Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2).— С. 6–17.

G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II.

І. І. Гарко, Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена розвитку нового методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження G-відображень (див. [3]). Показано застосування запропонованого методу для розвитку метричної теорії I-Q_∞-розкладів дійсних чисел.

Ключові слова: фрактали, DP-перетворення, G-ізоморфізм систем числення, Q_∞-зображення, I-Q_∞-зображення, довірчі системи покриттів, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

Abstract. The paper is devoted to the development of a new method for the construction of metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers via of spacial mappings, under which symbols of a given representation are mapped into the same symbols of other representation from the same family, and they preserve the Lebesgue measure and the Hausdorff-Besicovitch dimension (for such mappings the set of points of discontinuity can be everywhere dense). These mappings are said to be G-mappings (G-isomorphisms of representations)[3]. To investigate the DP-properties of such mappings, we study the problem connected with the faithfulness for the calculation the Hausdorff-Besicovitch dimension of fine covering systems which do not coincide with the systems of cylinders - the family of sets which are unions of neighboring cylinders of the same rank, that belongs to the common cylinder of the previous rank. We show application of the proposed method to the development of metric theory of I-Q_∞-representations of real numbers.

Key words: fractals, DP-transformations, G-isomorphism of expansions, Q_∞-expansions, I-Q_∞-expansions, faithful covering systems, singularly continuous probability measures.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

На сьогодні існує багато систем числення, кожна з яких має свою специфіку при дослідженні певних математичних об'єктів (див., наприклад, [1, 17, 8, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 28, 29]). Особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та кристалізація методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього усвідомлення відповідних методів побудови цих теорій. Важливими напрямами розвитку методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича є розвиток теорії перетворень, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад, [9, 10, 17, 27]) та дослідження довірчості (недовірчості) систем циліндрів, породжених різними системами числення, для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад, [3, 6, 17, 8, 3, 15, 16, 18, 3, 27])

Дана робота є продовженням роботи [3] та присвячена новому методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій для I-Q_∞-зображення дійсних чисел та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел з нескінченним алфавітом на основі дослідження спеціальних відображень, які символи будь-якого зображення переводять в ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями вказаних вище відображень. З цією метою ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞- і I-Q_∞-зображенням.

Нагадаємо поняття I-Q_∞-розкладу (зображення) дійсних чисел, яке було введено в розгляд в роботі [4]. Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(I)}{2^k} =: 0, \beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_k(I)..., \quad \beta_k(I) \in \{0, 1\}.$$

Для тих чисел з одиничного відрізка, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді.

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, ..., q_k, ...)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. При фіксованому дійсному числі $I \in [0, 1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\beta_k(I)\}$) та фіксованому стохастичному векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\beta_1(I) = 1$ (справа наліво, якщо $\beta_1(I) = 0$) на зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\right| = q_{\alpha_1}$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок k $(k > 1)$**.** Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\beta_k(I) = 1$; і справа наліво, якщо $\beta_k(I) = 0$) на зліченну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, довжини яких

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right| = q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{\alpha_s} \qquad (1)$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}\right| : \ldots : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1}\right| : \ldots : \left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}m}\right| : \ldots = q_0 : \ldots : q_1 : \ldots : q_m : \ldots .$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in \{0,1,2\ldots\}$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \supset \ldots,$$

таких, що $|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}$, ..., $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, ...

І навпаки, для кожної точки $x \in (0,1)$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-Q_∞-розкладом (зображенням) точки x.

Зауваження 1. *При $I = 1$ отримуємо Q_∞-розклад як частковий випадок I-Q_∞-розкладу.*

У роботі [25] запропоновано наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞—-символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ пропонується ввести в розгляд відображення

$$\varphi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Зокрема, були отримані наступні результати:

Лема 1 ([25])**.** *При довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа I відображення φ зберігає міру Лебега на $(0,1)$.*

Зауваження 2. *Як наслідок з цієї леми ми отримуємо висновок про ізоморфність метричних теорій Q_∞-розкладів та I-Q_∞-розкладів дійсних чисел.*

Теорема 1 ([25])**.** *1) Якщо $I = 0$ або $I = 1$, то $\varphi(x)$ неперервна (і навіть лінійна) на $(0,1)$;*

2) якщо $I = 0, \beta_1(I)\beta_2(I)...\beta_{k-1}(I)0(1)$, то $\varphi(x)$ буде неперервною на всіх циліндрах $(k+1)$-го рангу, і всі точки поділу рангу m при $m \le k$ є точками розриву;

3) якщо серед $\beta_k(I)$ є безліч «0» та «1» (тобто I є двійково-ірраціональною точкою), то $\varphi(x)$ буде розривною в усіх I-Q_∞-раціональних точках.

Теорема 2 ([25]). *Якщо виконується умова*

$$\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} q_k} \le c, \ \forall i \in N, . \tag{2}$$

то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

З метою дослідження DP-властивостей введеного вище відображення φ, у цій же роботі досліджувалось питання довірчості спеціальних сімейств покриттів, пов'язаних з вищезгаданими розкладами, для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Зокрема, було запропоновано розглядати сімейство покриттів $\hat{\Phi}(Q_\infty)$, яке складається з циліндрів та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Аналогічне покриття було означене для I-Q_∞-зображення: через $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ будемо позначати сімейство множин, які є об'єднанням суміжних циліндрів I-Q_∞-розкладу одного рангу і належать до спільного циліндра попереднього рангу. Була отримана наступна теорема.

Теорема 3 ([25]). *Якщо системи $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ і $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Зауваження 3. *З останньої теореми випливає, що для доведення того, що φ завжди зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, досить довести довірчість сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$.*

Проблема довірчості сімейств множин, які є об'єднанням суміжних циліндрів одного рангу і належать до спільного циліндра попереднього рангу досліджувалася М.В. Працьовитим, О.М. Барановським, Б. Гетьманом, Ю. Хворостіною та ін. для розкладів Люрота, поворотних розкладів Люрота, розкладів Остроградського-Серпінського-Пірса, розкладів Енгеля (див., наприклад, [2, 14]). Для всіх вказаних вище розкладів виконується наступна умова: існує константа $c \ge 1$ така, що

$$\frac{1}{c} \le \frac{|\Delta^F_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)m}|}{|\Delta^F_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)(m+1)}|} \le c, \quad \forall x, \forall k \in N, \forall m \in A. \tag{3}$$

Очевидно, що для довільного узагальненого F-розкладу дійсних чисел над алфавітом A (скінченним чи нескінченним) при виконанні умови (3), відповідне сімейство $\hat{\Phi}(F)$ є довірчим (більше того, сімейство $\hat{\Phi}(F)$ є порівнянним, тобто існує константа K_0 така, що $H^\alpha(E) \le H^\alpha(E, \hat{\Phi}(F)) \le K_0 H^\alpha(E), \ \forall E$).

Зауважимо, що навіть для звичайного Q_∞-розкладу умова (3), взагалі кажучи, не виконується. На початку 2014 року у роботі І. Гарко, яка стала призером конкурсу студентських наукових робіт імені А.В.Скорохода з теорії ймовірностей у 2014 році, було доведено довірчість сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при виконанні умови (2), яка узагальнює вказані вище результати для розкладу Люрота та його знакопочережної модифікації.

У роботі [3] була доведена наступна теорема, яка встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞, а метод, який використовується при її доведення, також дозволяє отримувати загальні достатні умови довірчості сімейств $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-розкладу.

Теорема 4 ([3]). *Нехай $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу.*

Тоді сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.

У цій роботі, яка є продовженням статті [3], буде доведено узагальнення теореми 4 і показано, що при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ відповідне сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, і тим самим буде доведено, що відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Крім того в роботі буде розвинута загальна метрична теорія $I\text{-}Q_\infty$-зображень дійсних чисел.

2. G-ізоморфізм між метричними, розмірнісними та ймовірнісними теоріями Q_∞-розкладів та $I\text{-}Q_\infty$-розкладів

Наступна теорема встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та стохастичного вектора Q_∞.

Теорема 5. *Нехай $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ — сімейство, яке складається з циліндрів $I\text{-}Q_\infty$-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Нехай B — множина точок одиничного відрізка, які мають $I\text{-}Q_\infty$-зображення.*

Тоді сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на множині B при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.

Доведення. Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з одиничного відрізка досить розглядати покриття інтервалами (a_j, b_j), де a_j та b_j належать деякій всюди щільній множині A (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості A множину всіх $I\text{-}Q_\infty$-ірраціональних точок, тобто точок, які не є межовими для жодного циліндра жодного рангу $I\text{-}Q_\infty$-зображення.

Нехай E — довільна підмножина з B. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in A$, $b_j \in A$, $|E_j| \le \varepsilon$.

Для спрощення записів надалі будемо використовувати позначення $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ для позначення циліндра I-Q_∞-розкладу замість $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $(0,1)$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Нехай $I = 0,\beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_k(I)\ldots$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри (n_j+1)-го рангу. Не порушуючи загальності, вважатимемо $\beta_{n_j+1}(I) = 0$, тобто на (n_j+1)-му кроці розбиття кожного з циліндрів n_j-го рангу здійснюватиметься справа наліво.

Нехай M_0 — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j). Якщо $c_j := \sup\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ співпадає з $d_j := \inf\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, то $M_0 = \emptyset$. Якщо $M_0 \neq \emptyset$, то $M_0 \in \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ і $|M_0| \leq |E_j|$.

Розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$ на циліндри (n_j+2)-го рангу.

I. Нехай $\beta_{n_j+2}(I) = 0$, тобто на (n_j+2)-му кроці розбиття кожного з циліндрів (n_j+1)-го рангу здійснюватиметься справа наліво.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+1)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+2}(a_j) = 0$.

Нехай M_1 — об'єднання циліндрів (n_j+2)-го рангу, які повністю містяться в (d_j, b_j), тобто $M_1 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)(\alpha_{n_j+2}(b_j)+i)}$.

Тоді (d_j, b_j) можна покрити за допомогою множини M_1 та циліндра (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$.

Отже, E_j можна покрити чотирма множинами: M_0; M_1;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$.

II. Нехай $\beta_{n_j+2}(I) = 1$, тобто на (n_j+2)-му кроці розбиття кожного з циліндрів (n_j+1)-го рангу здійснюватиметься зліва направо.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+1)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+2}(b_j) = 0$.

Нехай M_1 — об'єднання циліндрів (n_j+2)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, c_j), тобто $M_1 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)(\alpha_{n_j+2}(a_j)+i)}$.

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_1 та циліндра (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$.

Отже, E_j можна покрити чотирма множинами: M_0; M_1;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$.

Якщо $\beta_{n_j+2}(I) = 0$, то розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$ (у випадку, коли $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$) та $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$ на циліндри $(n_j + 3)$-го рангу.

Якщо $\beta_{n_j+2}(I) = 1$, то розіб'ємо циліндри $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\alpha_{n_j+2}(b_j)}$ (у випадку, коли $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$) та $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\alpha_{n_j+2}(a_j)}$ на циліндри $(n_j + 3)$-го рангу.

Можливі наступні випадки.

I.1. $\beta_{n_j+2}(I) = 0$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 0$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром $(n_j + 2)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$, то (a_j, c_j) можна покрити одним циліндром $(n_j + 3)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+2}(a_j) = \alpha_{n_j+3}(a_j) = 0$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів $(n_j + 3)$-го рангу, які повністю містяться в $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, тобто $M_2 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)(\alpha_{n_j+3}(b_j)+i)}$.

Тоді (d_j, b_j) можна покрити за допомогою множин M_1, M_2 та циліндра $(n_j + 3)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Отже, у випадку I.1 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

I.2. $\beta_{n_j+2}(I) = 0$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 1$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j) \setminus M_1$, то $(d_j, b_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром $(n_j + 2)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j) \setminus M_1$, то $(d_j, b_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром $(n_j + 3)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$. При цьому $\alpha_{n_j+3}(b_j) = 0$

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів $(n_j + 3)$-го рангу, які повністю містяться в $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, тобто $M_2 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)(\alpha_{n_j+3}(a_j)+i)}$.

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра $(n_j + 3)$-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Отже, у випадку I.2 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2;
циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j) \setminus M_1$
або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j) \setminus M_1$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

II.1. $\beta_{n_j+2}(I) = 1$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 0$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j) \setminus M_1$, то $(a_j, c_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j) \setminus M_1$, то $(a_j, c_j) \setminus M_1$ можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, тобто $M_2 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)(\alpha_{n_j+3}(b_j)+i)}$.

Тоді (d_j, b_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Отже, у випадку II.1 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2; циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \subset (a_j, c_j) \setminus M_1$
або $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)0} \not\subset (a_j, c_j) \setminus M_1$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

II.2. $\beta_{n_j+2}(I) = 1$ і $\beta_{n_j+3}(I) = 1$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+2)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$, то (d_j, b_j) можна покрити одним циліндром (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$.

Нехай M_2 — об'єднання циліндрів (n_j+3)-го рангу, які повністю містяться в $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$, тобто $M_2 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)(\alpha_{n_j+3}(a_j)+i)}$.

Тоді (a_j, c_j) можна покрити за допомогою множини M_2 та циліндра (n_j+3)-го рангу $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Отже, у випадку II.2 E_j можна покрити п'ятьма множинами: M_0; M_1; M_2; циліндром $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \subset (d_j, b_j)$
або $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)\alpha_{n_j+3}(b_j)}$, якщо $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(b_j)0} \not\subset (d_j, b_j)$;
та циліндром $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\alpha_{n_j+3}(a_j)}$.

Повторюючи аналогічні кроки далі, на певному кроці k отримаємо, що E_j можна покрити за допомогою наступних множин:

1) M_0 — об'єднання циліндрів (n_j+1)-го рангу, які повністю містяться в (a_j, b_j);

2) множинами $M_1, M_2, \ldots, M_k$, де M_k — об'єднання циліндрів (n_j+k+1)-го рангу, які повністю містяться в $(d_j, b_j) \cap \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$, або в $(a_j, c_j) \cap \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$;

3)$L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$ або $L_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\alpha_{n_j+k+1}(b_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$; або $R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}$ або $R_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\alpha_{n_j+k+1}(a_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$;

4)$R_j := \Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\alpha_{n_j+k+1}(b_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 0$;
або $L_j := \Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\alpha_{n_j+k+1}(a_j)}$, якщо $\beta_{n_j+k+1}(I) = 1$.

Нехай $q := \max\limits_i q_i$.

Оскільки M_k є підмножиною циліндра (n_l+k)-го рангу, то $|M_k| \leq q^{n_j+k} \leq q^k$.

Для заданого E_j виберемо $k_0 = k_0(E_j)$ таке, що $q^k < |E_j| \forall k \geq k_0$. Тоді $|\Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}| \leq |E_j|$ та $|\Delta_{\alpha_1(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}| \leq |E_j|$, $\forall k \geq k_0$.

Для заданої множини E, дійсних чисел $\alpha \in (0,1]$ та $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta \in (0,\alpha)$. Тоді α-об'єм описаного вище покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ дорівнює:

$$\sum_{i=0}^{k} |M_i|^\alpha + |L_j|^\alpha + |R_j|^\alpha \leq \sum_{i=1}^{\infty} |M_i|^{\alpha-\delta} \cdot |M_i|^\delta + (1 + \frac{2}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha \leq$$

$$\leq |E_j|^{\alpha-\delta} \sum_{i=0}^{\infty} |M_i|^\delta + (1 + \frac{2}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta} \leq$$

$$\leq |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^{i\delta} + (1 + \frac{2}{q_0^\alpha}|E_j|^{\alpha-\delta}) = |E_j|^{\alpha-\delta}(1 + \frac{2}{q_0^\alpha} + \frac{1}{1-q^\delta}).$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0$ множину E_j можна покрити за допомогою скінченної кількості множин з сімейства $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$, діаметр кожної з яких не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$. Відповідний α-об'єм покриття не перевищує $S(\alpha,\delta)|E_j|^{\alpha-\delta}$, де $S(\alpha,\delta) = 1 + \frac{2}{q_0^\alpha} + \frac{1}{1-q^\delta}$.

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \delta \in (0,\alpha)$ і довільної множини $E \subset B$ маємо:

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)) \leq S(\alpha,\delta) H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому $\dim_H(E, \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)) \leq \dim_H(E) + \delta, \forall \delta \in (0,\alpha)$, а отже

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)) \leq \dim_H(E),$$

а тому доведено і рівність

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \subset B$. □

Таким чином наслідком теорем 6 і 7 роботи [3] та доведеної вище теореми є наступний результат:

Теорема 6. *Відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

З леми 1 та доведеної щойно теореми випливає, що відображення φ є G-ізоморфізмом.

3. Про метричну теорію I-Q_∞-розкладів дійсних чисел

У роботі [25] було доведено, що, незалежно від вибору стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа I, відображення φ зберігає міру Лебега на $(0,1)$. Як наслідок цього факту ми отримуємо висновок про ізоморфність метричних теорій Q_∞-розкладів та I-Q_∞-розкладів дійсних чисел.

Оскільки метрична теорія Q_∞-розкладів розроблена досить добре (див. [5], [4]), то як наслідок того факту що відображення φ зберігає міру Лебега, отримаємо наступну серію результатів щодо метричної теорії I-Q_∞-розкладів дійсних чисел.

Теорема 7. *Нехай* $\{\alpha_k(x)\}$ *- послідовність символів* I-Q_∞*-розкладу дійсного числа* x*. Якщо стохастичний вектор* $Q_\infty = (q_0, q_1, ..., q_k, ...)$ *має скінченну ентропію* $H = -\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i < \infty$*, то для довільного дійсного числа* $I \in [0,1]$ *та* λ*-майже всіх* $x \in [0,1)$ *виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_n(x)}|} = e^{-H}.$$

Теорема 8. *Нехай* $\{\alpha_k(x)\}$ *- послідовність символів* I-Q_∞*-розкладу дійсного числа* x*. Для* λ*-майже всіх* $x \in [0,1)$ *виконується*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\alpha_k(x) = i : \quad 1 \le k \le n\}}{n} = q_i > 0, \forall i \in N.$$

Нехай $C[Q_\infty, \{V_k\}] = \{x : x = \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \alpha_k \in V_k, V_k \subset N_0\}$.

Лема 2.

$$\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = 0 \ \ \textit{тоді і тільки тоді, коли} \ \ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i\notin V_k} q_i\right) = +\infty. \qquad (4)$$

З метою доведення доведення останньої леми нагадаємо загальний результат Г.М.Торбіна по метричній теорії узагальнених F-розкладів (див. [1] для ілюстрації застосування цього результату для розкладів Остроградського-Серпінського-Пірса).

Нехай $x = \Delta^F_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ – узагальнений F-розклад дійсних чисел над послідовністю алфавітів A_k.

$C[F, \{V_k\}] = \{x : x = \Delta^F_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \alpha_k \in V_k, V_k \subset A_k\}$.

Позначимо через $F_k = \{x = \Delta^F_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}, \alpha_j \in V_j, j = \overline{1,k}\}$.

$$\overline{F}_{k+1} := F_k \setminus F_{k+1} = \{x = \Delta^F_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\alpha_{k+1}}, \alpha_j \in V_j, j = \overline{1,k}; \alpha_{k+1} \notin V_{k+1}\}.$$

Тоді $\lambda(C[F,\{V_k\}]) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_{k+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)} \cdot \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)-\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})-\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)-\lambda(\overline{F}_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_0)-\lambda(\overline{F}_1)}{\lambda(F_0)} = \prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right) = 0,$

і $\prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} = +\infty.$

Для Q_∞-розкладу маємо:

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \frac{\lambda(\{x:\ \alpha_1(x)\in V_1,...,\alpha_k(x)\in V_k,\ \alpha_{k+1}\notin V_{k+1}\})}{\lambda(\{x:\ \alpha_1(x)\in V_1,...,\alpha_k(x)\in V_k\}} = \frac{\left(\sum\limits_{i\in V_1} q_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i\in V_2} q_i\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum\limits_{i\in V_k} q_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i\notin V_{k+1}} q_i\right)}{\left(\sum\limits_{i\in V_1} q_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i\in V_2} q_i\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum\limits_{i\in V_k} q_i\right)} = \sum_{i\notin V_{k+1}} q_i.$$

Отже, $\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i\notin V_k} q_i\right) = +\infty.$

Використовуючи лему 2 та той факт, що відображення φ зберігає міру Лебега, отримуємо

Теорема 9. *Нехай* $C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in V_k, V_k \subset N_0\}$.

Тоді $\lambda(C[I\text{-}Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i \notin V_k} q_i\right) = +\infty$.

Зауваження 4. *Використовуючи результати, отримані в даній роботі, можна також дослідити лебегівську структуру та фрактальні властивості розподілів величин з незалежними символами* $I\text{-}Q_\infty$*-розкладів; отримати нові достатні умови довірчості сімейства циліндрів* Q_∞*- та* $I - Q_\infty$*-розкладів, що буде зроблено в нашій наступній статті.*

Література

[1] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. Проект «Наукова книга». — К.: Наукова думка, 2013. — 288 с.

[2] *Барановський О., Працьовитий М., Гетьман Б.* Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2011, № 12. – С. 130–139.

[3] *Гарко І. І., Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I. // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 1.— С. 120–133.

[4] *Гарко І. І., Торбін Г. М.* Про x-Q_∞-зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов'язані // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І. — Київ : Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. — С. 48.

[5] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2008. — Т. 9. — С. 81–103.

[6] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Один випадок довірчості системи покриттів, породженої Q_∞-зображенням // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 13, № 2. — С. 150–159.

[7] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2012. — Т. 86. — С. 150–162.

[8] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К. : Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[9] *Торбін Г. М.* Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають фрактальну розмірність // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. — 2007. — Т. 4. — С. 275–283.

[10] *Торбін Г. М.* Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами // Доповіді НАНУ. — 2008. — Т. 4. — С. 44–50.

[11] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

[12] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arithmetica. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P. 215–230.

[13] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion . — arXiv:1305.6036.

[14] *Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M.* On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. - 2013, № 15. – С. 33–55.

[15] *Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G.* On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 2014. — Vol. 138, no. 3. — P. 440–455.

[16] *Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G.* On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. — arXiv:1507.05672.

[17] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 6, no. 1. — P. 119–128.

[18] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular probability distributions with independent Q^*-digits // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 2005. — Vol. 129, no. 4. — P. 356–367.

[19] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions. — arXiv:math/030802v1.

[20] *Billingsley P.* Ergodic theory and information. — reprint edition. — Huntington, N.Y. : R.E. Krieger Pub. Co., 1978. — xiii, 193 p.

[21] *Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic theory of numbers. — Washington, DC : Mathematical Association of America, 2002. — Vol. 29 of Carus mathematical monographs. — x, 190 p.

[22] *Everett C. J.* Representations for real numbers // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1946. — Vol. 52, no. 10. — P. 861–869.

[23] *Falconer K. J.* Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. — Chichester and New York : Wiley, 1997. — xxii, 288 p.

[24] *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series. Lecture Notes in Mathematics. — Berlin and New York : Springer-Verlag, 1976. — vi, 146 p.

[25] *Garko I.* On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent x-Q_∞-digits. — prepared for Theory of Stochastic Processes.

[26] *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. (Indiana University Mathematics Journal). — 1981. — Vol. 30, no. 5. — P. 713–747.

[27] *Peres Y., Torbin G.* Continued fractions and dimensional gaps.

[28] *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. — 1957. — Vol. 8, no. 3-4. — P. 477–493.

[29] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford science publications. — Oxford and New York : Clarendon Press and Oxford University Press, 1995. — xiii, 295 p.