Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2).— С. 39–54.

УДК 511.7, 517.1

Про PDP-властивості деяких перетворень, пов'язаних з рядами Кантора

О. В. Слуцький
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У статті розглядається представлення дійсних чисел рядами Кантора та випадкова величина з незалежними символами вищезгаданого представлення. Функція розподілу цієї величини є неперервною та строго зростаючою на відрізку $[0;1]$, тому вона задає перетворення цього відрізка. У статті наводиться критерій (для широкого класу рядів Кантора) того, щоб це перетворення зберігало пакувальну фрактальну розмірність.

Ключові слова: Ряди Кантора, пакувальна розмірність множини, пакувальна розмірність міри, збереження пакувальної розмірності, PDP-перетворення.

Abstract. The Hausdorff dimension $\dim_H$ is the most famous fractal dimension. It is well known that the determination of this dimension is a rather non-trivial problem for many sets and measures.

The packing dimension $\dim_P$ can be considered as an alternative fractal dimension [31, 10]. It has been introduced only in 1980-s but it is widely known and useful in the study of fractal sets and measures.

The ¡¡dimension preserving transformations¿¿ is the useful approach for Hausdorff–Besicovitch dimension researching [2].

Definition. A transformation f of space M is called ¡¡dimension preserving¿¿ if

$$\dim_H(f(E)) = \dim_H(E), \forall E \subset M.$$

The aim of this paper is to develop the similar approach for the packing dimension researching. This approach is based on the ¡¡packing dimension preserving¿¿ transformations notion.

J. Li [18] has proven some sufficient conditions for distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits to be in PDP-class. More precisely, J.Li has proven the next theorem:

Theorem. Let F_ξ be the distribution function of the random variable with independent $\tilde{Q}$-representation. If $\inf_{i,j} q_{ij} = q_* > 0$ and $\inf_{i,j} p_{ij} = p_* > 0$, then F_ξ preserves the packing dimension if and only if

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_k}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} = 1,$$

where $h_j = -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln p_{ij}$ and $b_j = -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln q_{ij}$.

Abstract. In remark 4.2 at the end of article [18] one can read: ¡¡The conditions $\inf_{i,j} q_{ij} = q_* > 0$ and $\inf_{i,j} p_{ij} = p_* > 0$ play an important role in the proof of the theorem. Open question: What can we say about the topic if we remove these conditions?¿¿.

S. Albeverio, M. Pratsiovytyi and G. Torbin removed condition $\inf_{i,j} p_{ij} = p_* > 0$ in similar situation for DP-transformations in [3].

The main result of the paper is the sharp condition of the F_ξ to be PDP if F_ξ is the distribution function for random variable with independent Cantor series digits and condition $\inf_{i,j} p_{ij} = p_* > 0$ is removed.

Key words: Cantor series, packing dimension of sets, packing dimesnion of measure, packing dimension preservation, PDP–transformation.

AMS Subject Classifications (2010): 11KSS, 28A78, 28A80.

1. Вступ

Основним об'єктом, що розглядається у статті, є пакувальна розмірність $\dim_P$. Вона була введена C. Tricot у 1981 році [31]. Багато властивостей пакувальної розмірності співпадає з відповідними властивостями розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H$. Зокрема, серед таких властивостей можна вказати монотонність, зчисленну стабільність [10], незмінність при біліпшицевих перетвореннях [22].

Широко відомою є нерівність $\dim_H E \leqslant \dim_P E, \forall E \subset \mathbb{R}^n$. Для багатьох множин ця нерівність перетворюється на рівність [10, 26], і такі множини називаються «регулярними за Tricot». Регулярність множини є достатньою умовою для наявності багатьох важливих властивостей. Наприклад, для того, щоб $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$, достатньо, щоб хоча б одна з множин E чи F була регулярною за Tricot (під $E \times F$ мається на увазі декартів добуток вказаних множин). Вивчення не лише розмірності Хаусдорфа–Безиковича, а й пакувальної розмірності дозволяє глибше пізнати геометричну природу та регулярність розглядуваних множин та мір. Саме тому в багатьох роботах (див., наприклад, [4, 5, 11, 12, 14, 15]) обчислюються і $\dim_H$, і $\dim_P$ розглядуваних множин та мір.

Для розмірності Хаусдорфа–Безиковича розроблено багато підходів, які спрощують її обчислення та дослідження. Серед таких підходів варто вказати підходи, засновані на довірчості та на збереженні розмірності.

Підхід, заснований на довірчості, детально описано в [1]. Пояснимо суть підходу збереження розмірності.

Кажуть, що перетворення f деякого простору M, в якому визначена $\dim_H$, зберігає розмірність, якщо

$$\forall E \subset M, \dim_H(f(E)) = \dim_H(E).$$

Якщо f зберігає розмірність, то його називають DP-перетворенням («dimension preserving»).

Природною є потреба розробити аналогічні підходи для дослідження та обчислення пакувальної розмірності. В цьому напрямі отримано багато результатів. Зокрема,

J. Li в 2011 році довів критерій [18] для збереження пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними $\tilde{Q}$-символами за умови, що коефіцієнти q_{ij} та ймовірності p_{ij} відділені від нуля. В статті [25] було доведено пакувальну довірчість сімейства s-адичних циліндрів, а в [16] доведено критерій довірчості сімейства циліндрів, породжених представленням дійсних чисел рядами Кантора.

Метою цієї статті є доведення критерія збереження пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними символами розкладу Кантора за умови, що послідовність (n_k) — обмежена без накладання додаткових умов відокремленості елементів матриці $||p_{ik}||$ від нуля.

2. Пакувальна розмірність відносно сімейства множин та неперервної міри

Нехай (M, ρ) — метричний простір, Φ — деяке сімейство куль, а μ — неперервна міра, визначена на M.

Означення **1.** Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зчисленне сімейство $\{E_i\}$ куль називається «нецентрованим ε-пакуванням множини E», якщо виконуються умови:
(1) $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
(2) $E_i \cap E \neq \varnothing$;
(3) Кулі E_i попарно не перетинаються.

Зауваження 1. *Порожня множина куль також вважається нецентрованим пакуванням.*

Означення **2.** Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно сімейства Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) := \sup\left\{\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться за всеможливими нецентрованими ε-пакуваннями кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) = 0$).

Зауваження 2. *Властивості пакувальної передміри відносно сімейства множин та міри:*
(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$;*
(2) ***Скінченна напівадитивність:*** *$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1 \cup E_2, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$;*
(3) Нехай $\varepsilon > 0$. Нехай $B(x, \varepsilon)$ — це куля з центром в x і діаметром ε. Введемо позначення:

$$c(\varepsilon) := \sup\{\mu(B(x, \varepsilon) : x \in M\}.$$

Тоді

$$\forall \delta > 0 : \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) \cdot (c(\varepsilon))^{\delta}.$$

Означення **3.** α-мірною пакувальною мірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi,\mu) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться за всеможливими не більш ніж зчисленними покриттями довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 3. *Властивості пакувальної міри відносно сімейства куль:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}(E_1,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}(E_2,\Phi,\mu)$;*

(2) ***Зчисленна напівадитивність:*** *Для довільного не більш ніж зчисленного набору множин $\{E_i\}$*

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\cup_i E_i,\Phi,\mu) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^{\alpha}(E_i,\Phi,\mu).$$

(3) Якщо $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) < \infty$, то $\forall\delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu) = 0$;

(4) Якщо $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall\delta \in (0;\alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu) = +\infty$.

Означення **4.** Пакувальною розмірністю множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\dim_P(E,\Phi,\mu) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) = 0\}.$$

Зауваження 4. *Властивості пакувальної розмірності відносно сімейства куль та міри:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_P(E_1,\Phi,\mu) \leqslant \dim_P(E_2,\Phi,\mu)$;*

(2) ***Зчисленна стабільність:*** *Для довільного не більш ніж зчисленного набору множин $\{E_i\}$*

$$\dim_P(\cup_i E_i,\Phi,\mu) = \sup_i \dim_P(E_i,\Phi,\mu).$$

Зауваження 5. *Нехай $M = \mathbb{R}^n$.*

Якщо $\mu = \lambda$ (n-вимірній мірі Лебега), то $\dim_P(E,\Phi,\mu) = \dim_P(E,\Phi)$ (про розмірність $\dim_P(E,\Phi)$ детальніше можна прочитати в [25]).

Якщо $\mu = \lambda$ і Φ співпадає з множиною всіх куль з простору M, то $\dim_P(E,\Phi,\mu) = \dim_P(E)$, тобто класичній пакувальній розмірності.

3. Довірчість та порівнянність для обчислення пакувальної розмірності. Аналоги теорем Біллінгслі

Означення **5.** Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M : \dim_P(E,\Phi) = \dim_P(E).$$

Тоді сімейство Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Означення **6.** Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall\alpha \geqslant 0 : \exists C = C(\alpha) > 0 : \mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha}(E), \forall E \subset M.$$

Тоді Φ називається порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

Теорема 1 ([19])**.** *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — дві неперервні ймовірнісні міри на $[0; 1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-го рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо число $\delta \geqslant 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geqslant \delta \right\} \quad \text{i} \quad \mu(E) > 0. \tag{1}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta.$$

Теорема 2 ([16])**.** *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0; 1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta \right\}. \tag{2}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

4. Представлення дійсних чисел рядами Кантора

Означення **7.** Для заданої послідовності $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, де $n_k \in \mathbb{N} \setminus 1$, запис довільного числа $x \in [0; 1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} := \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$$

називається представленням числа x рядами Кантора.

Г. Кантор ввів такі представлення у 1869 році [7] як природні узагальнення класичного s-адичного представлення дійсних чисел.

Ці представлення та їх властивості інтенсивно досліджувалися багатьма математиками (див., наприклад, роботи [20, 21] та посилання в них).

Варто зауважити, що представлення чисел рядами Кантора є частковим випадком $\tilde{Q}$-представлення, а саме, коли $q_{ik} = \frac{1}{n_k}$.

У статті [1] було дано критерій довірчості сімейства циліндрів преставлення чисел рядами Кантора для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. В роботі [16] доведено його «пакувальний аналог»:

Теорема 3. *([16]) Система Φ циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора є довірчою для обчислення пакувальної розмірності тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} = 0. \tag{3}$$

5. Випадкова величина ξ з незалежними символами розкладів Кантора

Зафіксуємо певний розклад C дійсних чисел у ряди Кантора, заданий послідовністю (n_k).

Означення **8.** Нехай (ξ_k) є послідовністю незалежних дискретно розподілених випадкових величин, причому розподіл величини ξ_k задано таблицею:

ξ_k	0	1	$\ldots$	$n_k - 1$
	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	$p_{(n_k-1)j}$

Під випадковою величиною з незалежними символами розкладів Кантора будемо мати на увазі випадкову величину

$$\xi = \Delta^C_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}.$$

Міру на відрізку $[0;1]$, яку породжує в.в. ξ, будемо позначати як μ_ξ, спектр цієї міри — як S_{μ_ξ}, а відповідну функцію розподілу — як F_ξ.

5.1. Пакувальна розмірність міри μ_ξ.

Означення **9.** Нехай μ — деяка ймовірнісна міра, визначена на $[0;1]$. Тоді пакувальною розмірністю міри μ називається число

$$\dim_P \mu = \inf\{\dim_P E : \mu(E) = 1\}.$$

Покладемо $0 \ln 0 := 0$ у наступних позначеннях. Нехай

$$h_j := -\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln p_{ij}, \qquad H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j, \forall j,k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4 ([24]). *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \ldots n_k)} \right)^2 < \infty, \tag{4}$$

то пакувальна розмірність міри μ_ξ в.в. ξ з незалежними символами розкладу Кантора дорівнює

$$\dim_P(\mu_\xi) = \limsup_{k\to\infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 n_2 \ldots n_k)}.$$

5.2. PDP–**перетворення.**

Означення **10.** Нехай (M, ρ) — метричний простір, у якому визначена пакувальна розмірність. Перетворення f простору M зберігає пакувальну розмірність, якщо

$$\forall E \subset M, \dim_P f(E) = \dim_P E.$$

Якщо f зберігає пакувальну розмірність, то його також називають PDP-перетворенням (від англійських слів «Packing dimension preserving»).

5.3. **Критерій належності функції F_ξ до PDP-перетворень.**

Лема 1. *Нехай задана матриця $\tilde{Q} = ||q_{ij}||$. Нехай*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln q_{i_k k}}{\ln(q_{i_1 1} q_{i_2 2} \ldots q_{i_{k-1}(k-1)})} = 0$$

для довільної послідовності (i_k). Тоді сімейство Φ циліндричних інтервалів відповідного представлення є довірчим для пакувальної розмірності.

Доведення. Виберемо довільну множину $E \subset [0;1]$. Для довільних чисел $m \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$ розглянемо множини

$$W_{m,\delta} = \left\{ x \in E : \frac{\ln q_{i_k k}(x)}{\ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \ldots q_{i_{k-1}(k-1)}(x))} < \delta, \quad \forall k \geqslant m \right\}.$$

Розглянемо множину $W_{m,\delta}$ при деякому фіксованому m. Зафіксуємо таке ε, яке не перевищує довжину жодного циліндричного інтервала рангу m (очевидно, що таке ε існує, наприклад, $\varepsilon < \min_i q_{i1} \cdot \min_i q_{i2} \ldots \min_i q_{im}$). Розглянемо центроване ε-пакування цієї множини проміжками E_j.

Для довільного проміжка E_j існує циліндричний інтервал $\Delta(E_j)$ мінімального рангу i_j, який міститься всередині E_j і містить в собі середину x_j інтервала E_j. Тоді «батько» цього циліндричного інтервала (тобто такий циліндричний інтервал $\Delta'(E_j)$, ранг якого дорівнює $i_j - 1$ і $\Delta'(E_j) \supset \Delta(E_j)$) матиме довжину не меншу, ніж $\frac{|E_j|}{2}$. Позначимо відношення $\frac{|\Delta(E_j)|}{|\Delta'(E_j)|}$ через $q_{i_{k_j} k_j}$. Тоді

$$|E_j| \leqslant \frac{2|\Delta(E_j)|}{q_{i_{k_j} k_j}(x_j)}, \text{ де } x_j \in W_{m,\delta}.$$

Оцінимо α-об'єм пакування множини $W_{m,\delta}$ інтервалами E_j:

$$\sum_k |E_j|^\alpha \leqslant \sum_k |\Delta(E_j)|^\alpha \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j} k_j}(x_j)} \right)^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k |E_j|^\alpha \leqslant \sum_k |\Delta(E_j)|^{\alpha-\delta} \cdot |\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j} k_j}(x_j)} \right)^\alpha.$$

Оцінимо вираз

$$\ln \left(|\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j} k_j}(x_j)} \right)^\alpha \right) =$$

$$= \delta \ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \ldots q_{i_{k_j-1}(k_j-1)}(x)) + \alpha \ln 2 - \alpha \ln q_{i_{k_j} k_j}(x_j).$$

З вибору ε випливає, що $i > m$. Оскільки $x_j \in W_{m,\delta}$, то

$$\delta \ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \dots q_{i_{k_j - 1}(k_j - 1)} < \ln q_{i_{k_j} k_j}(x_j),$$

і тому

$$\ln \left(|\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j} k_j}(x_j)} \right)^\alpha \right) \leqslant \alpha \ln 2 + (1-\alpha) \ln q_{i_{k_j} k_j}(x_j) \leqslant \alpha \ln 2.$$

Отже,

$$\sum_j |E_j|^\alpha \leqslant 2 \sum_j |\Delta(E_j)|^{\alpha - \delta}.$$

Візьмемо супремуми по всеможливим центрованим пакуванням $\{E_j\}$ від обох частин нерівності:

$$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_\varepsilon(W_{m,\delta}, \Phi)$$

Візьмемо границю при $\varepsilon \to 0$ від обох частин нерівності:

$$\mathcal{P}^\alpha_0(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_0(W_{m,\delta}, \Phi).$$

Враховуючи означення пакувальної міри, отримуємо таку нерівність:

$$\mathcal{P}^\alpha(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(W_{m,\delta}, \Phi)$$

Нехай $\alpha_0 = \dim_P(W_{m,\delta})$. Тоді $\forall \alpha < \alpha_0$ ліва частина буде дорівнювати нескінченності, а отже, і права частина також дорівнюватиме нескінченності, і тому

$$\dim_P(W_{m,\delta}, \Phi) \geqslant \alpha - \delta.$$

Отже,

$$\dim_P(W_{m,\delta}, \Phi) \geqslant \dim_P(W_{m,\delta}) - \delta.$$

З означення $W_{m,\delta}$ випливає, що

$$E = \bigcup_{m=1}^\infty W_{m,\delta}.$$

Враховуючи властивість зчисленної стабільності, маємо:

$$\dim_P(E, \Phi) \geqslant \dim_P(E) - \delta.$$

Враховуючи довільність δ, маємо:

$$\dim_P(E, \Phi) \geqslant \dim_P(E).$$

Оскільки остання нерівність виконується для всіх E, то Φ є довірчим сімейством інтервалів, що й вимагалось довести. □

Лема 2. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора. Нехай розглянуте представлення задане послідовністю (n_k), причому $\sup_k n_k < +\infty$. Нехай F_ξ — функція розподілу в.в. з незалежними символами вказаного розкладу Кантора. Припустимо, що для F_ξ виконується рівність:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda(F_\xi(\Delta_n(x)))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} = 1 \quad \forall x \in [0;1], \tag{5}$$

де Δ_n — це циліндр n-го рангу, який містить x. Нехай $\Phi' = F_\xi(\Phi)$. Тоді Φ' — довірча для пакувальної розмірності.

Доведення. Φ' є сімейством циліндрів для деякого $\tilde{Q}$-представлення. Ми будемо позначати це представлення як $\tilde{Q}'$ і відповідні числа q_{ij} — як q'_{ij}. Покажемо, що для цього представлення виконуються умови попередньої теореми. Справді,

$$F_\xi(\Delta^{\tilde{Q}}_{a_1a_2\ldots a_n}(x)) = \Delta^{\tilde{Q}'}_{a_1a_2\ldots a_n}(x),$$
$$\ln\lambda(F_\xi(\Delta_n(x))) = \ln(q'_{1a_1}q'_{2a_2}\ldots q'_{na_n}).$$

Введемо позначення:

$$M := \limsup_{i\to\infty}\frac{\ln q'_{ij_i}}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}.$$

Оцінимо M. Для цього виконаємо деякі перетворення:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\ln\lambda(F(\Delta_n(x)))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} = \lim_{n\to 0}\frac{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}}) + \ln q'_{ij_i}}{-\left(\ln(n_1n_2\ldots n_{i-1}) + \ln n_i\right)}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на $\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})$, отримаємо:

$$\lim_{n\to 0}\frac{1+\frac{\ln q'_{ij_i}}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}}{\frac{-\ln(n_1n_2\ldots n_{i-1})}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}+\frac{-\ln n_i}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}} = \frac{1+M}{1+0} = 1 \Rightarrow M = 0.$$

Отже, зображення $\tilde{Q}'$ задовольняє умови попередньої теореми і тому Φ' — довірча. □

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
&T^+_{\varepsilon,k} = \{1,2,\ldots,k\}\cap\left\{j : |p_{ij} - \frac{1}{n_i}| \leqslant \varepsilon, \forall i \in \{0,1,\ldots,n_k-1\}\right\}\\
&T^-_{\varepsilon,k} = \{1,2,\ldots,k\}\setminus T^+_{\varepsilon,k}\\
&T_{\varepsilon,k} = T^-_{\varepsilon,k}\setminus T^{(1)}_k
\end{aligned}\tag{6}$$

Лема 3. *Нехай ξ є в.в. з незалежними символами розкладу Кантора, $\dim_P\mu_\xi = 1$ і $\sup_k n_k < +\infty$. Тоді*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} = 1,$$

де множина $T^+_{\varepsilon,k}$ визначена у рівностях (6), а під $|\cdot|$ мається на увазі кількість елементів у множині.

Доведення. Оскільки $|T^+_{\varepsilon,k}| + |T^-_{\varepsilon,k}| = k$, то $\frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} \leqslant 1$. Припустимо, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} \neq 1.$$

Нехай $s \geqslant 2$ — деяке натуральне число.

Легко довести, що для довільних двох стохастичних векторів з додатними координатами

$$\overrightarrow{p} = (p_0; p_1; \ldots; p_{s-1}),$$
$$\overrightarrow{q} = (q_0; q_1; \ldots; q_{s-1}).$$

виконується нерівність

$$p_0^{p_0} + p_1^{p_1} + \cdots + p_{s-1}^{p_{s-1}} \geqslant q_0^{p_0} + q_1^{p_1} + \cdots + q_{s-1}^{p_{s-1}},$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i, \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$.

Прологарифмуємо попередню нерівність:

$$\begin{aligned} p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1 + \cdots + p_{s-1} \ln p_{s-1} \geqslant \\ \geqslant p_0 \ln q_0 + p_1 \ln q_1 + \cdots + p_{s-1} \ln q_{s-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо функцію

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}) = p_0 \ln x_0 + p_1 \ln x_1 + \cdots + p_{s-1} \ln x_{s-1}$$

з накладеними умовами

$$x_i > 0, \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}, \sum_i x_i = 1.$$

Ця функція є неперервною. Якщо

$$x_i \in (0; 1), \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\},$$

то максимум функції (він є від'ємним числом, позначимо його через M) досягається при $x_i = p_i, \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ (це випливає з нерівності (7)).

Зафіксуємо деяке натуральне число $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Припустимо, що

$$|p_j - q_j| \geqslant \varepsilon.$$

Тоді існує таке число $a_M < M$, що

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}) < a_M.$$

Введемо позначення:

$$h_j := -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln p_{ij},$$
$$b_j := -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln q_{ij}.$$

З нерівності (7) випливає, що $h_j \leqslant b_j$.

Покладемо у розглядуваних функціях $s := n_j$, $p_i := p_{ij}$, $q_i := \frac{1}{n_j}$.

З умови $j \notin T^{+}_{\varepsilon,k}$ випливає умова

$$|p_{ij} - \frac{1}{n_j}| \geqslant \varepsilon,$$

а це значить, що існує таке число $a_M < M$, що $h_j = -M$, $b_j = -a_M$, і тому

$$\frac{h_j}{b_j} = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} p_{ij} \ln p_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_j} p_{ij} \ln \frac{1}{n_j}} = \frac{M}{a_M}.$$

Отже, для довільного додатного ε існує така додатна константа $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, що

$$\frac{h_j}{b_j} \leqslant 1 - \delta_0.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{j=1}^{k} h_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} &= \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} h_j + \sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} h_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} b_j + (1-\delta_0)\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} = \\ &= 1 - \delta_0 \frac{\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j}.\end{aligned}$$

З умови $\dim_P \mu_\xi = 1$ випливає

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \delta_0 \frac{\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j}\right) = 1,$$

а тому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} = 0.$$

Введемо позначення:

$$\overrightarrow{p_j} = (p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{(n_j-1)j}), \qquad \overrightarrow{r_j} = (\ln n_j, \ln n_j, \dots, \ln n_j).$$

Оцінимо b_j зверху. Оскільки

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_j-1} \left(p_{ij} \cdot \ln n_j\right) \leqslant \ln n_j \leqslant \ln \sup_j n_j.$$

Оцінимо b_j знизу.

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_j-1} \left(p_{ij} \cdot \ln n_j\right) \geqslant \ln 2.$$

Отже, існують дві додатні константи $d_0 := \ln \sup_j n_j$ та $d_1 := \ln 2$ такі, що

$$d_0 \leqslant b_j \leqslant d_1,$$

і тому існують додатні константи $C_{\varepsilon,k} \in [d_0; d_1]$ та $D_{\varepsilon,k} \in [d_0; d_1]$ такі, що:

$$\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} b_j = |T^-_{\varepsilon,k}| \cdot C_{\varepsilon,k}; \qquad \sum_{j=1}^{k} b_j = k \cdot D_{\varepsilon,k}.$$

Таким чином,

$$\frac{\sum_{j=1}^{k_n} h_j}{\sum_{j=1}^{k_n} b_j} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{\sum_{j\in T^-_{\varepsilon,k_n}} b_j}{\sum_{j=1}^{k_n} b_j} = 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| \cdot C_{\varepsilon,k_n}}{k_n \cdot D_{\varepsilon,k_n}} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| d_1}{k_n \cdot d_0}.$$

Отже,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{k_n}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{k_n}} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| d_1}{k_n \cdot d_0} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{d_1}{d_0} \cdot (1 - a_0) < 1.$$

Отримана суперечність доводить лему. □

Лема 4. *Нехай ξ — неперервна випадкова величина, розподілена на $[0;1]$. Тоді для того, щоб F_ξ належала до PDP-класу, необхідно, щоб $\dim_P \mu_\xi = 1$.*

Доведення. Припустимо, що $\dim_P(\mu_\xi) = \alpha \neq 1$. Тоді існує множина E_α така, що $\mu_\xi(E_\alpha) = 1$ і $\dim_P(E_\alpha) < 1$. Розглянемо $F_\xi(E_\alpha)$. Ця множина має міру Лебега 1 (тому що $\mu_\xi(E_\alpha) = 1$), а отже, і $\dim_P(F_\xi(E_\alpha)) = 1$. Отже,

$$\dim_P(F_\xi(E_\alpha)) = 1 \neq \dim_P(E_\alpha),$$

що суперечить умові «F_ξ належить до PDP-класу». □

Теорема 5. *Нехай:*

$$p_j = \inf_i p_{ij}, \quad n_{\max} := \sup_j n_j$$

$$T^{(1)} = \left\{ k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2n_{\max}} \right\}$$

$$T^{(1)}_k = T^{(1)} \cap \{1, 2, \dots, k\},$$

$$B = \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln \frac{1}{p_j}}{k}.$$

Припустимо, що $n_{\max} < +\infty$.

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{cases} \dim_P \mu_\xi = 1; \\ B = 0. \end{cases}$$

Доведення. З леми 4 випливає, що якщо F_ξ — PDP, то $\dim_P(\mu_\xi) = 1$.

Отже, для доведення теореми достатньо довести два твердження:

(1) Якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B = 0$, то F_ξ — PDP;

(2) Якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B \neq 0$, то F_ξ — не PDP.

Нехай ε — довільне додатне число таке, що $\varepsilon < \frac{1}{2n_{\max}}$.

1. Покажемо, що якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B = 0$, то F_ξ — PDP.

З умови $B = 0$ випливає існування границі

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_j}{-k \ln n_{\max}} = 0.$$

Розглянемо відношення:

$$\frac{\ln\mu\big(\Delta_{a_1a_2\dots a_k(x)}\big)}{\ln\lambda\big(\Delta_{a_1a_2\dots a_k(x)}\big)} = \\ = \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}+\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}+\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j \ln n_j}$$

Розіб'ємо це відношення на три доданки. Розглянемо перший доданок:

$$\frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^k -\ln n_j}.$$

Оцінимо його:

$$\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j} \leqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}(-\ln(n_j)-\varepsilon)) = \\ = \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}\left(-\ln n_j-\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\frac{1}{n_j}-\varepsilon}\right)\right) \geqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}(-\ln n_j)-|T^+_{\varepsilon,k}|\cdot 2\varepsilon n_{\max}$$

та

$$\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j} \leqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}}(-\ln n_j)+|T^+_{\varepsilon,k}|\cdot 2\varepsilon n_{\max}$$

Розглянемо другий доданок вищезгаданого відношення

$$\frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^k(-\ln n_j)}.$$

Аналогічно до попереднього

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}(-\ln n_j)-|T_{\varepsilon,k}|\cdot\ln\frac{2}{2-\frac{1}{n_{\max}}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j} \leqslant \\ \leqslant \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}(-\ln n_j)+|T_{\varepsilon,k}|\cdot\ln\frac{2}{2-\frac{1}{n_{\max}}}.$$

Розглянемо третій доданок:

$$\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j(-\ln n_j)}.$$

Його можна оцінити зверху величиною

$$\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_j}{-k\ln n_{\max}},$$

а ця величина прямує до нуля при $k\to\infty$ (це випливає з умови $B=0$).

Додавши три доданки та врахувавши їх оцінки, отримуємо нерівність:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}(-\ln n_j) - |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot 2\varepsilon n_{\max} - |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln\frac{2}{2-\frac{1}{n_{\max}}} - \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^{k}(-\ln n_j)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j(-\ln n_j)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{j=0}^{k}(-\ln n_j) + |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot 2\varepsilon n_{\max} + |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln\frac{2}{2-\frac{1}{n_{\max}}} + \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^{k}(-\ln n_j)}$$

Нагадаємо, що з леми 3 випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} = 1, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{|T_{\varepsilon,k}|}{k} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}{\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})} = 1+0+0 = 1.$$

Позначимо систему циліндрів для заданого $\tilde{Q}$-представлення через Φ, а її образ через $\Phi' = F_\xi(\Phi)$.

Застосовуючи теорему 2, маємо

$$\dim_P(E,\Phi) = 1\cdot\dim_P(F_\xi(E),\Phi') \quad \forall E\subset[0;1].$$

Для доведення того, що $\dim_P(E) = \dim_P(F_\xi(E))$, досить довести, що Φ та Φ' — довірчі.

Довірчість Φ була доведена у теоремі 3. Довірчість Φ' була доведена у лемах 1 та 2. Отже, $\dim_P(E) = \dim_P(F_\xi(E))$ і тому F_ξ є PDP-перетворенням.

2. Покажемо, що якщо $\dim_P(\mu_\xi)=1$ і $B>0$, то F_ξ —не PDP. Так само, як і в попередній частині доведення, випишемо відношення

$$\frac{\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}{\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})} = $$

$$= \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j(-\ln n_j)}$$

і розіб'ємо його на три доданки. Аналогічно до попередньої частини доведення перший доданок прямує до 1, а другий — до 0 (при $k\to\infty$). Розглянемо третій доданок.

З умови $B>0$ випливає існування такої підпослідовності (k_m), що

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\frac{1}{p_j}}{k_m} = B.$$

Розглянемо множину

$$L = \left\{ x : x = \Delta_{a_1a_2\ldots a_k\ldots};\ \begin{array}{l} a_k\in\{0,1,\ldots,s-1\} \text{ якщо } k\notin T^{(1)} \\ a_k = n_k,\ \text{якщо } k\in T^{(1)},\ \text{де } p_{n_k k} = \min\limits_i p_{ik}. \end{array} \right\}$$

Оскільки заборона цифр у множині L зустрічається у нескінченній кількості місць, то $\lambda(L) = 0$. Але $\dim_P(L) = 1$ (це випливає з умови

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|T^{(1)}_{k_m}|}{k_m} = 0$$

і з теореми про пакувальну розмірність міри μ_ξ).

Отже, для довільного $x \in L$ виконується рівність:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_{k_m}(x)})} = 1 + B.$$

Тому для довільного $\delta > 0$ існує $m(\delta)$ таке, що $\forall m > m(\delta)$ виконується нерівність:

$$1 + B - \delta \leqslant \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_{k_m}(x)})} \leqslant 1 + B + \delta$$

Звідси випливає, що

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})} \geqslant 1 + B - \delta,$$

отже (за теоремою 2),

$$\dim_{P-\mu}(L) \cdot (1 + B - \delta) \leqslant \dim_P(L),$$

тобто

$$\dim_P(F_\xi(L)) \leqslant \frac{1}{1 + B - \delta}.$$

З довільності δ випливає, що

$$\dim_P(F_\xi(L)) \leqslant \frac{1}{1 + B},$$

а це значить, що F_ξ не є PDP-перетворенням. □

Література

[1] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.*, On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion // `http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf`.

[2] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.*, Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **24**(2004), 1–6.

[3] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.*, Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension, Central European Journal of Mathematics, **6**(2008), 119–128.

[4] *Anckar A.*, Dimension bounds for invariant measures of bi-lipschitz iterated function systems // `http://arxiv.org/abs/1410.5927`.

[5] *Attia N., Barral J.*, Hausdorff and packing spectra, large deviations, and free energy for branching random walks in r^d // `http://arxiv.org/pdf/1305.2034v2.pdf`.

[6] *Billingsley P.*, Hausdorff dimension in probability theory II, Illinoys Journal of Mathematics, **5**(1961), 291–298.

[7] *Cantor G.*, Über die einfachen zahlensysteme, Zeitschrift f. Math. u. Physik., **14**(1869), 121–128.

[8] *Das M.*, Billingsley's packing dimension, Proceedings of the American mathematical society, **136**(2008), 273–278.

[9] *Falconer K.*, The geometry of fractal sets., London : Cambridge Unversity Press, 2002.

[10] *Falconer K.*, Fractal geometry: mathematical foundations and applications., Chichester : Wiley, 2003.

[11] *Fassler K., Orponen T.*, On restricted families of projections in r^3, Proc. London Math. Soc., **109**(2014), 56.

[12] *Holland M., Zhang Y.*, Dimension results for inhomogeneous moran set constructions // `http://arxiv.org/pdf/1407.6597.pdf`.

[13] *Jessen B. W. A.*, Distribution function and riemann zeta-function, Trans. Amer. Math. Soc., **38**(1935), 48–88.

[14] *Jordan T., Rams M.*, Increasing digit subsystems of infinite iterated function systems, Proceedings of the American mathematical society, **140**(2012), 167–1279.

[15] *Joyce H.*, Conditions for equality of Hausdorff and Packing measures on $\mathbb{R}^n$, Real Analysis Exchange, **22**(1996), 142–152.

[16] *Kondratiev Yu., Lebid M., Slutskyi O., Torbin G*, Cantor series expansion and packing dimension faithfulness // `Submitted to Advances in Mathematics`.

[17] *Лебідь М., Торбін Г.*, Про порівнянні та непорівнянні Хаусдорфові міри, / М. Лебідь, Г. Торбін // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. № 8.— С.35–40.

[18] *Li J.*, A class of probability distribution functions preserving the packing dimension, Statistics and Probability Letters, **81**(2011), 1782–1791.

[19] *Li J.*, Packing dimension of measures associated with $\tilde{Q}$-representation, Mediterranean Journal of Mathematics, **18**(2011), 182–194.

[20] *Mance B.*, Normal numbers with respect to Cantor series expansion // `Thesis (Ph. D.), The Ohio State University, 2010`.

[21] *Marstrand J.*, The dimension of cartesian product sets, Proc. Cambridge Philosofical Society, **50**(1954), 198–202.

[22] *Mattila P.*, Geometry of sets and measures in euclidean spaces., Cambridge university press, 1995.

[23] *Слуцький О., Торбін Г.*, Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності, / О. Слуцький, Г. Торбін // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова (Серія 1: Фізико–математичні науки). — 2012. № 1.— С.192–199.

[24] *Слуцький О.*, Про пакувальну довірчість, порівнянність та розмірність міри об'єктів, пов'язаних з рядами Кантора, / О. Слуцький // Наукові записки НПУ ім. Драгоманова (Математика). — 2014. № 1.— С.268–277.

[25] *Слуцький О., Торбін Г.*, Довірчість сімейств множин для обчислення пакувальної розмірності, / О. Слуцький, Г. Торбін // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова (Серія 1: Фізико–математичні науки). — 2013. № 1.— С.268–277.

[26] *Raimond X. S., Tricot C.*, Packing regularity of sets in n-space, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **103**(1988), 133–145.

[27] *Rogers C.*, Hausdorff measures., Cambridge Unversity Press, 1970.

[28] *Shiryaev A.*, Probability, New York : Springer-Verlag, 1996.

[29] *Slutskyi O.*, On packing dimension preservation by distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits // `Modern Stochastics: Theory and Applications (in publication)`.

[30] *Taylor S. J., Tricot C.*, Packing measure and its evaluation for a brownian path, Trans. Amer. Math. Soc., **288**(1985), 679–699.

[31] *Tricot C.*, Two definitions of fractional dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **91**(1982), 57–74.