Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2).— С. 109–118.

УДК 519.21

Лебегівська структура одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями. I.

Г. В. Іваненко, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена дослідженню властивостей нескінченних симетричних згорток Бернуллі, тобто розподілів випадкових величин $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, де ξ_k - незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірністю $\frac{1}{2}$, а збіжний знакододатний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ задовольняє умовам: існує послідовність натуральних чисел $\{m_k\}$, така, що $m_{k+1} - m_k \geq 3$ і при цьому

$$a_{m_k} = a_{m_k+1} + ... + a_{m_{k+1}-1}, \tag{1}$$

причому

$$r_j := \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i \leq a_j, \text{ при } j \notin \{m_k\}. \tag{2}$$

В роботі повністю досліджено лебегівську структуру одного сімейства таких розподілів та виявлено нові феномени. Початкова задача фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір полягає в обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ. В роботі [21] наведено формулу для обчислення розмірності спектра (для симетричного випадку спектр випадкової величини ξ співпадає з множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$) симетричної згортки Бернуллі, що задовольняє умовам (1) та (2):

$$\dim_H S_\xi = \liminf_{k\to\infty}(-\log_{r_{m_{k+1}-1}} A_k), \tag{3}$$

де

$$A_k = 2^{m_1-1}\prod_{j=1}^{k}(2^{m_{j+1}-m_j} - 1). \tag{4}$$

У даній роботі ми конструюємо спеціальний підклас нескінченних згорток Бернуллі, що задовольняє умовам (1) та (2), і досліджуємо фрактальні властивості спектра. З отриманих результатів випливає, зокрема, що формула (7) є, взагалі кажучи, неправильною. Отримані результати підкреслюють важливість досліджень, присвячених проблемам довірчості-недовірчості локально тонких систем покриттів (Vitaly coverings).

Ключові слова: фрактали, згортки Бернуллі, недовірчі системи покриттів, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

© Г. В. Іваненко, Г. М. Торбін, 2014

Abstract. The paper is devoted to the study of fractal properties of infinite symmetric Bernoulli convolutions, i.e., distributions of random variables $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, where ξ_k are independent random variables taking values 0 and 1 with probabilities $\frac{1}{2}$, and a convergent positive series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ satisfies the following conditions: there exists a sequence of positive integers $\{m_k\}$ such that $m_{k+1} - m_k \geq 3$ and

$$a_{m_k} = a_{m_k+1} + ... + a_{m_{k+1}-1},$$

with

$$r_j := \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i \leq a_j, \text{ for } j \notin \{m_k\}.$$

The Lebesgue structure of a family of such distributions is studied in details and new phenomena are observed. The determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of the spectrum S_ξ is the initial step in the fractal analysis of singularly continuous probability measures. In [21] one can find the following formulae for the determination of the dimension of the spectrum (for the symmetric case the spectrum of the random variable ξ coincides with the set of incomplete sums of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$) of symmetric Bernoulli convolution satisfying conditions (1) and (2):

$$\dim_H S_\xi = \liminf_{k \to \infty} (-\log_{r_{m_{k+1}-1}} A_k),$$

where

$$A_k = 2^{m_1-1} \prod_{j=1}^{k} (2^{m_{j+1}-m_j} - 1).$$

In this paper we construct a special subclass of infinite Bernoulli convolutions satisfying conditions (1) and (2), and study fractal properties of corresponding spectra. From the obtained results it follows, in particular, that the formulae (7) is, generally speaking, not true. The obtained results stress the importance of researches devoted to problems of faithfulness resp. non-faithfulness of Vitaly coverings.

Key words: fractals, Bernoulli convolutions, non-faithful covering systems, singularly continuous probability measures.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

Нехай $\{\xi_k\}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають значення 0 та 1 з імовірностями $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$. Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ - збіжний знакододатній ряд. Тоді розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{5}$$

називається *нескінченною симетричною згорткою Бернуллі.* За теоремою Джессена-Вінтнера [16] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто її функція розподілу буде або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або сингулярно неперервною. Теорема П.Леві [20] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра μ_ξ —

дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \tag{6}$$

Тому з умови $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$ випливає неперервність розподілу. Зауважимо, що вивчення лебегівської структури таких розподілів триває вже більше 80 років. Навіть у найпростішому випадку $a_k = \lambda^k,\ \lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ властивості таких розподілів ще погано вивчені. P.Erdös довів ([8]), що коли $\frac{1}{\lambda}$ є числом Пізо (тобто алгебраїчним число більше 1, для якого всі інші корені мінімального многочлена за модулем менші за 1), то ймовірнісна міра μ_ξ є сингулярною оскільки її перетворення Фур'є-Стілтьєса не прямує до нуля на нескінченності. На сьогодні все ще залишається відкритим питання чи існують інші значення $\lambda \in (1/2, 1)$, для яких міра μ_ξ є сингулярною відносно міри Лебега. Зауважимо, що P. Erdös [9] довів існування такого $d > 0$, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) $\lambda \in (1-d, 1)$ міра μ_ξ є абсолютно неперервною. J.-P.Kahane [17] довів що розмірність Хаусдорфа-Безиковича тих значень параметра $\lambda \in (1-\delta, 1)$, при яких μ_ξ не є абсолютно неперервною відносно міри Лебега, прямує до нуля при спаданні до нуля δ. У 1995 році Б. Соломяк [25] довів, що для μ_ξ є абсолютно неперервною (зі щільністю в L_2) для майже всіх (в сенсі міри Лебега) $\lambda \in (1/2, 1)$. Нарешті, зовсім нещодавно P. Shmerkin ([24]) довів, що множина тих значень параметра $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$, при яких μ_ξ не є абсолютно неперервною відносно міри Лебега, має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

У випадку, коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається «достатньо швидко», тобто коли $a_k \geq r_k := \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_k$ для всіх достатньо великих k, лебегівська структура та фрактальні властивості згорток Бернуллі вивчені достатньо гарно (див. [1] та огляд літератури в цій роботі). У той же час випадок, коли $a_k < r_k$ виконується для нескінченої кількості індексів k, є все ще мало дослідженим, хоча кількість досліджень у цьому напрямку за останні 10 років суттєво зросла (див., наприклад,[21, 12, 10, 15, 18, 19]; до цього класу ймовірнісних розподілів попадають також згадані вище згортки Бернуллі при $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$). Ймовірнісні міри такого виду належать до так званих згорток Бернуллі з «суттєвими перекриттями» ([12]). Основною задачею даної роботи є вивчення фрактальних властивостей розподілу випадкової величини ξ для випадку коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ задовольняє умовам: $\exists \{m_k\}$:

$$a_{m_k} = a_{m_k+1} + ... + a_{m_{k+1}-1},$$

причому

$$m_{k+1} - m_k \geq 3, \quad r_j \leq a_j, \text{ при } j \notin \{m_k\}.$$

Першими роботами у цьому цьому напрямку є статті [12, 13], які були присвячені вивченню властивостей розподілу при $m_k = 3k - 2$. Зокрема, у цих роботах доведено чисту сингулярність розподілу μ_ξ, знайдено явний вираз для обчислення розмірності

Хаусдорфа $\dim_H \mu_\xi$ ймовірнісної міри μ_ξ та строго доведено формулу для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ випадкової величини ξ:

$$\dim_H S_\xi = \liminf_{k\to\infty} \log_{r_{3k}} 7^{-k} \ .$$

У роботі [10] отримані деякі результати стосовно тополого-метричних і фрактальних властивостей та лебегівської структури розподілу для випадку, коли послідовність $\{m_k\}$ утворює арифметичну прогресію. У роботі [21] зроблено спробу узагальнити вказані вище результати на випадок довільної послідовності $\{m_k\}$. Зокрема, у цій роботі наведено формулу для обчислення розмірності спектра (для симетричного випадку спектр випадкової величини ξ співпадає з множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$) симетричної згортки Бернуллі, що задовольняє умовам (1) та (2):

$$\dim_H S_\xi = \liminf_{k\to\infty}(-\log_{r_{m_{k+1}-1}} A_k), \tag{7}$$

де

$$A_k = 2^{m_1-1}\prod_{j=1}^{k}(2^{m_{j+1}-m_j}-1). \tag{8}$$

Нескладно показати, що число $\liminf\limits_{k\to\infty}(-\log_{r_{m_{k+1}-1}} A_k)$ є верхньою оцінкою розмірності спектра. Відомо, що для багатьох досконалих самоподібних множин канторівського типу верхня оцінка розмірності, отримана шляхом покриття цих множин "породжуючими"циліндрами, є непокращуваною (співпадає зі справжнім значенням розмірності), хоча факт непокращуваності потребує ретельного обгрунтування, оскільки "очевидно правильні"твердження щодо непокращуваності верхніх оцінок розмірності можуть бути хибними навіть для досконалих ніде не щільних множин канторівського типу.

Розподіл випадкової величини ξ починає демонструвати дещо несподівані властивості у випадку необмеженості послідовності $\{m_k\}$. Зокрема, у роботі [15] показано, що у випадку необмеженості цієї послідовності міра μ_ξ може бути абсолютно неперервною відносно міри Лебега (що є неможливим при обмеженості $\{m_k\}$). У даній статті ми демонструємо нові феномени, що виникають у випадку необмеженості $\{m_k\}$. З цією метою ми досліджуємо фрактальні властивості розподілів зі спеціального підсімейство згорток Бернуллі, які породжуються збіжним знакододатним рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, що задовольняє умовам: існує послідовність натуральних чисел $\{m_k\}$, така, що $m_{k+1}-m_k \geq 3$ і при цьому

$$a_{m_k} = a_{m_k+1} + ... + a_{m_{k+1}-1}, \tag{9}$$

причому

$$r_j \leq a_j, \text{ при } \ j \notin \{m_k\}, \tag{10}$$

$$r_j = a_j, \text{ при } \ j \notin \{m_k\}, j \notin \{m_k+1\}. \tag{11}$$

З отриманих результатів випливає, зокрема, що формула (7) є, взагалі кажучи, неправильною. В роботі також обговорюються причини такої ситуації та методи обчислення розмірності спектрів нескінченних згорток Бернуллі.

2. Про лебегівську структуру та точність верхніх оцінок спектрів нескінченних згорток Бернуллі.

Зауважимо, що при дослідженні лебегівської структури та фрактальних властивостей розподілу ξ без порушення загальності можна вважати, що $m_1 = 1$. У іншому разі випадкову величину ξ можна представити у вигляді $\xi = \psi_1 + \psi_2$, де $\psi_1 = \sum\limits_{k=1}^{m_1-1} \xi_k a_k, \quad \psi_2 = \sum\limits_{k=m_1}^{\infty} \xi_k a_k$. Очевидно, що при цьому лебегівська структура і фрактальні властивості розподілів випадкових величин ξ та ψ_2 співпадають.

Умова (9) рівносильна умові $a_{m_k} = a_{m_k+1} + a_{m_k+2} + ... + a_{m_k+s_k}$. Позначимо

$$\delta_k := \frac{a_{m_k+1}}{r_{m_k+1}}.$$

З умови (10) випливає, що $\delta_k \geq 1$. Беручи до уваги властивості (10) та (11) ряду, отримуємо

$$a_{m_k+j} = r_{m_k+j} = \frac{1}{2^{j-1}} r_{m_k+1}, \quad j \in \{2, ..., s_k\}.$$

Так як $a_{m_k+1} + r_{m_k+1} = r_{m_k}$, то

$$r_{m_k+1} = \frac{1}{\delta_k + 1} \cdot r_{m_k}; \quad a_{m_k+1} = \frac{\delta_k}{\delta_k + 1} \cdot r_{m_k}. \tag{12}$$

З умови (9) випливає, що $r_{m_k} - a_{m_k} = r_{m_{k+1}-1}$. Тому

$$r_{m_k+s_k} = r_{m_{k+1}-1} = \frac{1}{2^{s_k-1}} \cdot r_{m_k+1} = \frac{1}{2^{s_k-1}} \cdot \frac{1}{\delta_k + 1} \cdot r_{m_k}. \tag{13}$$

Оскільки $r_{m_{k+1}-1} = \frac{1}{2^{s_k-1} \cdot (\delta_k+1)} \cdot r_{m_k} = r_{m_k} - a_{m_k}$ і $\quad a_{m_k} + r_{m_k} = r_{m_k-1}$, то

$$a_{m_k+1} = \frac{2^{s_k-1} \cdot \delta_k}{2^{s_k} \cdot (\delta_k + 1) - 1} \cdot r_{m_k-1}; \; r_{m_k+1} = \frac{2^{s_k-1}}{2^{s_k} \cdot (\delta_k + 1) - 1} \cdot r_{m_k-1}. \tag{14}$$

Тому

$$a_{m_k+j} = r_{m_k+j} = \frac{1}{2^{j-1}} \cdot r_{m_k+1} = \frac{2^{s_k-1}}{2^{j-1} \cdot 2^{s_k} \cdot (\delta_k + 1) - 1} \cdot r_{m_k-1}, \forall j \in \{2, ..., s_k\}. \tag{15}$$

Отже,

$$r_{m_{k+1}-1} = \frac{1}{2^{s_k} \cdot (\delta_k + 1) - 1} \cdot r_{m_k-1} \tag{16}$$

Для заданого ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ нехай $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_k, ...)$. Якщо для точки x існує послідовність $\{\alpha_k(x)\}$ така, що $\alpha_k(x) \in \{0, 1\}$ і при цьому має місце рівність $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) a_k$, то формально записуватимемо

$$x = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1(x) \; \alpha_2(x) \; ... \; \alpha_n(x) \; ...} \tag{17}$$

Рівність (17) називається $\overrightarrow{a}$– представленням точки x зі спектру розподілу випадкової величини ξ ([1]).

$\overrightarrow{a}$-циліндром рангу m (циліндром рангу m $\overrightarrow{a}$-представлення) з основою $c_1c_2\dots c_m$ $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина

$$\Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1c_2\dots c_m} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{m} c_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \epsilon_k a_k, \quad \epsilon_k \in \{0,1\} \right\}. \tag{18}$$

$\overrightarrow{a}$-циліндричним відрізком рангу m (циліндричним відрізком рангу m $\overrightarrow{a}$-представлення) з основою $c_1c_2\dots c_m$ $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина

$$\Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1c_2\dots c_m} := [\inf \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1c_2\dots c_m}; \sup \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1c_2\dots c_m}]. \tag{19}$$

Очевидно, що

$$\inf \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m} = \inf \Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m}, \sup \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m} = \sup \Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m}; \quad \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m} = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m 0} \cup \Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m 1}$$

і $|\Delta^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_m}| = r_m \to 0$ $(m \to \infty)$.

З умови (11) випливає, що $\Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_{m_k+j}} = \Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_{m_k+j}0} \cup \Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_{m_k+j}1}$, $\forall j \in \{1,2,...,s_k-1\}$.

З умови (9) випливає, що $\Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_{m_k}\underbrace{10\dots0}_{s_k+1}} = \Delta'^{\overrightarrow{a}}_{c_1\dots c_{m_k}\underbrace{01\dots1}_{s_k+1}}$.

Перейдемо до дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини ξ.

Теорема 1. *Випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли одночасно збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k - 1) \tag{20}$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} \tag{21}$$

і сингулярно неперервний в іншому випадку.

Доведення. З властивостей циліндричних множин, рівностей (14), (16) та рівності

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_k+s_k} \xi_j a_j$$

випливає, що дана випадкова величина є випадковою величиною з незалежними $\widetilde{Q}$-символами ([1]), причому матриці $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$ мають наступну структуру.

Якщо $i \in W_k := \{0,1,...,2^{s_k-1}-1, 2^{s_k-1}+1, ..., 2^{s_k-1}+2^{s_k}-1, 2^{s_k-1}+2^{s_k}+1, ..., 2^{s_k+1}\}$, то $\widetilde{q}_{ik} = \frac{1}{2^{s_k}(\delta_k+1)-1}$. При цьому $\widetilde{p}_{ik} = \frac{2}{2^{s_k+1}}$ якщо $i = 2^{s_k}-1$, і $\widetilde{p}_{ik} = \frac{1}{2^{s_k+1}}$ для всіх інших $i \in W_k$.

Якщо $i \in \{2^{s_k-1}, 3\cdot 2^{s_k-1}\}$, то $\widetilde{q}_{ik} = \frac{2^{s_k-1}(\delta_k-1)}{2^{s_k}(\delta_k+1)-1}$, $\widetilde{p}_{ik} = 0$.

У відповідності до [1] випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_i \sqrt{\widetilde{p}_{ik}\widetilde{q}_{ik}}\right) > 0, \qquad (22)$$

що у нашому випадку рівносильно умові

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2^{s_k+1}-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2^{s_k+1}(2^{s_k}(\delta_k+1)-1)}} > 0. \qquad (23)$$

Нескінченний добуток (23) збігається тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2^{s_k}(\delta_k-1)+(3-2\sqrt{2})}{2^{s_k}(\delta_k+1)-1}\right) > 0, \qquad (24)$$

що рівносильно збіжності знакододатного ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{s_k}(\delta_k-1)+(3-2\sqrt{2})}{2^{s_k}(\delta_k+1)-1},$$

який збігається тоді і тільки тоді, коли одночасно збігаються ряди (20) та (21).

Оскільки випадкова величина ξ має чистий лебегівський розподіл, то при розбіжності хоча б одного з рядів (20) чи (21), ξ має або чисто дискретний розподіл, або чисто сингулярно неперервний розподіл. Оскільки неперервність розподілу випливає з симетричності ($p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$) та цитованої вище теореми Леві, то отримуємо висновок про сингулярну неперервність розподілу. □

Перейдемо тепер до фрактальних властивостей спектра розподілу випадкової величини ξ. Позначимо $d_k := 2^{s_k}\cdot(\delta_k+1)-1$. Тоді

$$r_{m_{k+1}-1} = \frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_k},$$

$$a_{m_k} = \frac{2^{s_k-1}\cdot(\delta_k+1)-1}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{k-1}\cdot d_k},$$

$$a_{m_k+1} = \frac{2^{s_k-1}\cdot\delta_k}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{k-1}\cdot d_k}; \quad r_{m_k+1} = \frac{2^{s_k-1}}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{k-1}\cdot d_k},$$

$$a_{m_k+j} = \frac{2^{s_k-1}}{2^{j-1}d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{k-1}\cdot d_k} = \frac{1}{2^{j-1}}\cdot r_{m_k+1}, \forall j\in\{2,\ldots,s_k\}.$$

У відповідності до роботи [21] розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ дорівнює

$$\dim_H S_\xi = \liminf_{k\to\infty}\left(\log_{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_k}(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_k+1}-1)\right) =$$

$$= \liminf_{k\to\infty}\frac{\ln(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_k+1}-1)}{\ln((2^{s_1}\cdot(\delta_1+1)-1)(2^{s_2}\cdot(\delta_2+1)-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_k}\cdot(\delta_k+1)-1))} \geq$$

$$\geq \liminf_{k\to\infty}\frac{\ln(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_k+1}-1)}{\ln((2^{s_1}\cdot(\delta_1+1))(2^{s_2}\cdot(\delta_2+1))\cdot\ldots\cdot(2^{s_k}\cdot(\delta_k+1)))} \geq$$

$$\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln(2^{s_1}\cdot 2^{s_2}\cdot \ldots \cdot 2^{s_k})}{\ln(2^{s_1+s_2+\ldots+s_k}\cdot(\delta_1+1)(\delta_2+1)\cdot\ldots\cdot(\delta_k+1))} =$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \frac{(s_1+s_2+\ldots+s_k)\cdot \ln 2}{(s_1+s_2+\ldots+s_k)\cdot\ln 2 + \ln((\delta_1+1)(\delta_2+1)\cdot\ldots\cdot(\delta_k+1))}.$$

Виберемо $\delta_k = 2^{2^{k-1}}-1, s_k = 2^k$.

Тоді $s_1+s_2+\ldots+s_k = 2^1+2^2+\ldots+2^k = 2^{k+1}-2$.

$$(\delta_1+1)(\delta_2+1)\cdot\ldots\cdot(\delta_k+1) = 2^{2^0}\cdot 2^{2^1}\cdot\ldots\cdot 2^{2^{k-1}} = 2^{2^k-1}.$$

Тоді

$$\dim_H S_\xi \geq \liminf_{k\to\infty}\frac{(2^{k+1}-2)\cdot\ln 2}{(2^{k+1}-2)\cdot\ln 2+(2^k-1)\cdot\ln 2} = \frac{2}{3}$$

Отже, у відповідності до результатів роботи [21] маємо

$$\dim_H S_\xi \geq \frac{2}{3}. \tag{25}$$

З іншого боку, спектр S_ξ можна покрити відрізками, які не є циліндричними відрізками, але є об'єднаннями суміжних циліндрів рангу $m_{k+1}-1$, внутрішність яких має непорожній перетин зі спектром. $\alpha-$об'єм такого покриття дорівнює

$$(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_{k-1}+1}-1)\cdot\left(2\cdot\left(\frac{2^{s_k-1}}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_k}\right)^\alpha+\left(\frac{2^{s_k}-1}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_k}\right)^\alpha\right)\leq$$

$$\leq 2^{s_1+1}\cdot 2^{s_2+1}\cdot\ldots\cdot 2^{s_{k-1}+1}\cdot\frac{2\cdot(2^{s_k-1})^\alpha+(2^{s_k})^\alpha}{(d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_k)^\alpha} =$$

$$= 2^{s_1+s_2+\ldots s_{k-1}+(k-1)}\cdot\frac{(2^{s_k-1})^\alpha\cdot(2+2^\alpha)}{[(2^{s_1}(\delta_1+1)-1)\cdot\ldots\cdot(2^{s_k}\cdot(\delta_k+1)-1)]^\alpha}\leq$$

$$\leq 2^{s_1+s_2+\ldots s_{k-1}+(k-1)}\cdot\frac{(2^{s_k-1})^\alpha\cdot(2+2^\alpha)}{[2^{s_1-1}(\delta_1+1)\cdot\ldots\cdot 2^{s_k-1}(\delta_k+1)]^\alpha} =$$

$$= 2^{2^k-2+(k-1)}\cdot\frac{(2+2^\alpha)\cdot(2^{s_k-1})^\alpha}{(2^{2^k-1}\cdot 2^{2^k-1-k})^\alpha\cdot(2^{s_k-1})^\alpha} = (2+2^\alpha)\cdot\frac{2^{2^k+k-3}}{(2^{2^{k+1}-k-2})^\alpha} =: V(\alpha,k).$$

Якщо $\alpha > \frac{1}{2}$, то $V(\alpha,k)\to 0$ при $k\to\infty$. Отже,

$$\dim_H S_\xi \leq \frac{1}{2}, \tag{26}$$

що суперечить оцінці (25) і показує неправильність формули для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини ξ, яка наведена в роботі [21]. Яка ж причина цього явища? Однією з суттєвих (на наш погляд) причин цього явища є той факт, що сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів описаного вище $\widetilde{Q}$-представлення (це сімейство співпадає з сімейством циліндричних відрізків $\overrightarrow{a}$-зображення рангів $m_{k+1}-1 (k\in N)$) не є, взагалі кажучи, довірчим (див. [3] для детальнішого обговорення проблем довірчості та недовірчості локально тонких систем покриттів) для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича підмножин спектра випадкової величини ξ. Застосовуючи класичну теорему Біллінгслі ([5]), нескладно показати, що при $\delta_k = 2^{2^{k-1}} - 1, s_k = 2^k$ має місце наступна рівність

$$\dim_H(S_\xi, \Phi(\widetilde{Q})) = \frac{2}{3},$$

що, беручи до уваги оцінку (26), доводить факт недовірчості сімейства $\Phi(\widetilde{Q})$.

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування"(МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions.// Bull. Sci. Math. – 2008. – 132, no. 8. – P. 711–727.

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits. //Bull. Sci. Math. – 2005. – 129, no. 4.– P.356–367.

[3] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorf dimension faithfulness for covering families and its application. //arXiv:1305.6036 [math.PR] (submitted to Math. Res.Let.)

[4] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols.//Methods of Functional Analysis and Topology. –2011. –17, no.2. – P. 97–111.

[5] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II.//Ill. J. Math. –1961. – 5. – P. 291–298.

[6] *Chatterji S.D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports".// Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. –1964.– 3.– P. 184–192.

[7] *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions.// Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. –1998. –124. –P. 135–149.

[8] *Erdös P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions.// Amer. J. Math.–1939. –61. –P. 974–975.

[9] *Erdös P.* On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions.// American Journal of Mathematics.–1940.–62.– P. 180—186.

[10] *Гончаренко Я., Микитюк І.* Про фрактальну оцінку кількості циліндричних двійкових зображень числа з допомогою одного спеціального ряду //Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1: Фізико-матемтичні науки. –2006. –7. – С. 230 – 244.

[11] *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Probability distributions on the set of incomplete sums of a convergent positive series.// International Conference "Skorokhod Space. 50 years on", - 17-23 June 2007, Kyiv, - Part II., - P.159-160.

[12] *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal properties of some Bernoulli convolutions.// Theor. Probability and Math.Statist. - 2008. –79. – P.39–55.

[13] *Гончаренко Я., Працьовитий М., Торбін Г.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду.//Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1: Фізико-матемтичні науки. –2005. –6. – С. 210 – 224.

[14] *Hochman M., Shmerkin P.* Local entropy averages and projections of fractal measures.// Annals of Mathematics (2), –2012. –175, no.3. –P. 1001–1059.

[15] *Іваненко Г., Лебідь М., Торбін Г.* Лебегівська структура та тонкі фрактальні властивості одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями. //Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1: Фізико-матемтичні науки. –2012. –13, no.2. – С. 47 – 60.

[16] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function// Trans.Amer.Math.Soc. -1935. – 38. –P.48–88.

[17] *Kahane J.-P.* Sur la distribution de certaines series aleatoires. //Colloque de Thŕeorie des Nombres (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1969), Bull. Soc. Math. France, Mem. No. 25, Soc. Math., France (1971).–P. 119–122.

[18] *Лебідь М., Торбін Г.* Сингулярність та тонкі фрактальні властивості одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями. //Теорія ймовірностей та математична статистика.–2012.–87. – С. 89–104.

[19] *Лебідь М., Торбін Г.* Сингулярність та тонкі фрактальні властивості одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями II.//Український математичний журнал. –2015. – 67, no. 12. – С. 1667–1678.

[20] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes.// Studia Math. –1931. –3. –P. 119–155.

[21] *Mauldin R.D., Simon K.* The equivalence of some Bernoulli convolutions to Lebesgue measure. //Proceedings of the American Mathematical Society. –1998. –9. –P.2733—2736.

[22] *Pratsiovytyi M., Torbin G.* A class of random variables of the Jessen-Wintner type.//Proceedings of the Ukrainian National Academy of Sciences.–1998. –no.4, –P. 48–54.

[23] *Shiryaev A.N.* Probability. –New York: Springer-Verlag, 1996.

[24] *Shmerkin P.* On the exceptional set for absolute continuity of Bernoulli convolutions.//Geom. Funct. Anal.–2014. –24, no. 3. –P. 946—958.

[25] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem).// Ann. of Math. –1995. –142. no. 3. –P. 611–625.

[26] *Torbin G.* Multifractal analysis of singularly continuous probability measures.//Ukrainian Math. J. –2005.–57, no. 5. –P. 837–857.