Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2).— С. 119–130.

Властивості розподілів випадкових величин з марківськими Q-символами

А. Г. Іванишин[1], О. В. Іванишин[1], Г. М. Торбін[2]
([1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
[2] Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена дослідженню лебегівської структури розподілів випадкових величин з марківськими Q-символами. Основний результат статті дає загальні необхідні і достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілів випадкових величин з марківськими Q_s-символами. Доведено, що випадкові величини з марківськими Q_2-символами мають чисті типи розподілів; знайдено необхідні і достатні умови належності до кожного з них. Показано, що при $s > 2$ випадкові величини з марківськими Q_2-символами можуть бути або чисто абсолютно неперервними, або чисто сингулярними. У випадку сингулярності розподіл може бути або чисто дискретний, або чисто сингулярно неперервний, або бути їх сумішшю. Запропонований у роботі підхід також може бути використаним при дослідженні лебегівської структури розподілів випадкових величин з марківськими Q_∞-символами.

Ключові слова: ланцюги Маркова, Q-зображення дійсних чисел, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, абсолютно неперервні ймовірнісні міри, ергодична теорема, асимптотична частота символів.

Abstract. The paper is devoted to the study of Lebesgue structure of distributions of random variables with markovian Q-symbols. The main results gives general necessary and sufficient conditions for absolute continuity resp. singularity of distributions of random variables with markovian Q_s-symbols. We proved that random variables with markovian Q_2-symbols are of pure Lebesgue type. Corresponding necessary and sufficient conditions are found. We also show that for $s > 2$ the random variables with markovian Q_s-symbols have either pure absolute continuous distributions or pure singular distributions. In the case of singularity all following situations are possible: discrete case, singularly continuous case, mixture of discreteness and singular continuity. Our approach is also applicable for the study of Lebesgue structure of distributions of random variables with markovian Q_∞-symbols.

Key words: Markov chains,Q-expansion of real numbers, singularly continuous probability measures, absolutely continuous probability measures, ergodic theorem, asymptotic frequency of symbols.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 60G10, 60G30.

1. Q-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Нагадаємо поняття Q-розкладу дійсних чисел ([24]) та декілька альтернативних підходів до його означення. Нехай $Q = (q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ – стохастичний вектор з додатними координатами. При фіксованому векторі Q здійснюється зліченна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо $[0,1]$ (зліва направо) на s відрізків $\Delta^Q_{i_1}$, $i_1 \in \{0, 1, ..., s-1\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^Q_{i_1}\right| = q_{i_1}$,

$$[0,1] = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \Delta^Q_{i_1}.$$

Кожен з $\Delta^Q_{i_1}$ називається циліндром 1-го рангу Q-розкладу.

Крок $k \geq 2$. Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо) на s відрізків $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ (без спільних внутрішніх точок)

$$\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=0}^{s-1} \Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

довжини яких

$$\left|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_k} = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j} \tag{1}$$

відносяться як

$$\left|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 0}\right| : \left|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1}\right| : \cdots : \left|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}(s-1)}\right| = q_0 : q_1 : \cdots : q_{s-1} \qquad .$$

Кожен з $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ називається циліндром k-го рангу Q-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in \{0, 1, ..., s-1\}$, існує послідовність таких вкладених циліндрів

$$\Delta^Q_{i_1} \supset \ \Delta^Q_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \cdots,$$

що $|\Delta^Q_{i_1 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка $x \in [0,1]$, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^Q_{i_1}$, $\Delta^Q_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для кожної точки $x \in [0,1]$ існує послідовність вкладених циліндрів $\Delta^Q_{i_1(x)} \supset \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}.$$

Останній вираз називається Q–представленням (розкладом, зображенням) точки x. Основи метричної та ймовірнісної теорії Q-представлень розвивались М.В.Працьовитим ([20, 24]), де і було вперше вжито термін Q-представлення. Відзначимо, що Q-розклад дійсних чисел є частковим випадком так званих f-розкладів (метрична та ергодична теорія f-розкладів розвинута в роботах А. Реньї (див., наприклад, [7, 21])), і породжується наступною строго зростаючою неперервною функцією f, яка визначена на $[0, s]$ умовами: $f(0) = 0$ і f зростає лінійно на кожному відрізку $[n, n+1]$ з $f(n+1) - f(n) = q_n, \forall n \in \{0, 1, ..., s-1\}$.

Зауважимо також, що Q-розклад можна означити за допомогою систем ітеруючих функцій (IFS, див. [10]). Справді, розглянемо систему ітеруючих функцій, що породжується наступною системою стискуючих перетворень подібності:

$$F_0(x) = q_0 \cdot x, F_i(x) = q_i \cdot x + (q_0 + ... + q_{i-1}), \quad \forall i \in \{0, 1, ..., s-1\}.$$

Очевидно, що множина $[0, 1]$ є інваріантною відносно даної IFS, оскільки $[0, 1] = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} F_i([0, 1))$. При цьому для вищеозначених циліндрів Q-розкладу має місце рівність: $\Delta^Q_{i_1 i_2 ... i_k} = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ ... \circ F_{i_k}([0, 1])$. Тому для довільного $x \in [0, 1]$ існує послідовність $(i_1(x), i_2(x), ..., i_k(x), ...) \in \{0, 1, ..., s-1\}^\infty$ така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ ... \circ F_{i_k}([0, 1]) = \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) ... i_k(x) ...}.$$

Нормальні властивості дійсних чисел (тобто властивості, якими володіють майже всі (відносно міри Лебега) дійсні числа) з $[0, 1]$, які можуть бути сформульованими в термінах їх Q-розкладів, досліджувалась в [24, 20]. Зокрема, має місце наступна лема.

Лема 1. *([24, 20]) Q-зображення майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка містить цифру i з алфавіту $A = \{0, 1, ..., s-1\}$ з асимптотичною частотою q_i.*

2. Про сингулярність та абсолютну неперервність розподілів випадкових величин з незалежними та марківськими Q-символами.

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, ..., s-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(s-1)k}$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} = 1$, $\forall k \in N$. Розглянемо випадкову величину

$$\xi := \Delta^Q_{\xi_1 \xi_2 ... \xi_k ...} ,$$

яка називається випадковою величиною з незалежними Q-цифрами. Ймовірнісний розподіл μ_ξ визначається стохастичним вектором Q та матрицею $P = ||p_{ik}||$, і може бути побудований наступним чином. Нехай

$$\Omega_k = \{0, 1, ..., s-1\}, \mathcal{F}_k = 2^{\Omega_k}, \mu_k(i) = p_{ik},$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \prod_{i=1}^{\infty} (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$$

і нехай $f : \Omega \to [0, 1]$ — вимірне відображення, яке означається для довільного елемента $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...) \in \Omega$ через

$$f(\omega) = \Delta^Q_{\omega_1 \omega_2 ... \omega_i ...}.$$

Для довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$ означимо образ-міру

$$\mu^* \ : \quad \mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

де

$$f^{-1}(E) = \{\omega : \quad \omega \in \Omega, \quad f(\omega) \in E\}.$$

Тоді міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою μ_ξ.

Якщо ми означимо дискретні міри λ_k через $\lambda_k(i) = q_i$, $\forall k \in N \cup \{0\}$, і розглянемо $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \lambda_k)$, то міра $\lambda^* = \lambda(f^{-1})$ співпаде з мірою Лебега на $[0,1]$.

Лебегівська структура та фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q-символами вивчалась в роботах [1, 2, 20].

Як відомо ([1]), випадкова величина ξ має розподіл чистого типу, причому

1) μ_ξ є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{s-1}\sqrt{p_{ik}\cdot q_i}\right\} > 0; \tag{2}$$

2) μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} := \prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\} > 0; \tag{3}$$

3) μ_ξ є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = 0 = P_{max}. \tag{4}$$

Основним завданням даної роботи є дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини $\xi := \Delta^Q_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, для випадку коли послідовність випадкових величин ξ_k утворює однорідний ланцюг Маркова.

Окремі властивості розподілу даної випадкової величини (у випадку канторовості розподілу) вивчались в роботах [18, 19].

У випадку марківської залежності розподіл випадкової величини ξ не є, взагалі кажучи, чистим. У якості прикладу можна вибрати розподіл випадкової величини з марківськими Q_3-символами, для якої вектор початкових ймовірностей має вигляд

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}),$$

а матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

У цьому випадку розподіл має єдиний атом вагою $\frac{1}{3}$ у точці 0 і сингулярно неперервно розподілена на множині

$$C[Q,V] = \{x : \ x = \Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \alpha_k(x) \in V = \{1,2\}\}.$$

У той же час розподіли випадкових величин з марківськими Q_2-символами завжди мають чистий лебегівський тип (це випливає з двох наступних теорем, перша з яких дає необхідні і достатні умови дискретності та неперервності розподілів випадкових величин з марківськими Q_2-символами).

Теорема 1. *Нехай* $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ *- випадкова величина з марківськими* Q_2*-символами, початковий розподіл яких задається стохастичним вектором* (p_0, p_1) *з додатними координатами. Тоді розподіл випадкової величини* ξ *є або чисто дискретним, або чисто неперервним. Причому неперервність має місце лише в наступних випадках:*

1) всі елементи матриці перехідних ймовірностей

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

є додатними;

2) матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

причому

$$p_{10} \cdot p_{11} > 0;$$

3) матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причому

$$p_{00} \cdot p_{01} > 0.$$

Доведення. Оскільки випадкові величини ξ_k утворюють однорідний ланцюг Маркова, то для довільної Q_2-ірраціональної точки $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ має місце рівність:

$$P\{\xi = x\} = p_{\alpha_1(x)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)}; \tag{5}$$

якщо ж точка x є Q_2-раціональною і має два різні представлення:

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} = \Delta^{Q_2}_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_k(x)\ldots},$$

то

$$P\{\xi = x\} = p_{\alpha_1(x)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)} + p_{\beta_1(x)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{\beta_j(x)\beta_{j+1}(x)}. \tag{6}$$

Для доведення теореми розглянемо можливі варіанти матриці перехідних ймовірностей.

1. Якщо $p_{ij} > 0, \forall i, j \in \{0, 1\}$, то з (5) та (6) випливає, що $P\{\xi = x\} = 0, \forall x \in [0, 1]$, що еквівалентно неперервності розподілу випадкової величини ξ.

2. Розглянемо випадок, коли $p_{00} = 1$. При цьому можливі такі підвипадки.

2.1. Якщо $p_{11} = 1$, то ξ має два атоми: в точках 0 та 1 вагою p_0 та p_1 відповідно. Отже, ξ має чисто дискретний розподіл.

2.2. Якщо $p_{10} = 1$, то ξ має два атоми: в точках 0 та $\Delta^{Q_2}_{1(0)}$ вагою p_0 та p_1 відповідно. Отже, ξ має чисто дискретний розподіл.

2.3. Якщо $p_{10} \cdot p_{11} > 0$, то ξ має зліченну кількість атомів у точках

$$\Delta^{Q_2}_{(0)}, \Delta^{Q_2}_{1(0)}, \Delta^{Q_2}_{11(0)}, \Delta^{Q_2}_{111(0)}, \Delta^{Q_2}_{1111(0)}, \dots .$$

Вага цих атомів дорівнює

$$p_0, p_1p_{10}, p_1p_{11}p_{10}, p_1(p_{11})^2p_{10}, p_1(p_{11})^3p_{10}, \dots$$

відповідно. Оскільки сума ваг вказаних атомів розподілу дорівнює 1, то ξ має чисто дискретний розподіл.

3. Розглянемо випадок, коли $p_{01} = 1$. При цьому можливі такі підвипадки.

3.1. Якщо $p_{11} = 1$, то ξ має два атоми: в точках $\Delta^{Q_2}_{0(1)}$ та $\Delta^{Q_2}_{(1)}$ вагою p_0 та p_1 відповідно. Отже, ξ має чисто дискретний розподіл.

3.2. Якщо $p_{10} = 1$, то ξ має два атоми: в точках $\Delta^{Q_2}_{(01)}$ та $\Delta^{Q_2}_{(10)}$ вагою p_0 та p_1 відповідно. Отже, ξ має чисто дискретний розподіл.

3.3. Якщо $p_{10} \cdot p_{11} > 0$, то ξ має чисто неперервний розподіл. Справді, у цьому випадку для довільної послідовності символів $\{\alpha_j\}$ нескінченний добуток $p_{\alpha_1} \prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j\alpha_{j+1}}$ розбігається до нуля, оскільки після кожної можливої одиниці у цьому добутку повинен стояти множник, який не перевищує числа $\max\{p_{10}, p_{11}\} < 1$.

4. Розглянемо випадок, коли $p_{11} = 1$. При цьому можливі такі підвипадки.

4.1. Якщо $p_{00} = 1$, то отримуємо підвипадок 2.1.

4.2. Якщо $p_{01} = 1$, то отримуємо підвипадок 3.1.

4.3. Якщо $p_{00} \cdot p_{01} > 0$, то ξ має зліченну кількість атомів у точках

$$\Delta^{Q_2}_{(1)}, \Delta^{Q_2}_{0(1)}, \Delta^{Q_2}_{00(1)}, \Delta^{Q_2}_{000(1)}, \Delta^{Q_2}_{0000(1)}, \dots .$$

Вага цих атомів дорівнює

$$p_1, p_0p_{01}, p_0p_{00}p_{01}, p_0(p_{00})^2p_{01}, p_0(p_{00})^3p_{01}, \dots$$

відповідно. Оскільки сума ваг вказаних атомів розподілу дорівнює 1, то ξ має чисто дискретний розподіл.

5. Розглянемо випадок, коли $p_{10} = 1$. При цьому можливі такі підвипадки.

5.1. Якщо $p_{00} = 1$, то отримуємо підвипадок 2.2.

5.2. Якщо $p_{01} = 1$, то отримуємо підвипадок 3.2.

5.3. Якщо $p_{00} \cdot p_{01} > 0$, то ξ має чисто неперервний розподіл. Справді, у цьому випадку для довільної послідовності символів $\{\alpha_j\}$ нескінченний добуток $p_{\alpha_1} \prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j\alpha_{j+1}}$ розбігається до нуля, оскільки після кожної можливої одиниці у цьому добутку повинен стояти множник, який не перевищує числа $\max\{p_{00}, p_{01}\} < 1$. $\square$

Наступна теорема дає загальні необхідні і достатні умови абсолютної неперервності розподілу випадкової величини з марківськими Q_s-символами і показує, що суміш абсолютно неперервного розподілу та дискретного розподілу є неможливою.

Теорема 2. *Нехай $s \in N, s > 1$, а $\{\xi_n\}$ — послідовність випадкових величин, які набувають значень з множини $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_0, p_1, \ldots p_{s-1}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P^* = \|p_{ij}\|$.*

Тоді розподіл випадкової величини

$$\xi := \Delta^Q_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} ,$$

є абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$p_{ij} = q_j, \forall i \in A, \forall j \in A. \tag{7}$$

У всіх інших випадках міра μ_ξ сингулярна відносно міри Лебега (включаючи дискретний випадок).

Доведення. Якщо $p_{ij} = q_i, \forall i \in A, \forall j \in A$, то абсолютна неперервність розподілу в.в. ξ є очевидною. Справді, у цьому випадку ξ має рівномірний розподіл на кожному з циліндрів першого рангу Q-зображення і відповідна функція розподілу є лінійною з кутовим коефіцієнтом $\frac{p_i}{q_i}$ на кожному циліндричному відрізку $\Delta^Q_i,\ i \in A$.

Покажемо, що при невиконанні умови (7) розподіл в.в. ξ буде сингулярним відносно міри Лебега (включаючи дискретний випадок).

Як відомо, кожна функція розподілу диференційовна майже скрізь (в сенсі міри Лебега).

Позначимо $D = \{x : x \in [0,1] \wedge F'(x)$ існує і скінченна$\}$. Тоді $\lambda(D) = 1$.

Якщо в точці x_0 існує похідна $F'(x_0)$, то $F'(x_0)$ можна знайти не лише як границю $\lim\limits_{\triangle x \to\ 0} \frac{F(x_0+\triangle x)-F(x_0)}{\triangle x}$, але і наступним чином:

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n},$$

де $\{[a_n, b_n]\}$ — послідовність вкладених циліндрів Q-зображення

$$\Delta^Q_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)} =: \triangle_n(x_0),$$

які стягуються в точку x_0, тобто

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

де $\alpha_k(x_0)$ — символи Q-зображення числа x_0.

Очевидно, що $|\triangle_n(x)| = |b_n - a_n| = \prod\limits_{k=1}^{n} q_{\alpha_k(x_0)}$, і

$$\begin{gathered}
F(a_n) - F(b_n) = P\{\xi \in \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)..\alpha_n(x)}\} = \\
= P\{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 = \alpha_2(x) \wedge \cdots \wedge \xi_n = \alpha_n(x)\} = \\
= P\{\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\xi_2 = \alpha_2(x)/\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot \\
\cdot P\{\xi_3 = \alpha_3(x)/\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 = \alpha_2(x)\} \cdot \ldots \\
\cdot P\{\xi_n = \alpha_n(x)/\xi_1 = \alpha_1(x), \ldots, \xi_{n-1} = \alpha_{n-1}(x)\}.
\end{gathered}$$

Оскільки $\{\xi_k\}$ утворюють однорідний ланцюг Маркова, то

$$F(a_n) - F(b_n) = p_{\alpha_1(x)} \cdot p_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{n-1}(x)\alpha_n(x)}.$$

Отже, якщо $x_0 \in D$, то

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{\alpha_1(x_0)} p_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{n-1}(x_0)\alpha_n(x_0)}}{\prod\limits_{k=1}^{n} q_{\alpha_k(x_0)}} = \tag{8}$$

$$= \frac{p_{\alpha_1}(x_0)}{q_{\alpha_1(x_0)}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_k(x_0)\alpha_{k+1}(x_0)}}{q_{\alpha_{k+1}(x_0)}}.$$

Нехай $N_i(x,k,Q)$ — кількість символів «i» в Q-зображенні числа x до k-го місця включно. Якщо границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k,Q)}{k}$ існує, то її значення називають частотою символа «i» в Q-зображенні числа x. З леми 1 випливає, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільного символу $i \in A$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k,Q)}{k} = q_i, \forall i \in A. \tag{9}$$

Позначимо тепер $N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k,Q)$ — кількість разів, скільки пара $(\gamma_1\gamma_2) \in A^2$ зустрічається серед членів послідовності

$$(\alpha_1(x), \alpha_2(x)), (\alpha_2(x), \alpha_3(x)), \ldots, (\alpha_{k-1}(x), \alpha_k(x)),$$

тобто кількість разів, скільки пара $(\gamma_1\gamma_2)$ зустрічається серед перших k символів Q-зображення числа x.

Доведемо, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільної пари $(\gamma_1\gamma_2) \in A^2$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k)}{k} = q_{\gamma_1} q_{\gamma_2}, \forall (\gamma_1\gamma_2) \in A^2. \tag{10}$$

Нехай T — перетворення одностороннього зсуву по Q-зображенню, тобто

$$Tx = T(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Очевидно, що міра Лебега є інваріантною і ергодичною відносно T. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \neq (\gamma_1, \gamma_2), \\ 1, & \text{якщо} \quad (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\gamma_1, \gamma_2). \end{cases}$$

Очевидно, що $f(x)$ інтегровна за Лебегом на $[0,1]$ і

$$\int_0^1 f(x) d\lambda(x) = \int_{\Delta_{\gamma_1\gamma_2}} 1 dx = |\Delta^Q_{\gamma_1\gamma_2}| = q_{\gamma_1} q_{\gamma_2}, \forall (\gamma_1\gamma_2) \in A^2.$$

Тому (за ергодичною теоремою Біркгофа–Хінчина):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{k-1}(x))}{k} = \int_0^1 f(x) dx$$

для λ-майже всіх $x \in [0,1]$.

Оскільки
$$f(x)+\dots+f(T^{k-1}(x))=N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k,Q)$$
і
$$\int\limits_0^1 f(x)dx=q_{\gamma_1}q_{\gamma_2},$$
то для λ-майже всіх $x\in[0,1]$ і $\forall(\gamma_1\gamma_2)\in A^2$ має місце рівність
$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k,Q)}{k}=q_{\gamma_1}q_{\gamma_2}.$$

Позначимо через $B(Q)$ множину тих $x\in[0,1]$, для яких виконується умова (10). Тоді $\lambda(B)=1$.

Для довільного $x_0\in D\cap B(Q)$ маємо:
$$F'(x_0)=\lim_{k\to\infty}\left[(\prod_{j=1}^k q_{\alpha_j(x_0)})\cdot p_{\alpha_1(x_0)}\cdot p_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)}\cdot\dots\cdot p_{\alpha_{k-1}(x_0)\alpha_k(x_0)}\right]=$$
$$=\frac{p_{\alpha_1(x_0)}}{q_{\alpha_1(x_0)}}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{p_{\alpha_k(x_0)\alpha_{k+1}(x_0)}}{q_{\alpha_{k+1}(x_0)}}$$
$$\frac{p_{\alpha_1(x_0)}}{q_{\alpha_1(x_0)}}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1}p_{ij}^{N_{(i,j)}(x,k,Q)}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1}q_i^{N_i(x,k,Q)}}=$$
$$\frac{p_{\alpha_1(x_0)}}{q_{\alpha_1(x_0)}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1}p_{ij}^{\frac{N_{(i,j)}(x,k,Q)}{k}}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1}q_i^{\frac{N_i(x,k,Q)}{k}}}\right)^k.$$

Оскільки для λ-майже всіх $x\in[0,1]$ мають місце рівності
$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_{(i,j)}(x,k,Q)}{k}=q_iq_j,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k,Q)}{k}=q_i,$$
то для λ-майже всіх $x_0\in[0,1]$ маємо
$$F'(x_0)=\frac{p_{\alpha_1(x_0)}}{q_{\alpha_1(x_0)}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1}p_{ij}^{q_iq_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1}q_i^{q_i}}\right)^k.$$

Лема 2. *Нехай $Q=(q_0,q_1,\dots,q_{s-1})$ — стохастичний вектор з додатними координатами. Тоді для довільного стохастичного вектора $P=(p_0,p_1,\dots,p_{s-1})$ має місце нерівність*
$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1}p_{ij}^{q_iq_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1}q_i^{q_i}}\le 1,$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$p_{ij} = q_j, \forall i \in \{0, 1, ..., s-1\}, \forall j \in \{0, 1, ..., s-1\}.$$

Доведення. Для доведення цієї леми, скористаємось нерівністю Гіббса (див. [17]).

Нерівність Гіббса: *нехай* $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ *— стохастичний вектор з додатними координатами. Тоді для довільного стохастичного вектора* $P = (p_0, p_1, \ldots, p_{s-1})$ *має місце нерівність*

$$-\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i \le -\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln q_i, \tag{11}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., s-1\}$.
З нерівності (11) випливає, що

$$\sum_{i=0}^{s-1} \ln p_i^{p_i} \ge \sum_{i=0}^{s-1} \ln q_i^{p_i}, \tag{12}$$

і, отже,

$$\prod_{i=0}^{s-1} p_i^{p_i} \ge \prod_{i=0}^{s-1} q_i^{p_i}. \tag{13}$$

Тому

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1} p_i^{p_i}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{p_i}} \ge 1, \tag{14}$$

причому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., s-1\}$. (інший спосіб доведення нерівності (14) можна знайти в [20]).

Представимо вираз

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_i q_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{q_i}}$$

у наступному вигляді:

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_i q_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{q_i}} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_i q_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{q_i\cdot(q_0+q_1+\ldots)}} =$$

$$\left(\frac{\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{0j}^{q_j}}{\prod\limits_{j=0}^{s-1} q_j^{q_j}}\right)^{q_0} \cdot \left(\frac{\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{1j}^{q_j}}{\prod\limits_{j=0}^{s-1} q_j^{q_j}}\right)^{q_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_j}}{\prod\limits_{j=0}^{s-1} q_j^{q_j}}\right)^{q_i} \cdot \ldots .$$

З (14) випливає, що вирази у кожній з дужок не перевищують 1, причому рівність

$$\frac{\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_j}}{\prod\limits_{j=0}^{s-1} q_j^{q_j}} = 1$$

можлива тоді і тільки тоді, коли

$$p_{ij} = q_j,\ \forall j \in \{0, 1, ..., s-1\},\ \forall i \in \{0, 1, ..., s-1\}.$$

Отже, у випадку порушення умови (7) має місце строга нерівність

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_i q_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{q_i}} < 1.$$

Тому

$$F'(x_0) = \frac{p_{\alpha_1(x_0)}}{q_{\alpha_1(x_0)}} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\prod\limits_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{q_i q_j}}{\prod\limits_{i=0}^{s-1} q_i^{q_i}} \right)^k = 0$$

для λ-майже всіх $x_0 \in [0, 1]$, що і означає сингулярність розподілу в.в. ξ.

□

Наслідок 1. *Випадкова величина з марківськими Q_2-сиволами має або чисто дискретний розподіл, або чисто сингулярно неперервний розподіл, або чисто абсолютно неперервний розподіл.*

При $s > 2$ випадкова величина з марківськими Q_s-сиволами має або чисто абсолютно неперервний розподіл, або чисто сингулярний розподіл. У випадку сингулярності розподіл може бути або чисто дискретним, абоо чисто сингулярно неперервним, або сумішшю чисто дискретного та чисто сингулярно неперервного розподілів.

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування"(МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

Література

[1] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols. // Methods of Functional Analysis and Topology.— 2011.— **17**, no. 2.— P. 97 – 111.

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular continuous probability distributions with independent Q^*-digits. // Bull. Sci. Math.— 2005.— **129**, no. 4.— P. 356–367.

[3] *Биллингслей.П.* Эргодическая теория и информация. - М.: Мир, 1969. - 240с.

[4] *Brown A.* An elementary example of a continuous singular function. // Amer. Math. Monthly.— 1969.— **76**, no. 3.— P. 295–297.

[5] *Chatterji S. D.* Certain induced measures on the unit interval. // J. London Math. Soc.— 1963.— **38**.— P. 325–331.

[6] *Chatterji S. D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports" // Z.Wahrscheinlichkeitstheorie.— 1964.— **3**.—P. 184–192.

[7] *Everett C.I.* Representations for real numbers. // Bull. Amer. math. Soc. —1946.— **52**. — P. 861 – 869.

[8] *Harris T. E.* On chains of infinite order. //Pacific J. Math.— 1955.— **5**.— P. 707–724.

[9] *Hellinger E.* Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen. (Dissertation), Göttingen, 1907.

[10] *Hutchinson J. E.* Fractals and self similarity. // Indiana Univ. Math. J. — 1981. – **30**. —P. 713 – 747.

[11] *Іванишин О.В., Торбін А.Г.* Про лебегівську структуру розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами. // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. — № 13(2). – С. 61-68.

[12] *Kakutani S.*, Equivalence of infinite product measures. //Ann. of Math.—1948. — **49**. —P. 214-224.

[13] *Kinney J. R.* Singular functions associated with Markov chains. // Proc. Amer. Math. Soc.— 1958.— **9**.— P. 603–608.

[14] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

[15] *Kullback S., Leibler R.A.*, On Information and Sufficiency. //Annals of Math. Statistics. –1951.— **22**. — P. 79–86.

[16] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits.// Ann. Math. Statist.— 1971.— **42**.— P. 1922–1929.

[17] *Нікіфоров Р., Торбін Г.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами, //Теорія ймовірностей та мат. статистика. —2013. —**86**. — С. 150–162.

[18] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій.— Київ: Ін-т математики АН України.— 1994.—С. 245 – 254.

[19] *Працьовитий М. В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика.— 1998.— **58**.—С. 139 – 148.

[20] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998.

[21] *Renyi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties.// Acta Math. Sci. Hungar. –1957.— **8**. —P. 477 – 493.

[22] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **53**. —P. 423–439.

[23] *Торбин Г. М., Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q^*-символами.//Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1992.— С. 95–104.

[24] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. —К.: Наук.думка, 1992. — 208 с.