*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2).— С. 18–24.

# Про новий тип достатніх умов хаусдорфової довірчості циліндрів $Q^*$-розкладів

М. Ібрагім
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У роботі отримано принципово новий тип достатніх умов довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича сімейства $\Phi(Q^*)$ циліндричних відрізків, породжених $Q^*-$розкладами дійсних чисел. Всі відомі на сьогодні достатні умови довірчості сімейств $\Phi(Q^*)$ використовували різні обмеження на елементи $q_{0k}$ та $q_{(s-1)k}$. Ми показуємо, що ці обмеження носять технічний характер і можуть бути суттєво послаблені.

**Ключові слова:** Фрактали, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, довірчі системи покриттів, $Q^*$-зображення, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

Abstract. We develop a new techniques to prove faithfulness for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation of the family $\Phi(Q^*)$ of cylinders generated by $Q^*-$expansion of real numbers. All known sufficient conditions for the the family $\Phi(Q^*)$ to be faithful for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation use different restrictions on entries $q_{0k}$ and $q_{(s-1)k}$. We show that these restrictions are of pure technical nature and can be simplified.

**Key words:** Fractals, Hausdorff-Besicovitch dimension, faithful covering systems, $Q^*$-, singularly continuous probability measures.

**Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80.**

## 1. Вступ

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є основним інструментом дослідження фрактальних множин і його ефективність при дослідженні сингулярно неперервних ймовірнісних мір є також загальновизнаною. Проблема визначення чи хоча б оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв'язанню якої присвячено велику кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Це стало стимулом для розвитку та вдосконалення методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Суть одного з таких методів полягає у зменшенні сімейства допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (бажано - зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Нагадаємо, що сімейство $\Phi$ підмножин з $[0,1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0,1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0,1] = \bigcup\limits_j E_j$.

Нехай $\alpha$ — додатне число. Тоді $\alpha$-мірною мірою Хаусдорфа множини $E$ відносно сімейства $\Phi$ називається

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними $\varepsilon$-покриттями $\{E_j\}$ множини $E$ множинами $E_j \in \Phi$.

*Означення* **1.** Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини $E$ відносно сімейства підмножин $\Phi$ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi) = 0\}.$$

Прикладами довірчих систем покриттів є системи циліндрів, що породжуються $s$-адичним представленням дійсних чисел [6]; системи покриттів, які породжуються $Q$-представленнями [24]; системи покриттів, що породжуються $Q^*$-представленнями, для яких $\inf\limits_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$ [1].

У всіх вказаних вище роботах використовувався спільний метод доведення довірчості: показувалося, існують деякі додатні константи $C$ та $n_0 \in N$ такі, що для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного інтервала $(a;b)$ з $b - a < \varepsilon$ існує не більше як $n_0$ циліндрів із розглядуваного сімейства, які покривають інтервал $(a,b)$ і довжини яких не перевищують $C\cdot(b-a)$. Зрозуміло, що такі системи циліндрів $\Phi$ породжують порівнянні міри Хаусдорфа ([8]), і тому є довірчими.

У 2012 році у роботі М. Ібрагіма та Г.Торбіна було запропоновано новий підхід до знаходження довірчості систем циліндрів, породжених $Q^*$-представленнями. Зокрема, було доведено наступну теорему.

**Теорема A** *Нехай* $q^*_k := \max\{q_{0k}, q_{1k}, \ldots, q_{s-1k}\}$. *Якщо*

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \ldots q_k^*)} = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \ldots q_k^*)} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

*то*

$$\dim_H(E) = \dim_H(E,\Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0,1].$$

Вказана теорема суттєво розширила сімейство довірчих сімейств циліндрів, породжених $Q^*$-розкладами (серед них є і такі, які породжують непорівнянні міри Хаусдорфа). З неї, зокрема, легко випливає довірчість системи циліндрів, яка породжена наступною матрицею

$$Q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10k} \cdots & \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{2} - \frac{1}{10k} & \cdots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{2} - \frac{1}{10k} & \cdots \\ \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10k} \cdots & \end{pmatrix}$$

Теорема А також дозволила дослідити тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними $Q^*$-символами для випадку, коли елементи матриці $Q^*$ не відділені від нуля.

У той же час, якщо елементи першого та останнього рядка матриці $Q^*$ прямують до 0 досить швидко (наприклад, при s=4, $q_{0k} = q_{3k} = \frac{1}{10^k}$, $\ , q_{1k} = q_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}$) навіть вказана теорема не дає відповіді стосовно того чи є сімейство циліндрів такого $Q^*$-розкладу довірчим.

У наступному розділі, використовуючи новий підхід до доведення довірчості сімейств покриттів, нами буде доведено принципово нові достатні умови довірчості для сімейства циліндрів $Q^*$-розкладу, які зовсім не використовують відділеність елементів першого та останнього рядків матриці $Q^*$ від нуля (чи швидкість їх прямування до нуля).

## 2. Нові достатні умови фрактальної довірчості для сімейств циліндрів $Q^*$-розкладів

**Теорема 1.** *Нехай* $q := \sup\limits_{ik} q_{ik} < 1$. *Тоді сімейство* $\Phi(Q^*)$ *циліндрів, породжених* $Q^*-$*розкладом дійсних чисел, є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку, тобто,*

$$\dim_H E = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0,1].$$

*Доведення.* Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з $[0,1]$ досить розглядати покриття інтервалами $(a_j, b_j)$, де $a_j$ та $b_j$ належать деякій всюди щільній множині $A$ (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості $A$ множину всіх $Q^*$-ірраціональних точок, тобто точок, які не є кінцями циліндрів жодного рангу $Q^*$-зображення ($Q^*$-зображення цих точок не містить 0 в періоді чи цифри s-1 в періоді).

Нехай $E$ — довільна підмножина з $[0,1]$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $\alpha > 0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне $\varepsilon$-покриття множини $E$, $E_j = (a_j, b_j)$, $a_j \in A$, $b_j \in A$, $|E_j| < \varepsilon$.

Для множини $E_j$ існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить $E_j$, але будь-який циліндр більшого рангу не містить $E_j$. У тому випадку, коли $a_j$ та $b_j$ належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1]$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри наступного рангу. З максимальності рангу циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ випливає, що існує хоча б одна точка, яка є кінцем циліндра

$(n_j+1)$-го рангу і яка належить до інтервала $(a_j, b_j)$. В якості такої точки виберемо точку

$$c_j = \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j}(a_j)(\alpha_{n_j+1}(a_j)+1)0\ldots0\ldots},$$

яка є найлівішою точкою поділу $(n_j+1)$-рангу, що належить до $(a_j, b_j)$.

Нехай $M_0 = M_0(j)$ - сукупність циліндрів рангу $n_j+1$, які належать до $(a_j, b_j)$. $M_0$ містить не більше як $s$ циліндрів (якщо точки $a_j$ та $b_j$ належать до двох суміжних циліндрів рангу $n_j+1$, то $M_0$ є порожньою множиною). Тому відповідний $\alpha-$об'єм цих циліндрів не перевищує $s \cdot |E_j|^\alpha$.

Позначимо $d_j := \sup M_0 = \Delta_{\alpha_1(a_j)\ldots\alpha_{n_j}(a_j)\alpha_{n_j+1}(b_j)\ 0\ldots0\ldots}$.

Для покриття множини $E_j$ циліндрами з сімейства $\Phi(Q^*)$ окремо розглянемо покриття множин $(a_j, c_j)$ та $(d_j, b_j)$. Виберемо довільне $\delta \in (0, \alpha)$.

Оцінимо спочатку $\alpha$-об'єм покриття множини $(a_j, c_j)$.

Позначимо через $L_1 = L_1(j)$ сукупність всіх циліндрів рангу $n_j+2$, які належать циліндру $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)}$ і належать до $(a_j, c_j]$. Нехай

$$A_1 = A_1(j) := \{i : i \in \{\alpha_{n_j+2}(a_j)+1, ..., s-1\}\}.$$

Відповідний $\alpha-$ об'єм цих циліндрів дорівнює

$$\sum_{i\in A_1} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ i}|^\alpha \le s \cdot \max_{i\in A_1} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ i}|^\alpha =$$

$$= s \cdot \max_{i\in A_1} \left( |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ i}|^{\alpha-\delta} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ i}|^{\delta} \right) \le$$

$$\le s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \max_{i\in A_1} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(a_j)\ i}|^\delta \le s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (q\,|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j}(a_j)}|)^\delta \le s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot q^\delta.$$

Позначимо через $L_2 = L_2(j)$ сукупність всіх циліндрів рангу $n_j+3$, які належать циліндру $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)}$ і належать до $(a_j, c_j]$. Нехай

$$A_2 = A_2(j) := \{i : i \in \{\alpha_{n_j+3}(a_j)+1, ..., s-1\}\}.$$

Відповідний $\alpha-$ об'єм цих циліндрів дорівнює

$$\sum_{i\in A_2} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\ i}|^\alpha \le s \cdot \max_{i\in A_2} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\ i}|^\alpha =$$

$$= s \cdot \max_{i\in A_2} \left( |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\ i}|^{\alpha-\delta} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\ i}|^{\delta} \right) \le$$

$$\le s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \max_{i\in A_2} |\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+2}(a_j)\ i}|^\delta \le s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (q^2\,|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j}(a_j)}|)^\delta \le s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot q^{2\delta}.$$

Аналогічно, позначимо через $L_k = L_k(j)$ сукупність всіх циліндрів рангу $n_j+k+1$, які належать циліндру $\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)}$ і належать до $(a_j, c_j]$. Нехай

$$A_k = A_k(j) := \{i : i \in \{\alpha_{n_j+k+1}(a_j)+1, ..., s-1\}\}.$$

Відповідний $\alpha-$ об'єм цих циліндрів дорівнює

$$\sum_{i\in A_k}|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\ i}|^{\alpha}\leq s\cdot\max_{i\in A_k}|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\ i}|^{\alpha}=$$

$$=s\cdot\max_{i\in A_k}\left(|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\ i}|^{\alpha-\delta}|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\ i}|^{\delta}\right)\leq$$

$$\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot\max_{i\in A_k}|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(a_j)\ i}|^{\delta}\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(q^k\,|\Delta_{\alpha_1(a_j)\alpha_2(a_j)\ldots\alpha_{n_j}(a_j)}|)^{\delta}\leq s\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot q^{k\delta}.$$

Таким чином, множину $(a_j,c_j)$ можна покрити за допомогою зчисленної кількості циліндрів з сімейств $L_1,L_2,...,L_k,...$. Сумарний $\alpha-$об'єм цих циліндрів не перевищує величини

$$s|E_j|^{\alpha-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k\delta}=\frac{sq^{\delta}}{1-q^{\delta}}\ |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оцінимо тепер $\alpha$-об'єм покриття множини $(d_j,b_j)$.

Позначимо через $R_1=R_1(j)$ сукупність всіх циліндрів рангу $n_j+2$, які належать циліндру $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)}$ і належать до $[d_j,b_j)$. Нехай

$$B_1=B_1(j):=\{i:i\in\{0,...,\alpha_{n_j+2}(b_j)-1\}\}.$$

Відповідний $\alpha-$ об'єм цих циліндрів дорівнює

$$\sum_{i\in B_1}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\ i}|^{\alpha}\leq s\cdot\max_{i\in B_1}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\ i}|^{\alpha}=$$

$$=s\cdot\max_{i\in B_1}\left(|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\ i}|^{\alpha-\delta}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\ i}|^{\delta}\right)\leq$$

$$\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot\max_{i\in B_1}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+1}(b_j)\ i}|^{\delta}\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(q\,|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j}(b_j)}|)^{\delta}\leq s\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot q^{\delta}.$$

Аналогічно, для $k>1$ позначимо через $R_k=R_k(j)$ сукупність всіх циліндрів рангу $n_j+k+1$, які належать циліндру $\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)}$ і належать до $[d_j,b_j)$. Нехай

$$B_k=B_k(j):=\{i:i\in\{0,...,\alpha_{n_j+k+1}(b_j)-1\}\}.$$

Відповідний $\alpha-$ об'єм цих циліндрів дорівнює

$$\sum_{i\in R_k}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\ i}|^{\alpha}\leq s\cdot\max_{i\in B_k}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\ i}|^{\alpha}=$$

$$=s\cdot\max_{i\in B_k}\left(|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\ i}|^{\alpha-\delta}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\ i}|^{\delta}\right)\leq$$

$$\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot\max_{i\in B_k}|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j+k}(b_j)\ i}|^{\delta}\leq s|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(q^k\,|\Delta_{\alpha_1(b_j)\alpha_2(b_j)\ldots\alpha_{n_j}(b_j)}|)^{\delta}\leq s\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot q^{k\delta}.$$

Таким чином, множину $[d_j, b_j)$ можна покрити за допомогою зчисленної кількості циліндрів з сімейств $R_1, R_2, ..., R_k, ...$. Сумарний $\alpha-$об'єм цих циліндрів не перевищує величини

$$s|E_j|^{\alpha-\delta}\sum_{k=1}^{\infty} q^{k\delta} = \frac{sq^\delta}{1-q^\delta}\ |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Отже, інтервал $(a_j, b_j)$ можна покрити за допомогою не більше як $s$ циліндрів з множини $M_0 = M_0(j)$; зчисленної кількості циліндрів з сімейств $L_1, L_2, ..., L_k, ...$ та зчисленної кількості циліндрів з сімейств $R_1, R_2, ..., R_k, ...$. Зауважимо, що всі вказані циліндри цілком містяться в $(a_j, b_j)$ і їх сумарний $\alpha-$об'єм не перевищує величини

$$(1+\frac{2sq^\delta}{1-q^\delta})|E_j|^{\alpha-\delta},\quad \forall\delta\in(0,\alpha).$$

Отже, для заданої множини $E$, довільних $\alpha \in (0, 1]$, $\delta \in (0, \alpha)$, $\varepsilon > 0$ та довільного $\varepsilon$-покриття множини $E$ інтервалами $(a_j, b_j),\ a_j \in A, b_j \in A$ існує $\varepsilon$- покриття множини $E$ циліндрами з $\Phi(Q^*)$ таке, що його $\alpha$-об'єм не перевищує величини

$$(1+\frac{2sq^\delta}{1-q^\delta})\sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Таким чином, для довільного $\alpha \in (0, 1]$, довільного $\delta \in (0, \alpha)$ і довільної множини $E \subset [0, 1]$ маємо

$$H^\alpha(E) \le H^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \le (1+\frac{2sq^\delta}{1-q^\delta})H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) \le \dim_H(E) + \delta, \forall\delta \in (0, \alpha),$$

що доводить нерівність

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) \le \dim_H(E),$$

а, отже, і рівність

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \subset [0, 1]$. □

З доведеної теореми, зокрема, легко випливає довірчість системи циліндрів, яка породжена матрицею, згаданою у вступі до цієї статті:

$$Q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10^k} \cdots & \\ \frac12 - \frac{1}{10} & \cdots & \frac12 - \frac{1}{10^k} & \cdots \\ \frac12 - \frac{1}{10} & \cdots & \frac12 - \frac{1}{10^k} & \cdots \\ \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10^k} \cdots & \end{pmatrix}$$

**Зауваження 1.** *Запропонований при доведенні цієї теореми метод застосовний для отримання достатніх умов довірчості сімейств циліндрів, породжених узагальненими $F$-розкладами.*

**Подяка.** Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld University), STREVCOM FP-7-IRSES 612669 (ЄС) та "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування"(МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

## Література

[1] S. Albeverio, G. Torbin, *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent $Q^*$ - digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), №4, 356–367.

[2] S. Albeverio, G. Torbin, *On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions*, Bull. Sci. Math., **132**(2008), no. 8. 711-727.

[3] S. Albeverio, G.Ivanenko, M.Lebid, G. Torbin, *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion*, arXiv:1305.6036

[4] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$- symbols*, Meth. of Func. An. Top., **17** (2011), no.2, P.97–111.

[5] S. Albeverio, G. Torbin, *Image measures of infinite produc tmeasures and generalized Bernoulli convolutions*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки (2004), №5, 248–264.

[6] P. Billingsley, *Hausdorff dimension in probability theory II*, Ill. J. Math. **5** (1961), 291–198.

[7] K. J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1990.

[8] C. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, London, (1970).

[9] Г. М. Торбін, *Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір*, Український математичний журнал, **57** (2005), №5, 837–857.

[10] А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.:Наукова думка, 1992.