Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2). — С. 55–60.

Про нескінченні згортки Бернуллі, що породжені двійково-лакунарними послідовностями

Л. О. Сінельник
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У роботі досліджуються властивості множини LS двійково-лакунарних дійсних чисел одиничного відрізка, тобто множини тих чисел $a \in [0,1]$, у яких двійкові символи $\alpha_k(a)$ мають наступну властивість:

$$\forall m \in N, \forall s \in N \exists k = k(m,s) > m : \alpha_{k+i}(a) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Доводиться, зокрема, що майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа є двійково-лакунарними.

Для кожного двійково-лакунарного числа a розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

де послідовність $\{a_k\}$ породжується вибраним числом a, ξ_k є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Доведено, що для довільного двійково-лакунарного числа a породжена випадкова величина ξ є суттєво нерайхмановою, тобто

$$L_\xi := \lim_{t \to \infty} |f_\xi(t)| = 1.$$

Ключові слова: перетворення Фур'є-Стілт'єса, згортки Бернуллі, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, фрактали, двійково-лакунарні дійсні числа.

Abstract. The paper is devoted to the study of infinite Bernoulli convolutions generated by the set of binary lacunary real numbers.

Let $\{\xi_k\}$ be a sequence of independent random variables taking the values -1 and 1 with probabilities p_{0k} and p_{1k} respectively, let $\{a_k\}$ be a sequence of real numbers such that $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converges. Then the distribution function of random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$$

is said to be the infinite Bernoulli convolution.

A real number a is said to be binary lacunary, if its binary symbols $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{s^k}$ have the following property:

$$\forall m \in N, \forall s \in N, \quad \exists k = k(m,s) > m : \alpha_{k+i}(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., s\}.$$

Abstract. We prove that the set LS (lacunary sequence) of binary-lacunary real numbers is of full Lebesgue measure. We also study asymptotics of the Fourier-Stiltjes transform of Bernoulli convolutions generated by the set of binary-lacunary real numbers and prove that

$$L_\xi := \lim_{t\to\infty} |f_\xi(t)| = 1, \forall a \in LS.$$

Key words: Fourier–Stieltjes transform, Bernoulli convolutions, singularly continuous probability measures, fractals, binary-lacunary real numbers.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

Нескінченні згортки Бернуллі, тобто функціїї розподілів випадкових величин виду

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

де послідовність $a_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, ξ_k - незалежні випадкові величини, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно інтенсивно вивчаються протягом останніх 80 років з різних точок зору (Джессен (Jessen B.) і Вінтнер (Wintner A.) [7], Кершнер (Kershner R.), Ердеш (Erdos P.) [4], Кахане (Kahane J.P.) і Салем (Salem R.), Гарсіа (Garsia A.M.) [5], Перес (Peres Y.) і Солом'як (Solomyak B.) [12, 13], Альбеверіо (Albeverio S.) [2], Працьовитий М. (Pratsiovytyi M.) [1, 21, 20, 24], Торбін Г. (Torbin G.) [1, 2, 3, 21, 15], Гончаренко Я. (Gontcharenko Ya.) [21] та ін.).

Одним з важливих напрямів досліджень полягає у знаходженні умов при яких ймовірнісні міри μ_ξ:

1) будуть мірами Райхмана, тобто коли $L_\xi = \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| = 0$,

2) не будуть нерайхмановими, тобто коли $L_\xi > 0$,

3) будуть суттєво нерайхмановими, тобто коли $L_\xi = 1$.

Серед досліджень у цьому напрямку варто відзначити роботи [1, 2].

У роботі [1] доведено, зокрема, що нескінченні згортки Бернуллі, що породжені рядами Остроградського-Серпінського-Пірса, завжди будуть суттєво нерайхмановими.

Для нескінченних згорток Бернуллі, породжених рядами Остроградського II роду, доведено лише нерайхмановість розподілу (гіпотеза про суттєву нерайхмановість все ще відкрита).

Дана робота є узагальненням роботи [16], в якій було досліджено властивості нескінченних згорток Бернуллі, що породжені спеціальним континуальним підкласом множини двійково-лакунарних дійсних чисел. Було вивчено асимптотику перетворення Фур'є-Стілт'єса відповідних згорток Бернуллі і доведено, що у випадку неперервності для кожного значення параметра a з досліджуваної континуальної ніде не щільної множини, модуль характеристичної функції $f_\xi(t)$ породженої випадковою величиною $\xi = \xi(a)$ має максимальну асимптотичну амплітуду, тобто $L_\xi = 1$.

Основними результатами даної роботи є доведення того факту, що майже всі дійсні числа (в сенсі міри Лебега) є двійково-лакунарними і що всі нескінченні згортки

Бернуллі, що породжується довільним двійково-лакунарним числом, є суттєво нерайхмановими.

2. Про міру Лебега множини двійково-лакунарних дійсних чисел

Означення **1.** Дійсне число $a \in [0,1]$ називається двійково-лакунарним, якщо двійковий розклад числа a має такий вигляд:

$$a = 0,\alpha_1 \dots \alpha_{k_1} 0 \alpha_{k_1+2} \dots \alpha_{k_2} 00 \alpha_{k_2+3} \dots \alpha_{k_n} 0 \dots 0 \alpha_{k_n+n+1} \dots$$

для деякої послідовності $\{k_n\}$, при цьому $\alpha_j \in \{0,1\}$.

Іншими словами число a є двійково лакунарним, якщо існує послідовність $\{k_n\}$ така, що

$$\alpha_{k_n+i} = 0, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

і $k_{n+1} > k_n + n$.

Очевидно, що дане означення та означення, дане в анотації, є еквівалентними.

Теорема 1. *Множина LS (lacunary sequence) двійково-лакунарних дійсних чисел має повну міру Лебега.*

Доведення. Зафіксуємо натуральне число n і довільний впорядкований набір $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j \in \{0,1\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Позначимо через $N_k((\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n),x)$ кількість появ набору $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ серед перших k цифр двійкового розкладу числа x.

Якщо границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_k((\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n),x)}{k}$$

існує, то її називають асимптотичною частотою набору $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ у двійковому розкладі x і позначають $\nu_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}(x)$.

При $n = 1$ отримуємо класичне означення частоти символа γ_1 в двійковому розкладі числа x.

Як відомо, [1] для довільного $n \in N$ і для довільного набору $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\nu_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}(x) = \frac{1}{2^n}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ їх двійковий розклад містить нескінченну кількість неперетинних блоків виду $\underbrace{00\dots0}_{n}$. Позначимо відповідну множину літерою A_n.

Нехай $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки $A_n \subset [0,1]$ і $\lambda(A_n) = 1$, то $\lambda(A) = 1$.

Якщо $x \in A$, то у двійковому розкладі числа x є безліч неперетинних блоків виду $\underbrace{00\dots0}_{n}, \forall n \in N$.

Покажемо, що довільне число з множини A є двійково-лакунарним.

Нехай $x \in A$. Виберемо $k_1 \in N$ так, щоб $\alpha_{k_1+1}(x) = 0$ (це завжди можна зробити, бо в двійковому розкладі є безліч нулів).

Виберемо $k_2 \in N$ так, щоб $k_2 > k_1 + 1$ і при цьому $\alpha_{k_2+1}(x) = 0$ і $\alpha_{k_2+2}(x) = 0$ (це теж можна зробити, бо в двійковому розкладі числа x є безліч пар $(0,0)$).

Аналогічно можна вибрати $k_n \in N$ так, щою $k_n > k_{n-1} + (n-1)$ і при цьому

$$\alpha_{k_n+1}(x) = \alpha_{k_n+2}(x) = \ldots = \alpha_{k_n+n}(x) = 0.$$

Це завжди можна зробити, оскільки в двійковому розкладі числа x є безліч наборів $\underbrace{00\ldots0}_{n}$.

Отже, $A \subset LS$. Тому $\lambda(LS) = 1$. $\square$

Зауваження 1. *Можна аналогічно показати, що множина нормальних чисел є підмножиною множини LS. Оскільки λ-майже всі числа є нормальними, то λ-майже всі числа є двійково-лакунарними.*

3. Про асимптотичні властивості перетворення Фур'є – Стілт'єса нескінченних згорток Бернуллі, породжених двійково-лакунарними дійсними числами

Нехай $a \in LS$ і нехай $k_n = k_n(a)$ – відповідна послідовність така, що $\alpha_{k_n+i}(a) = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і

$$a = 0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k_1} 0 \alpha_{k_1+1} \ldots \alpha_{k_2} 00 \alpha_{k_2+3} \ldots \alpha_{k_n} \underbrace{00\ldots0}_{n} \alpha_{k_n+n+1} \ldots,$$

Для даного числа побудуємо послідовність

$$a_n = a_n(a) = \frac{\{a \cdot 2^{k_n}\}}{2^{k_n}},$$

і відповідну випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

де $\{\xi_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин таких, що ξ_k набуває значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k} і p_{1k} відповідно.

Теорема 2.

$$L_\xi := \lim_{t \to \infty} |f_\xi(t)| = 1, \forall a \in LS.$$

Доведення. Оскільки

$$a = 0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k_1} 0 \alpha_{k_1+2} \ldots \alpha_{k_2} 00 \alpha_{k_2+3} \ldots \alpha_{k_n} \underbrace{00\ldots0}_{n} \alpha_{k_n+n+1} \ldots,$$

то

$$a_n = \frac{\{a \cdot 2^{k_n}\}}{2^{k_n}} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k_n}\underbrace{00\ldots0}_{n} \alpha_{k_n+n+1} \ldots.$$

Як відомо [15]

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(t \cdot a_k).$$

Розглянемо послідовність $t_n = \pi \cdot 2^{k_n}$. Тоді

$$t_n \cdot a_1 = \pi \cdot 2^{k_n} \cdot 0,0\ldots 00\alpha_{k_1+2}\ldots\alpha_{k_n}\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1}\ldots =$$

$$= \pi \cdot \left[2^{k_n} \cdot a_1\right] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1}\ldots$$

$$t_n \cdot a_2 = \pi \cdot \left[2^{k_n} \cdot a_2\right] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1}\ldots$$

$$\ldots$$

$$t_n \cdot a_{n-1} = \pi \cdot \left[2^{k_n} \cdot a_{n-1}\right] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1}\ldots$$

$$t_n \cdot a_n = \pi \cdot \left[2^{k_n} \cdot a_n\right] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1}\ldots$$

$$t_n \cdot a_{n+1} = \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{g_{n+1}}\alpha_{k_{n+1}+n+2}\ldots < \frac{\pi}{2^{n+1}}, g_{n+1} > n+1$$

$$t_n \cdot a_{n+2} = \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{g_{n+2}}\alpha_{k_{n+2}+n+3}\ldots < \frac{\pi}{2^{n+2}}, g_{n+2}$$

$$\ldots$$

$$t_n \cdot a_{n+s} = \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{g_{n+s}}\alpha_{k_{n+s}+n+s+1}\ldots < \frac{\pi}{2^{n+s}}, g_{n+s} > n+s, \forall s \in N.$$

Отже,

$$|f_\xi(t_n)| \geq \prod_{k=1}^{n}\cos^2(t_n \cdot a_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty}\cos^2(t_n \cdot a_k) =$$

$$\left(\cos^2(\pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}\alpha_{k_n+n+1})\right)^n \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty}\cos^2(t_n \cdot a_k) \geq$$

$$\geq \left(\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^n \cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos^2\frac{\pi}{2^{n+3}}\cdot\ldots\cdot\cos^2\frac{\pi}{2^{n+s+1}}\cdot\ldots.$$

Оскільки

$$\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 1 - \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2,$$

то

$$\left(\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^n \to 1, n \to \infty.$$

Розглянемо нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$. Цей добуток, очевидно, збігається, бо $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{2^{k+1}}$ збігається.

Тому, використовуючи ознаку збіжності нескінченних добутків, приходимо до висновку про те, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=n}^{\infty}\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 1.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\ldots\right) = 1$$

і тому $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| = 1$.

Отже, $L_\xi = \limsup_{t\to\infty} |f_\xi(t)| \geq \lim_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 1$, що і доводить теорему. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it.// Rev. Roum. Math. Pures Appl. –2009. – Vol. 54, №2. – P. 85-115.

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions. // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки—К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. – 2004. – Т.5. – С. 248-264.

[3] *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions. //Bull. Sci. Math.—2008. — Vol. 132. no. 8. — P. 711–727.

[4] *Erdos P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions.//Amer. J. Math.—1939.— Vol. 61. — P. 974 - 976.

[5] *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions.// Trans. Amer. Math. Soc.—1962.— Vol. 102. — P. 409-432.

[6] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі.// Теорія ймовірностей та математична статистика. —2008.— Т. 79. — С. 34-49.

[7] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function// Trans. Amer. Math. Soc.—1938.—38.—P. 48-88.

[8] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. —641 с.

[9] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes // Studia Math.—1931.— Vol. 3. — P. 119-155.

[10] *Лукач Е.* Характеристические функции. — М.: Наука, 1979. —424 с.

[11] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions, Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel—2000—P. 39–65.

[12] *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof // Math. Res. Lett.—1996—Vol.3, no.2.— P.231–239.

[13] *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets// Trans.Amer.Math.Soc.—1998.—Vol.350, no.10.—P.4065-4087.

[14] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[15] *Сінельник Л., Торбін Г.* Асимптотичні властивості перетворень Фур'є-Стілт'єса для деяких класів нескінченних згорток Бернуллі// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки—К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. —2012.—Т. 13. — Р. 324-341.

[16] *Сінельник Л., Торбін Г.* Про один клас сингулярних розподілів, породжених підсімейством двійково-лакунарних послідовностей// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки—К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. 2014.— Т.16, №1.— Р. 144-152.

[17] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda$(an Erdos problem)// Ann. of Math.— 1995.—Vol. 142, no. 3.— P.611–625.

[18] *Torbin G.* Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension // Theory of Stochastic Processes.—2007.—Vol.13. — P. 281-293.

[19] *Торбін Г.М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір. // Український математичний журнал. —2005.— Т.57, №5.– С. 837–857.

[20] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества функции распределения.— К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.