Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1).— С. 120–133.

G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I.

І. І. Гарко, Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена розвитку нового метода побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи одного з цих зображень переводять у ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називаються G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення). Метричні, ймовірнісні та розмірнісні теорії системи числення, між якими існує G-відображення, є тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями вказаних вище відображень. Особлива увага приділена розвитку розмірнісної теорії Q_∞-зображень дійсних чисел та методів доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞-зображеннями.

Ключові слова: фрактали, DP-перетворення, G-ізоморфізм систем числення, Q_∞-зображення, I-Q_∞-зображення, довірчі системи покриттів, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

Abstract. The paper is devoted to the development of a new method for the construction of metric, probabilistic and dimensional theories for families of representations of real numbers via studies of spacial mappings, under which symbols of a given representation are mapped into the same symbols of other representation from the same family, and they preserve the Lebesgue measure and the Hausdorff-Besicovitch dimension (for such mappings the set of points of discontinuity can be everywhere dense). These mappings are said to be G-mappings (G-isomorphisms of representations). Metric, probabilistic and dimensional theories of G-isomorphic representations are identical. We show a rather deep connection between the faithfulness of systems of coverings, generated by different representations, and DP-properties of above mentioned mappings. A special attention is paid to the development of dimensional theory of Q_∞-representations of real numbers and to methods for proving of faithfulness of coverings, generated by Q_∞-representations.

Key words: fractals, DP-transformations, G-isomorphism of expansions, Q_∞-representations, I-Q_∞-representations, faithful covering systems, singularly continuous probability measures.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

На сьогодні існує багато систем числення (методів зображення (кодування) дійсних чисел чи елементів з деякого простору) з використанням постійного (скінченного чи нескінченного) алфавіту або змінного алфавіту (послідовності алфавітів) (див., наприклад, монографії [17, 6, 26, 14, 1]). Кожна система числення має свою специфіку і переваги у заданні чи дослідженні певних математичних об'єктів, відповідну метричну, ймовірнісну та розмірнісні (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича та інших фрактальних розмірностей) теорії. Фрактальний бум у математиці та природознавстві в наприкінці XX століття суттєво простимулював розвиток методів розвитку розмірнісних теорій (особливо це стосується класичної розмірності Хаусдорфа–Безиковича та пакувальної розмірності) різних розкладів. Незважаючи на це, для багатьох класичних розкладів дійсних чисел відповідні ймовірнісні та розмірнісні теорії все ще перебувають на конструктивному етапі розвитку. В якості прикладу можна навести ланцюгові дроби ([24, 22]), розклади Кантора ([2, 13]), розклади Остроградського-Серпінського-Пірса ([1, 1]), Q_∞-розклади ([5, 2, 1]) та багато інших. Тому особливо важливим для розвитку фрактального аналізу та теорії сингулярних ймовірнісних мір є розвиток та кристалізація **методів** обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (та інших фрактальних розмірностей) множин та мір, пов'язаних з певними системами числення; **методів** встановлення сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх тонких фрактальних властивостей; усвідомлення аналогій між метричними, ймовірнісними та розмірнісними теоріями різних розкладів та узагальнення на основі цього усвідомлення відповідних методів побудови цих теорій.

Дана робота присвячена новому методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної (хаусдорфової) теорій для Q_∞-зображення дійсних чисел та континуального сімейства формально різних зображень дійсних чисел з нескінченним алфавітом на основі дослідження спеціальних відображень, які символи будь-якого зображення переводять в ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо, системи числення, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У роботі показується глибокий зв'язок між довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями вказаних вище відображень. З цією метою в останньому розділі (який є основним в статті) ми розвиваємо методи доведення довірчості систем покриттів, породжених Q_∞-зображенням, та показуємо як отримані результати дозволяють отримувати розмірнісні теорії нових систем числення.

2. Про проблему хаусдорфової довірчості сімейства циліндричних відрізків Q_∞-зображення дійсних чисел

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є добре відомим поняттям, яке активно використовується в різних галузях математики. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено велику кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги.

Нагадаємо, що сімейство Φ підмножин з $[0,1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0,1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0,1] = \bigcup_j E_j$.

Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Означення **1.** Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi) = 0\}.$$

Прикладами довірчих систем покриттів можуть бути локально тонкі системи покриттів, що породжуються s-адичним представленням дійсних чисел [6]; системи покриттів, які породжуються Q-представленнями [9]; системи покриттів, що породжуються Q^*-представленнями, для яких $\inf\limits_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$ [11].

Наведені приклади є прикладами систем покриттів, породжених системами зображень дійсних чисел зі скінченним алфавітом. В роботах [24, 5, 4, 2, 18] досліджувалися питання довірчості для систем зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом на прикладі систем циліндрів, породжених Q_∞- та x-Q_∞-зображеннями дійсних чисел.

Нагадаємо поняття Q_∞-зображення дійсних чисел ([9]) та декілька еквівалентних підходів до його означення [5]. Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, ...)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатніми координатами. При фіксованому векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступною процедурою.

Крок 1. Розбиваємо множину $[0,1)$ (зліва направо) на зліченну кількість півві-дрізків $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$ виду $[a,b)$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1}\right| = q_{\alpha_1}$,

$$[0,1) = \bigcup_{\alpha_1=0}^{\infty} \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1}.$$

Кожен з $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1}$ називається циліндром 1-го рангу Q_∞-зображення.

Крок $k \geq 2$. Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо) на зліченну кількість напіввідкритих відрізків $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ (без спільних точок)

$$\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} = \bigcup_{\alpha_k=0}^{\infty} \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},$$

довжини яких

$$\left|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right| = q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdots q_{\alpha_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{\alpha_s} \qquad (1)$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}\right| : \left|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1}\right| : \cdots : \left|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}m}\right| : \cdots = q_0 : q_1 : \cdots : q_m : \cdots.$$

Кожен з $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу Q_∞-зображення.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in \{0,1,2\ldots\}$ існує послідовність таких вкладених циліндрів

$$\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1} \supset \ \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2} \supset \cdots \supset \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \supset \cdots,$$

що $|\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка $x \in [0,1)$, яка належить усім цим циліндрам $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}$, ..., $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0,1)$ існує єдина (оскільки кожна точка з множини $[0,1)$ належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} \supset \ldots$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)} =: \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називається Q_∞-зображенням точки x. Основи метричної та ймовірнісної теорії Q_∞-зображень розвивались М. В. Працьовитим в 90-х роках 20-го століття і викладені в монографіях [6, 9], де і було вперше вжито термін Q_∞-зображення (представлення, розклад).

Для читачів, знайомих з теорією f-розкладів дійсних чисел (див. [15, 25]), відзначимо, що Q_∞-зображення дійсних чисел є частковим випадком f-розкладів Реньї і породжується наступною строго зростаючою неперервною функцією f, яка визначена на $[0,+\infty)$ умовами: $f(0) = 0$ і f зростає лінійно на кожному відрізку $[n, n+1]$ з $f(n+1) - f(n) = q_n, \forall n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Зауважимо також, що Q_∞-зображення породжується наступною системою ітеруючих функцій (IFS, див. [16, 19]):

$$F_0(x) = q_0 \cdot x, F_i(x) = q_i \cdot x + (q_0 + ... + q_{i-1}), \quad \forall i \in N.$$

Очевидно, що множина $[0,1)$ є інваріантною відносно даної IFS, оскільки $[0,1) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i([0,1))$. При цьому для вищеозначених циліндрів Q_∞-розкладу має місце рівність:

$$\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = F_{\alpha_1} \circ F_{\alpha_2} \circ ... \circ F_{\alpha_k}([0,1)).$$

Тому для довільного $x \in [0,1)$ існує єдина послідовність

$$(\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_k(x), ...) \in \{0,1,2,...\}^\infty$$

така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{\alpha_1} \circ F_{\alpha_2} \circ ... \circ F_{\alpha_k}([0,1)) = \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Надалі будемо використовувати позначення $\Phi(Q_\infty)$ для сімейства всіх циліндрів Q_∞-зображення. У роботі [2] були отримані достатні умови довірчості системи $\Phi(Q_\infty)$:

Теорема 1 ([2]). *Нехай Q_∞ — такий стохастичний вектор, що для довільного $\alpha > 0$ існує стала $c = c(\alpha)$, така що*

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^\alpha \le c(\alpha) q_i^\alpha, \ \forall i \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Тоді сімейство циліндрів, породжених Q_∞-зображенням, є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

У цій же роботі було показано, що існують такі Q_∞-зображення, для яких відповідне сімейство $\Phi(Q_\infty)$ не є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Теорема 2. *(*[2]*) Якщо існує додатне ціле число m_0 і дійсні числа A та B такі, що*

$$\frac{A}{(i+1)^{m_0}} \le q_i \le \frac{B}{(i+1)^{m_0}}, \ \forall i \in N,$$

то система циліндричних відрізків, яка породжена таким Q_∞-зображенням, є недовірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

3. Ймовірнісні міри з незалежними символами I-Q_∞-розкладу

Нагадаємо поняття I-Q_∞-розкладу (зображення) дійсних чисел, яке було введено в розгляд в роботі [2]. Нехай I — довільне дійсне число з одиничного відрізка, записане у двійковій системі числення

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(I)}{2^k}=:0,\alpha_1(I)\alpha_2(I)...\alpha_k(I)...,\quad \alpha_k(I)\in\{0,1\}.$$

Для тих чисел з одиничного відрізка, які мають по два різні двійкові розклади, зафіксуємо той, який має цифру 1 в періоді.

Нехай $Q_\infty=(q_0,q_1,...,q_k,...)$ - нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. При фіксованому дійсному числі $I\in[0,1]$ (тобто при фіксованій послідовності $\{\alpha_k(I)\}$) та фіксованому стохастичному векторі Q_∞ здійснюється зчисленна послідовність розбиттів одиничного відрізка за наступними правилами.

Крок 1. Розбиваємо одиничний відрізок зліва направо, якщо $\alpha_1(I)=1$; (і справа наліво, якщо $\alpha_1(I)=0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\alpha_1\in\{0,1,2,\ldots\}$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\right|=q_{\alpha_1}$. Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$ називається циліндром 1-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Крок k $(k>1)$. Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ розбиваємо (зліва направо, якщо $\alpha_k(I)=1$; і справа наліво, якщо $\alpha_k(I)=0$) на зчисленну кількість відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, довжини яких

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right|=q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_k}=\prod_{s=1}^{k}q_{\alpha_s}\tag{3}$$

відносяться як

$$\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}\right|:\ldots:\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1}\right|:\ldots:\left|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}m}\right|:\ldots=q_0:\ldots:q_1:\ldots:q_m:\ldots\ .$$

Кожен з відрізків $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ називається циліндром k-го рангу I-Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k\in\{0,1,2\ldots\}$, існує послідовність вкладених циліндрів

$$\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}\supset\ \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}\supset\cdots\supset\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}\supset\cdots,$$

таких, що $|\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|\to0$, $k\to\infty$. Тому існує єдина точка x, яка належить всім цим циліндрам $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1}$, $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2}$, ..., $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, ...

І навпаки, для кожної точки $x\in(0,1)$, яка не є межовою для жодного циліндра жодного рангу, існує єдина (оскільки кожна така точка належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)}\supset\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}\supset\ldots\supset$ $\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}\supset\ldots$, які містять x, тобто

$$x=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}=:\Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній вираз називатимемо I-Q_∞-розкладом (зображенням) точки x.

Зауваження 1. *I-Q_∞-зображення визначається стохастичним вектором Q_∞ та дійсним числом I (його двійковими цифрами), яке виступає в якості параметра. У початковій роботі [2] для цього зображення використовувалося позначення $x - Q_\infty$, що, як показали доповіді авторів статті, інколи призводило до неправильного розуміння деякими слухачами суті розкладу, оскільки традиційно символ x використовують в якості незалежної змінної, а не параметра. Тому було вирішено в якості дійсного параметра використовувати I, а відповідне зображення називати I-Q_∞-зображенням дійсних чисел з одиничного відрізка, зберігши символ x для позначення незалежної змінної та довільно вибраного числа з одиничного відрізка.*

Точку x назвемо I-Q_∞-раціональною, якщо вона є межовою для деякого циліндра. Найменший ранг циліндрів, що мають таку властивість, назвемо рангом I-Q_∞-раціональної точки. Якщо ж точка x не є межовою для жодного циліндра, то назвемо її I-Q_∞-ірраціональною.

Зауваження 2. *Q_∞-розклад є частковим випадком I-Q_∞-розкладу (він отримується при $I = 1$). Якщо $I = 0$ і при цьому додатково $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$, то I-Q_∞-розклад співпадає з розкладом Люрота ([14]). При $I = 0,(01) = \frac{1}{3}$ отримаємо $\widetilde{Q}_\infty$-розклад ([9]). Якщо ж додатково до умови $I = \frac{1}{3}$ вибрати стохастичний вектор Q_∞ так, щоб $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$, то отримаємо знакопочережний розклад Люрота.*

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geq 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \quad \forall k \in N.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та I-Q_∞-розклад, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi := \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots},$$

яку називають випадковою величиною з незалежними I-Q_∞-символами.

Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними I-Q_∞-символами. У тому випадку, коли $I = 1$ (тобто I-Q_∞-розклад співпадає з Q_∞-розкладом) метрична теорія відповідного розкладу та фрактальні властивості відповіних ймовірнісних мір вивчені досить добре (див., наприклад, [5] та огляд літератури там), хоча навіть у цьому випадку залишається значна кількість нерозв'язаих задач (особливо у випадку, коли стохастичний вектор Q_∞ має нескінченну ентропію). Якщо I є двійково-раціональною точкою, тобто $\alpha_k(I) = 1$ для всіх достатньо великих $k > k_0(I)$, то метрична і ймовірнісна теорія таких розкладів залишиться без змін, оскільки на всіх циліндрах, починаючи з $k_0(I)$, буде здійснюватись Q_∞-розбиття і відповідна ймовірнісна міра, звужена на циліндричні відрізки рангу k_0+1 співпадатиме зі звуженням на цей циліндр стандартної ймовірнісної міри з незалежними Q_∞-символами. У тому ж випадку, коли I є ірраціональним числом (тобто послідовність $\alpha_k(I)$ є неперіодичною), то розвинені в роботах [5], [9], [3] методи незастосовні для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини ξ навіть у найпростішому випадку однакової розподіленості незалежних випадкових величин ξ_k, оскільки відповідні множини вже не будуть ні самоподібними, ні N-самоподібними.

4. G-ізоморфізм між метричними, розмірнісними та ймовірнісними теоріями Q_∞-розкладів та I-Q_∞-розкладами

У роботі [18] запропоновано наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними I-Q_∞– символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ пропонується ввести в розгляд відображення

$$\varphi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{I\text{-}Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Зокрема, були доведені наступні результати:

Лема 1 ([18])**.** *При довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа I відображення φ зберігає міру Лебега на $(0,1)$.*

Зауваження 3. *Як наслідок з цієї леми ми отримуємо висновок про ізоморфність метричних теорій Q_∞-розкладів та I-Q_∞-розкладів дійсних чисел. Зокрема, міра Лебега множин дійсних чисел, що задані за допомогою умов на символи знакозмінних розкладів Люрота, співпадає з мірою Лебега відповідних множин дійсних чисел з такими ж умовами на символи знакододатних розкладів Люрота.*

Теорема 3 ([18])**.** *Якщо x_0 є I-Q_∞-ірраціональною точкою, то $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0 (незалежно від вибору точки $I \in [0,1]$).*

Теорема 4 ([18])**.** *1) якщо $I = 0$ або $x = 1$, то $\varphi(z)$ неперервна (і навіть лінійна) на $(0,1)$;*

2) якщо $I = 0, \beta_1(I)\beta_2(I)\ldots\beta_{k-1}(I)0(1)$, то $\varphi(I)$ буде неперервною на всіх циліндрах $(k+1)$-го рангу, і всі точки поділу рангу m при $m \leq k$ є точками розриву;

3) якщо серед $\beta_k(I)$ є безліч «0» та «1» (тобто I є двійково-ірраціональною точкою), то $\varphi(x)$ буде розривною в усіх I-Q_∞-раціональних точках.

Зауваження 4. *Дослідженням неперервних перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича, присвячена значна кількість робіт (див., наприклад,* [10]*,* [8]*,* [7]*). Доведено, зокрема, що проблема дослідження неперервних DP-перетворень одиничного відрізка еквівалентна проблемі дослідження DP-властивостей неперервних функцій розподілу ймовірнісних мір. У той же час на сьогодні практично відсутні роботи по DP-властивостям перетворень, множина* *точок розриву яких всюди щільна на деякому відрізку. Природність таких досліджень очевидна: з одного боку, множина таких перетворень має потужність гіперконтинууму, а її доповнення — континуальне; з іншого боку, вивчення таких перетворень корисне з точки зору розвитку методів обчислення фрактальних розмірностей та дослідження фрактальних властивостей ймовірнісних розподілів.*

З метою дослідження DP-властивостей введеного вище відображення φ, у цій же роботі досліджувалось питання довірчості спеціальних сімейств покриттів, пов'язаних з вищезгадуваними розкладами, для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Зокрема, було запропоновано розглядати сімейство покриттів $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$, яке складається з циліндрів та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндру попереднього рангу. Зокрема, було доведено наступні результати.

Лема 2 ([18])**.** *Нехай існує таке $c > 0$, що*

$$\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} q_k} \leq c, \ \forall i \in N. \tag{4}$$

Тоді $\forall \ \ E \subset [0,1), \quad \dim_H E = \dim_H (E, \hat{\Phi})$.

Зауваження 5. *Якщо $\frac{q_i}{r_i} \leq c$, $\forall \ i$, то сімейство $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-зображення, взагалі кажучи, не є довірчим. В якості контрприкладу можна взяти стохастичний вектор Q_∞ з $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$ (у цьому випадку Q_∞-розклад співпадає з розкладом Люрота). Оскільки для даного стохастичного вектора виконуються умови теореми 2, то сімейство циліндрів $\Phi(Q_\infty)$ не є довірчим. Але при цьому сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Лема 3 ([18])**.** *Якщо виконується умова (4), то сімейство $\hat{\Phi}' = \varphi(\hat{\Phi})$ є довірчим.*

На основі двох вказаних лем отримана наступна теорема.

Теорема 5 ([18])**.** *Якщо виконується умова (4), то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Зауваження 6. *При виконанні умови (4) розмірнісні теорії Q_∞-розкладів та I-Q_∞-розкладів дійсних чисел співпадають при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$. Зокрема, при виборі $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$ та $I = \frac{1}{3}$, з даної теореми випливає еквівалентність розмірнісних теорій знакододатніх та знакозмінних рядів Люрота.*

Нашою основною метою є доведення того факту, що відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ (без обмежень на його ентропію чи швидкість спадання його елементів) та при довільному виборі параметра $I \in [0,1]$.

Теорема 6. *Якщо системи $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ є довірчими, то відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.*

Доведення. Оскільки сімейства $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ і $\hat{\Phi}' = \hat{\Phi}'(Q_\infty)$ є довірчими, то для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної множини $E \subset [0, 1)$ досить використовувати покриття множинами $K_j \in \hat{\Phi}$.

Нехай $K'_j = \varphi(K_j)$. Оскільки K_j є об'єднанням суміжних циліндричних відрізків одного рангу, що належать до одного циліндра попереднього рангу, то з конструкції I-Q_∞-розкладу випливає, що $K'_j \in \hat{\Phi}'$ і $|K_j| = |K'_j|$.

Нехай E — довільна множина з $[0, 1]$, $\{K_j\}$ — довільне її ε-покриття множинами з $\hat{\Phi}$. Тоді $\{K'_j\}$ буде ε-покриттям для $E' = \varphi(E)$.

Відповідні α-об'єми будуть рівними, а тому

$$H^\alpha_\varepsilon(E, \hat{\Phi}) = H^\alpha_\varepsilon(E', \hat{\Phi}').$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ отримаємо:

$$H^\alpha(E, \hat{\Phi}) = H^\alpha(E', \hat{\Phi}').$$

А тому,

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}) = \dim_H(E', \hat{\Phi}').$$

Оскільки $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ — довірчі для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, то

$$\dim_H E = \dim_H E', \quad \forall E \subset [0, 1).$$

Отже, φ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1)$. □

Зауваження 7. *З останньої теореми випливає, що для доведення того, що φ завжди зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, досить довести довірчість сімейств $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ та $\hat{\Phi}'(Q_\infty) = \Phi(I\hat{Q}_\infty)$.*

Наступна теорема, яка встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞, є основним результатом даної статті, а метод, який використовується при її доведення, також дозволяє отримувати загальні достатні умови довірчості сімейств $\Phi(Q_\infty)$ циліндрів Q_∞-розкладу.

Теорема 7. *Нехай $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(Q_\infty)$ – сімейство, яке складається з циліндрів Q_∞-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних цилінрів одного рангу і належать до одного цилiндра попереднього рангу.*

Сімейство $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора Q_∞.

Доведення. Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільних підмножин з $[0, 1)$ досить розглядати покриття піввідрізками $[a_j, b_j)$, де a_j та b_j належать деякій всюди щільній множині A (при цьому відповідна міра Хаусдорфа збігається з класичною мірою Хаусдорфа). Виберемо в якості A множину всіх Q_∞-раціональних точок, тобто точок, які є кінцями циліндрів певного рангу Q_∞-зображення.

Нехай E — довільна підмножина з $[0,1)$. Зафіксуємо $\varepsilon>0$ та $\alpha>0$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E, $E_j=[a_j,b_j)$, $a_j\in A$, $b_j\in A$, $|E_j|<\varepsilon$.

Для множини E_j існує єдиний циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який повністю містить E_j, але будь-який циліндр більшого рангу не містить E_j. У тому випадку, коли a_j та b_j належать двом різним циліндрам першого рангу, в якості циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ виберемо $[0,1)$, вважаючи його циліндром нульового рангу.

Оскільки $a_j\in A$, то існує таке невід'ємне число l_j, що

$$a_j=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}\ldots\alpha_{n_j+l_j}0\ldots0\ldots},$$

де $\alpha_k=\alpha_k(a_j), l_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}}$ на циліндри наступного рангу. З максимальності рангу циліндра $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$ випливає, що існує хоча б одна точка, яка є кінцем циліндру (n_j+1)-го рангу і яка належить до інтервала (a_j,b_j). В якості такої точки виберемо точку

$$c_j=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)0\ldots0},$$

яка є найлівішою точкою поділу (n_j+1)-рангу, що належить до (a_j,b_j).

Для покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ окремо розглянемо покриття множин $[a_j,c_j)$ та $[c_j,b_j)$.

Спочатку оцінимо α-об'єм покриття $[c_j,b_j)$ множинами з $\hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Якщо циліндр $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)}$ містить $[c_j,b_j)$, то існує таке натуральне число t_j, що циліндр

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)\underbrace{0\ldots0}_{t_j-1}}$$

буде містити $[c_j,b_j)$, а циліндр

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)\underbrace{0\ldots0}_{t_j}}$$

вже буде міститися в $[c_j,b_j)$. Тоді $[c_j,b_j)$ можна покрити одним циліндром

$$L=L(j):=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)\underbrace{0\ldots0}_{t_j-1}},$$

довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$.

Якщо циліндр $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)}$ міститься в $[c_j,b_j)$, то позначимо через $M_0=M_0(j)$ об'єднання всіх циліндрів (n_j+1)-го рангу, які містяться в $[c_j,b_j)$. Зрозуміло, що множина M_0 залежить від вибору множини E_j і для кожного значення j буде своєю. Це ж зауваження стосується і введених нижче множин M_i.

Очевидно, що $|M_0|<|E_j|$.

Якщо множина $[c_j, b_j) \setminus M_0$ непорожня, то її можна покрити одним циліндром, довжина якого не перевищує $\frac{1}{q_0}|E_j|$ аналогічно до того, як це було зроблено для розглянутого вище випадку, коли $[c_j, b_j) \subset \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}+1)}$. Такий циліндр, як і раніше, будемо позначати через $L = L(j)$.

Таким чином, множину $[c_j, b_j)$ можна покрити не більш як двома множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$. Відповідний α-об'єм такого покриття не перевищує $(1 + \frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha$.

Оцінимо тепер α-об'єм покриття множини $[a_j, c_j)$ множинами з $\hat{\Phi}(Q_\infty)$.

Якщо a_j — точка поділу рангу $n_j + 1$ або меншого, то $[a_j, c_j) = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}} \in \Phi(\hat{Q}_\infty)$.

У іншому разі позначимо

$$M_1 := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+2})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$M_2 := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+3})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}(\alpha_{n_j+2})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$\vdots$$

$$M_{l_j-2} := \bigcup_{i=(\alpha_{n_j+l_j-1})+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}\ldots(\alpha_{n_j+l_j-2})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty),$$

$$M_{l_j-1} := \bigcup_{i=\alpha_{n_j+l_j}}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}\ldots(\alpha_{n_j+l_j-1})i} \in \hat{\Phi}(Q_\infty).$$

Нехай $q = \max\{1 - q_0, \max_i q_i\}$. Несkладно бачити, що

$$|M_k| \leq q^{k-1}|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j+1}}| \leq q^{k-1}, \quad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, l_j - 1\}.$$

Таким чином, множину $[a_j, c_j)$ можна покрити за допомогою не більш ніж $l_j - 1$ множини з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$: або однією множиною $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}\alpha_{n_j+1}}$ або об'єднанням множин $\bigcup\limits_{i=1}^{l_j-1} M_i$. Зауважимо, що всі ці множини є підмножинами множини E_j.

Для заданої множини E, $\alpha \in (0, 1]$ та $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta \in (0, \alpha)$. Тоді α-об'єм описаного вище покриття множини E_j множинами з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$ дорівнює

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l_j-1} |M_i|^\alpha + |M_0|^\alpha + |L|^\alpha &< \sum_{i=1}^{l_j-1} |M_i|^{\alpha-\delta}|M_i|^\delta + (1 + \frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^\alpha \\
&< |E_j|^{\alpha-\delta} \sum_{i=1}^{\infty} |M_i|^\delta + (1 + \frac{1}{q_0^\alpha})|E_j|^{\alpha-\delta} \\
< |E_j|^{\alpha-\delta}(1 + \frac{1}{q_0^\alpha} + \sum_{i=1}^{\infty} q^{(i-1)\delta}) &= |E_j|^{\alpha-\delta}(1 + \frac{1}{q_0^\alpha} + \frac{1}{1 - q^\delta}).
\end{aligned}$$

Отже, для заданої множини E_j існує скінченний набір множин з сімейства $\hat{\Phi}(Q_\infty)$, якими можна покрити E_j і відповідний α-об'єм покриття не перевищує $S(\alpha,\delta)|E_j|^{\alpha-\delta}$, де $S(\alpha,\delta) = 1 + \frac{1}{q_0^\alpha} + \frac{1}{1-q^\delta}$.

Таким чином, для довільного $\alpha \in (0,1]$, довільного $\delta \in (0,\alpha)$ і довільної множини $E \subset [0,1)$ маємо

$$H^\alpha(E) \le H^\alpha(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le S(\alpha,\delta) H^{\alpha-\delta}(E).$$

Тому $\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le \dim_H(E) + \delta, \forall \delta \in (0,\alpha)$, що доводить нерівність

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) \le \dim_H(E),$$

а, отже, і рівність

$$\dim_H(E, \hat{\Phi}(Q_\infty)) = \dim_H(E)$$

для довільної множини $E \in [0,1)$. □

Зауваження 8. *У наступній статті «G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II.», яка є продовженням даної статті, нами буде доведено узагальнення цієї теореми і показано, що при довільному виборі дійсного числа $I \in [0,1]$ та довільному виборі стохастичної матриці Q_∞ відповідне сімейство $\hat{\Phi}(I\text{-}Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. У цій же статті буде розвинута загальна метрична, розмірнісна та ймовірнісна теорія I-Q_∞-зображень дійсних чисел.*

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld University), STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

Література

[1] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. Проект «Наукова книга». — Київ : Наук. думка, 2013. — 288 с.

[2] Гарко І. І., Торбін Г. М. Про x-Q_∞-зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов'язані // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М.І. — Київ : Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. — С. 48.

[3] Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М. Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2008. — Т. 9. — С. 81–103.

[4] Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М. Один випадок довірчості системи покриттів, породженої Q_∞-зображенням // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 13, № 2. — С. 150–159.

[5] Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М. Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2012. — Т. 86. — С. 150–162.

[6] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[7] Торбін Г. М. Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають фрактальну розмірність // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. — 2007. — Т. 4. — С. 275–283.

[8] Торбін Г. М. Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами // Доповіді НАНУ. — 2008. — Т. 4. — С. 44–50.

[9] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

[10] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 6, no. 1. — P. 119–128.

[11] Albeverio S., Torbin G. Fractal properties of singular probability distributions with independent Q^*-digits // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 2005. — Vol. 129, no. 4. — P. 356–367.

[12] Billingsley P. Ergodic theory and information. — reprint edition. — Huntington, N.Y. : R.E. Krieger Pub. Co., 1978. — xiii, 193 p.

[13] Cantor series expansions and packing dimension faithfulness / Yuri Kondratiev, Mykola Lebid, Oleksandr Slutskyi, Grygoriy Torbin. — arXiv:1507.05663.

[14] Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic theory of numbers. — Washington, DC : Mathematical Association of America, 2002. — Vol. 29 of Carus mathematical monographs. — x, 190 p.

[15] Everett C. J. Representations for real numbers // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1946. — Vol. 52, no. 10. — P. 861–869.

[16] Falconer K. J. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. — Chichester and New York : Wiley, 1997. — xxii, 288 p.

[17] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series. Lecture Notes in Mathematics. — Berlin and New York : Springer-Verlag, 1976. — vi, 146 p.

[18] Garko I. On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent x-Q_∞-digits. — Submitted to Theory of Stochastic Processes.

[19] Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. (Indiana University Mathematics Journal). — 1981. — Vol. 30, no. 5. — P. 713–747.

[20] On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions / Sergio Albeverio, Yuri Kondratiev, Roman Nikiforov, Grygoriy Torbin // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 2014. — Vol. 138, no. 3. — P. 440–455.

[21] On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS / Sergio Albeverio, Yuri Kondratiev, Roman Nikiforov, Grygoriy Torbin. — arXiv:1507.05672.

[22] On singularity of probability distributions connected with continued fractions / Sergio Albeverio, Yulia Kulyba, Mykola Pratsiovytyi, Grygoriy Torbin. — Accepted to Mathematische Nachrichten.

[23] On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion / Sergio Albeverio, Ganna Ivanenko, Mykola Lebid, Grygoriy Torbin. — arXiv:1305.6036.

[24] Peres Y., Torbin G. Continued fractions and dimensional gaps.

[25] Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. — 1957. — Vol. 8, no. 3-4. — P. 477–493.

[26] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford science publications. — Oxford and New York : Clarendon Press and Oxford University Press, 1995. — xiii, 295 p.

[27] The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets / Sergio Albeverio, Oleksandr Baranovskyi, Mykola Pratsiovytyi, Grygoriy Torbin // Acta Arithmetica. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P. 215–230.