SWorld – *17-29 March 2015*
http://www.sworld.education/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/march-2015
MODERN DIRECTIONS OF THEORETICAL AND APPLIED RESEARCHES '2015
Статья / Педагогика, психология и социология - Теория и методика обучения, воспитания и образования

УДК 378

Кугай Н.В., Борисов Е.Н., Заика О.В.

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Глуховский национальный педагогический університет имени Александра Довженко, Сумская область, Глухов, Киево-Московская 24, 41400

Kugai N., Borisov E., Zaika O.

SOLUTION OF APPLIED PROBLEMS AS MEANS OF FORMATION OF METHODOLOGICAL COMPETENCE OF FUTURE TEACHERS MATHEMATICS

Hlukhivskiy National Pedagogical University Alexander Dovzhenko, Sumy region, Hluhiv, Kiev-Moscow 24, 41400

Аннотация. В статье рассмотрена одна из составляющих методологической компетентности будущих учителей математики. Проанализировано различные способы решения прикладных экстремальных задач. Приведено примеры решения таких задач. Обосновано возможность формирования у будущих учителей математики методологической компетентности посредством решения прикладных экстремальных задач.

Ключевые слова: методологическая компетентность, прикладные экстремальные задачи, будущий учитель математики.

Annotation. The article deals with one of the components of the methodological competence of future teachers of mathematics. Analyzed different ways of solving applied extreme tasks. The examples of solving such tasks. In article justified the possibility of the formation at the future teachers of mathematics methodological competence by solving applied extreme tasks.

Key words: *methodological competence, application extreme tasks, future teachers of mathematics.*

Вступление.

Переход мирового сообщества к информационному обществу, внедрение модели личностно-ориентированного учебно-воспитательного процесса как обновленной парадигмы образования выдвигает новые требования к выпускникам высших учебных заведений. За последнее время произошло немало изменений в школьной математике. Они касаются как содержания, так и цели обучения. В частности, к приоритетам развития школьного математического образования, помимо прочих, в Концепции математического образования отнесено отображение в школьном содержании математического образования, математики как деятельности **через методологические знания, методы и способы деятельности**. Решить такого рода проблемы привычными способами невозможно. Школа нуждается в учителях математики, обладающих методологической компетентностью.

Обзор литературы.

Различные подходы к понятию «методологическая компетентность» рассмотрены нами в статье [3]. Проанализировав эти подходы, мы пришли к выводу, что методологическая компетентность будущего учителя математики – это потенциальное свойство личности, проявляющееся в готовности и способности будущего учителя математики использовать методологические знания, умения и навыки для получения нового научного знания, для творческого осмысления собственного опыта, для проектирования учебно-познавательного процесса обучения математике в школе. В данной работе остановимся подробно на некоторых подходах к понятию «методологическая компетентность».

Анализируя различные толкования понятия «компетентность», «ключевая компетентность», С. Раков подчёркивает, что педагоги Австрии рассматривают методологическую компетентность как требование для развития предметной компетентности – понимание места каждой науки в системе знаний человечества, «способ существования каждой науки» – понимание диалектики получения новых теоретических знаний и их **использования на практике**, независимое оперирование предметными знаниями и их критическое осмысление с позиций практики и других наук [6].

С. Раков считает, что методологическая компетентность – это умение оценивать целесообразность использования математических методов для решения индивидуально и общественно значимых задач [6].

О. Бесова [1] подчеркивает, что методологическая компетентность предполагает знание принципов, методов, форм познания как в пределах специальности, так и в рамках научного поиска вообще, знание общенаучной методологии, сформированность мировоззрения, знания методов решения проблемных задач, способность к инновационной деятельности, интегрирует всю систему специально-научных, психологических, педагогических знаний и умений по вопросам построения преподавания математики и носит ярко выраженный прикладной характер.

Проблема реализации прикладной направленности всегда была и сейчас находится в поле зрения методистов, ученых, авторов учебников. Теоретическое обоснование ее существования и путей решения проведено в работах А. Александрова, Г. Бевза, А. Дубинчук, Н. Игнатенко, З. Слепкань, И. Антипова, А. Бекер, В. Болтнянского, М. Бугаевой, Ю. Колягина и др.

Входные данные и методы.

Одним из действенных и эффективных средств реализации прикладной направленности математики является использование в учебном процессе прикладных задач – задач, которые возникли в других отраслях, но для их решения используется математический аппарат.

О значимости прикладной направленности свидетельствуют результаты международного сравнительного мониторингового исследования качества естественно-математического образования TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) [7]. По результатам выполнения задач TIMSS 2007 за смысловыми доменами можно сделать вывод, что большинство украинских учащихся (около 70%) выполняют задачи традиционной формулировки, но не способны решить элементарные математические задачи в контексте повседневной жизни, использовать полученные знания в решении нестандартных задач, выстраивать собственные соображения. Было также обнаружено, что у большинства восьмиклассников не сформированы умения выполнять элементарное моделирование. Так, задачу на определение площади прямоугольника по размерам его сторон, если они заданы не числовыми значениями, а через буквенные выражения, выполнили 48,8% учащихся, а периметр квадрата по значению его площади определили только 28,6%. При решении задач, где использовались алгебраические модели, результаты были низкими, если условие формулировалось несколько необычно или если решение требовало больше, чем два шага.

Достаточно много прикладных задач сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения определенной величины. Такие задачи широко представлены в высшей и в элементарной математике. При этом, как правило, для их решения используется аппарат дифференциального исчисления. Однако задачи на поиск оптимального (экстремального) значения имеют давнюю историю и рассматривались задолго до появления дифференциального исчисления. Задачи на экстремум интересны еще и тем, что обычно имеют связь с природой, физикой, биологией, экономикой и т.д. [2]. Кроме того, такого рода задачи способствуют реализации межпредметных связей, которые, в свою очередь, влияют на формирование методологических знаний [4].

Каждая математическая дисциплина, в которой рассматриваются задачи на экстремум, вооружает студента, будущего учителя математики, своими методами решения таких задач. Так, в курсе математического анализа – это аппарат дифференциального исчисления, в курсе элементарной математики – выделение полного квадрата и т. д. В курсе методики обучения математике все эти методы анализируют, выделяют те из них, которые используются в школьном курсе математики.

Будущий учитель математики должен знать различные методы решения одной и той же задачи, уметь определять и обосновывать, какой из методов может (и должен быть) рассмотрен в основной школе, какой в старших классах, а какой необходимо рассмотреть в классах с углублённым изучением математики или вовремя подготовки к олимпиаде.

Цель статьи – проанализировать возможность формирования у будущих учителей математики одной из составляющей методологической компетентности – умения оценивать целесообразность использования математических методов при решении прикладных задач на наибольшее (наименьшее) значение в курсе элементарной математики.

Рассмотрим некоторые способы решения прикладных задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения. Заметим, что случай, когда задача сводится к нахождению наибольшего (наименьшего) значения квадратической функции, рассмотрен нами в статье [5].

Пример 1. Надо оградить два пастбища прямоугольной формы с общей стороной, чтобы сумма их площадей была равна S. Найдите наименьшую из возможных длин ограждения.

Решение. Пусть x – ширина ограждения, а y – ее длина. Тогда площадь будет $S = xy$, а периметр $P = 3x + 2y = 3x + \frac{2S}{x}$. Таким образом, искомый периметр является функцией от переменной x. Поиск минимума для такой функции без использования производной является сложной и нетипичной задачей для учащихся школы. Остановимся на этом более подробно. Преобразуем последнее равенство, умножив левую и правую части на x, в результате получим: $xP=3x^2+2S$ или $3x^2 - xP+2S=0$. Таким образом, имеем квадратное уравнение, в котором P является функцией (или параметром). Тогда данную задачу можно переформулировать: при каком наименьшем P полученное квадратное уравнение имеет решения? Запишем дискриминант квадратного уравнения $D = P^2 - 24S$. Проанализировав последнее равенство, приходим к выводу: из всех возможных (положительных) P наименьшее будет удовлетворять равенству $P^2 = 24S$ (при котором уравнение имеет действительные корни). Другими словами, параметр приобретает свое наименьшее значение, когда дискриминант равен нулю. Заметим, что именно в данном случае квадратное уравнение будет иметь единственное решение, что соответствует логическому содержанию задачи: если среди всех периметров ограждения существует наименьший, то он должен быть единственным! Итак, математическая формула для поиска наименьшего значения в этой задаче приобретает следующий вид $P^2 - 24S = 0$. Решив это уравнение относительно P, получим: $P = \sqrt{24S}$.

В общем случае, если задача сводится к поиску наибольшего или наименьшего значения функции вида

$$b(x) = ax + \frac{c}{x} \qquad (1),$$

то имеем такое равенство для нахождения экстремального значения соответствующего параметра (функции):

$$b^2 - 4ac = 0 \qquad (2).$$

Значение аргумента, при котором функция принимает свое экстремальное значение, будет $x = \frac{b}{2a}$.

Рассмотрим еще один способ решения задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения без использования производной. В основе этого способа лежит известное соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим, а именно:

$$x_1,\, x_2, \ldots, x_n \succ 0 \;\Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad (3).$$

Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Приведём решение предыдущей задачи, используя приведенное неравенство.

Решение. Пусть x – ширина ограждения, а y – ее длина. Тогда площадь $S = xy$, а периметр $P = 3x + 2y$. Запишем для этого случая неравенство (3):

$\sqrt{3x\cdot 2y}\le\frac{3x+2y}{2}$. Откуда $\sqrt{24xy}\le 3x+2y=P$. Тогда легко видеть, что наименьший периметр будет равен $P=\sqrt{24S}$.

Для сравнения решим эту же задачу, используя производную функции. Будем иметь: $P'(x)=3-\frac{2S}{x^2}$. Тогда $3-\frac{2S}{x^2}=0$, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{2S}{3}}$. Тогда наименьший периметр будет $P\left(\sqrt{\frac{2S}{3}}\right)=3\sqrt{\frac{2S}{3}}+\frac{2S}{\sqrt{\frac{2S}{3}}}=\sqrt{6S}+\sqrt{6S}=\sqrt{24S}.$ (Поскольку предполагается, что задача имеет решение, то обоснование того, что при найденном значении *x* функция принимает наименьшее значение, нами опущено). Таким образом, получили тот же результат, но в предыдущих способах сразу нашли наименьшую длину ограждения.

Целесообразно рассмотреть решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения на занятиях по элементарной математике. Причем студенты должны не только решить задачи разными способами, но и обосновать: а) целесообразность использования того или иного способа, б) каждый шаг в решении (в том числе, и при использовании дифференциального исчисления), в) возможность ознакомления учащихся с различными способами решения такого типа задач.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Участок прямоугольной формы имеет площадь 225 м^2. Какое наименьшее количество материала нужно использовать (в метрах), чтобы оградить этот участок?

Решение: 1-ый способ. Обозначим ширину и длину участка через x, y. Тогда $x\cdot y=225$, периметр $b=2(x+y)$, или $b=2(x+\frac{225}{x})$. Соответственно с (1), $a=2,\ c=450$. Тогда в соответствии с формулой (2) наименьший периметр будет $b=\sqrt{4ac}=\sqrt{4\cdot 2\cdot 450}=60$ м.

2-ой способ. Используя неравенство (3) запишем $\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x+y}{2}$. Подставив числовое значение, получим $2\sqrt{225} \le x + y = \frac{P}{2}$. Тогда наименьшее количество материала будет равно $P = 60$ м. При этом равенство выполняется, когда $x = y$, то есть участок будет иметь форму квадрата.

Пример 3. Имеется забор длиною 20 м. Какой наибольший по площади участок прямоугольной формы можно оградить этим забором?

Решение: 1-ый способ. Обозначим ширину и длину участка соответственно через x, y. Тогда $x + y = 10$, $S = x \cdot y = x(10 - x)$, откуда $S = -x^2 + 10x$, или $x^2 - 10x + S = 0$.Исходя из логического рассуждения, в задаче существует единственное решение. Тогда, это уравнение имеет единственный действительный (двукратный) корень при условии $D = 100 - 4S = 0$. Отсюда, согласно формуле (2), наибольшая площадь будет $S = 25\ м^2$.

2-ой способ. Используя неравенство (3), имеем $\sqrt{2x \cdot 2y} \le \frac{2x+2y}{2} = 10$. Тогда $2\sqrt{S} \le 10$, и наибольший по площади участок имеет форму квадрата ($x = y$) и его площадь $S = 25 м^2$.

Пример 4. Участок прямоугольной формы одной стороной прилегает к стене. Какую наибольшую площадь можно оградить забором, длина которого 10 м?

Решение: 1-ый способ. Обозначим ширину и длину участка через x, y. Тогда длина забора будет $2x + y = 10$, а площадь участка $S = x \cdot y = x(10 - 2x)$ или $S = -2x^2 + 10x$, тогда $2x^2 - 10x + S = 0$. Имеем $D = 100 - 8S = 0$. Отсюда, согласно формуле (2), наибольшая площадь будет $S = 12{,}5\ м^2$.

2-ой способ. В данном случае имеем: $2x + y = 10$, и $\sqrt{2x \cdot y} \le \frac{2x+y}{2} = 5$. Тогда $\sqrt{2S} \le 5$, и наибольший по площади участок имеет форму прямоугольника ($2x = y$) и будет равен $S = 12{,}5 м^2$.

Так как решению задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции с помощью дифференциального исчисления уделяется достаточно много времени на занятиях по математическому анализу, то целесообразно предложить решить студентам приведённые задачи этим методом самостоятельно.

Ниже представим решение еще двух задач, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (решение двумя другими способами.

Пример 5. Производитель планирует разливать молоко в пакеты, которые имеют форму параллелепипеда объемом 1 литр. Необходимо определить размеры пакета, при которых на производство самих пакетов будет использовано наименьшее количество материала, причем известно, что ширина основания в два раза меньше чем длина основания.

Решение: В данном случае воспользуемся неравенством (3), предварительно записав: $V = 2x \cdot x \cdot h = 1$, откуда $x^2 \cdot h = \frac{1}{2}$. Полная площадь поверхности пакета:

$$S = 2(2xh + x \cdot h + 2x^2) = 4x^2 + 3xh + 3xh \geq 3\sqrt[3]{4x^2 \cdot 3xh \cdot 3xh} =$$

$$3\sqrt[3]{36 \cdot (x^2h)^2} = 3\sqrt[3]{36 \cdot \frac{1}{4}} = 3\sqrt[3]{9}\ \partial ц^2.$$

При этом равенство имеет место только тогда, когда $4x^2 = 3xh$. Отсюда $h = \frac{4}{3}x$. Подставляя в равенство $x^2 \cdot h = \frac{1}{2}$, получим такие размеры пакета:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\ \partial ц.$$

Пример 6. Найти такие размеры открытого бассейна объемом 54 $м^3$ с квадратным дном, чтобы на его облицовку было использовано наименьшее количество плитки.

Решение: По аналогии с предыдущей задачей имеем: $V = x \cdot x \cdot h = 54$. Площадь поверхности открытого бассейна:

$$S = 4xh + x^2 = x^2 + 2xh + 2xh \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot 2xh \cdot 2xh} = 3\sqrt[3]{4(x^2h)^2} = 3\sqrt[3]{4 \cdot 54^2} = 54\sqrt[3]{2}\ м^2.$$

При этом равенство имеет место только тогда, когда $x^2 = 2xh$. Отсюда $h = \frac{x}{2}$.

Подставляя в равенство $x^2 \cdot h = 54$, получим такие размеры бассейна:

$$x = 3\sqrt[3]{4},\ h = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\ м.$$

Заключение и выводы.

Таким образом, использование различных способов решения прикладных задач, реализация межпредметных связей могут быть тем основанием, которое позволит не только активизировать познавательную деятельность студентов, но и способствовать формированию методологической компетентности будущего учителя математики. Рассмотренные задачи могут быть использованы не только на занятиях по элементарной математике, но и при проведении уроков, на внеклассных занятиях и в процессе подготовки к тестам внешнего независимого оценивания, экзаменам.

Литература:

1. Бєсова О. Г. До питання структури професійної компетентності майбутнього вчителя математики / О. Г. Бєсова // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Педагогіка і психологія. – 2013. – Вип. 39(3). – С. 45-49. – Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/j-pdf/pspo_2013_39(3)__10.pdf

2. Борисов Е. Н. Исследуем способы решения задач на экстремум / Е. Н. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в современной школе – 2013. – № 9. – С. 21-26.

3. Кугай Н. В. До питання про методологічну компетентність майбутнього вчителя математики / Н. В. Кугай // Молодь і ринок. – 2014. – № 11 (118). – С. 165-168.

4. Кугай Н. В. Методологічні знання та міжпредметні зв’язки / Н. В. Кугай, Л. Ф. Сухойваненко // Sciencean dEducation a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.

5. Кугай Н. В. Взаємозв'язки між вищою та елементарною математикою у задачах / Н. В. Кугай, Л. Ф. Щасна // Математика в сучасній школі. – 2012. – №9. – С. 10-14.

6. Раков С. А. Математична освіта : компетентнісний підхід з використанням ІКТ [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

7. TIMSS 2007. Часть 1. Результаты исследования на национальном уровне. – К. : Издательская группа BHV, 2010. – С.81-110.

Стаття відправлена 04.02.2015