^2+\lambda_3|PA_3|^2=0$, б) $a^2\lambda_2\lambda_3+b^2\lambda_1\lambda_3+c^2\lambda_1\lambda_2=0$,

де $a=|A_2A_3|$, $b=|A_1A_3|$, $c=|A_1A_2|$ — довжини сторін базисного трикутника.

Список використаної літератури

1. Mobius A.F. Der barycentrische Calcul, в кн.: Gesammelte Werke, Bd. 1, Lpz., 1985.
2. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968 (Гл.XIV, §4).
3. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М: Наука, 1987. – 160 с. – (Библиотечка "Квант", Вып. 61).
4. Берже М. Геометрия. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.
5. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985. – 320 с.
6. Креш Л.Л, Працьовитий М.В. Барицентр та барицентрична система координату курсі «Аналітичної геометрії» для майбутніх викладачів математики // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – С. 60-61.
7. Любич Ю.И., Шор Л.А. Кинематический метод в геометрических задачах. Популярные лекции по математики, 42. – М.: Наука, 1976. – 52 с.
8. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. – 697с.
9. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 385 с.
10. Назаренко М., Колесник П. Барицентричні координати та їх застосування для обчислення площі многокутника та об'єму многогранника // Математика в школі, 2004, №. – С. 45-50.
11. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. – М. –Л.: Гостехиздат, 1947. – 143с.
12. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973. – 754 с. (гл.2, § 1, п.6).
13. Прасолов В.В. , Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. (Библиотека математического кружка, вып. 19).
14. Працьовитий М.В. Аналітична геометрія. Векторний простір. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 64 с.
15. Працьовитий М.В. Елементи векторної алгебри. Множення векторів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 116 с.
16. Працьовитий М.В. Метод координат на площині (афінна та прямокутна декартова системи координат). – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. — 40 с.
17. Працьовитий М.В., Креш Л.Л. Барицентрична система координат на прямій, в площині та просторі. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 60 с.
18. Спаньер Э. Алгебраическая топология. – М.: Мир. – 1971. – 677 с.