Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 254–260.

УДК 517.949.21

Про асимптотику розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь

І. І. Старун

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Анотація. У роботі запропоновано метод приведення систем лінійних різницевих рівнянь до l-діагонального вигляду.

Ключові слова: системи лінійних різницевих рівнянь, зведення до діагонального вигляду.

The asymptotic solutions of systems of linear difference equations

I. Starun

Nizhyn Pedagogical University

Abstract. About the asymptotic solutions of systems of linear difference equations. The work suggests a method of bringing the systems of linear difference equations to the l-diagonal form.

Key words: systems of linear difference equations.

AMS Subject classification: 39A14.

1. Останнім часом значно зросла зацікавленість математиків до вивчення різницевих рівнянь з змінними коефіцієнтами. Особлива увага приділяється асимптотиці та стійкості розв'язків [1-3]. Варто зауважити, що різницеві рівняння в радянський період вивчалися переважно в київській математичній школі [4-8]. В монографії [1] І.М.Рапопортом розглядалася система вигляду

$$x(t+1) = W(t)(E + C(t))x(t),\ t = t_0, t_0 + 1, \dots, \tag{1}$$

в якій

$$W(t) = \mathrm{diag}\left\{w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)\right\},\ w_i(t) \neq w_j(t),\ i, j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

а $C(t) = (c_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$ — матриця, елементи якої задовольняють умову

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} |c_{ij}(t)| < \infty. \tag{3}$$

© І. І. Старун, 2012

В [4] систему (1) названо l-діагональною і доведено наступну теорему.

Теорема 1 (Рапопорта). *Якщо елементи матриці з (2) такі, що:*
1) $w_i(t) \neq 0$ *(як правило* $w_i(t) > 0$*);*
2)

$$\left|\frac{w_i(t)}{w_j(t)}\right| \leq 1, \text{ чи } \left|\frac{w_i(t)}{w_j(t)}\right| \geq 1 \text{ при всіх } i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

а елементи матриці $C(t)$ *задовольняють умову (3), то система (1) має* n *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x_i(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} w_i(\tau)(e_i + \varphi_i(\tau)), \; i = \overline{1, n}, \; t = t_0 + 1, t_0 + 2, \ldots, \tag{5}$$

де $e_i = colon(\underbrace{0, \ldots, 0,}_{i-1} 1, 0, \ldots, 0)$, $\varphi_i(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Виходячи з (5), загальний розв'язок системи (1) можна подати у вигляді

$$x(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} W(\tau)(E + \Phi(\tau))p, \; \Phi(t) \to 0, \; t \to \infty, \tag{6}$$

$p = \mathrm{colon}(p_1, \ldots, p_n)$ — довільний сталий вектор.

Зауважимо, що матриця $X(t) = \prod\limits_{\tau=t_0}^{t-1} W(\tau)(E + \Phi(\tau))$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (1).

Розглянемо тепер систему

$$x(t+1) = A(t)x(t), \; t = t_0, t_0 + 1, \ldots. \tag{7}$$

У випадку, коли рівняння

$$\det(A(t) - wE) = 0 \tag{8}$$

має різні, відмінні від нуля корені $w_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ при всіх $t = t_0, t_0{+}1, \ldots$, в [1] була вказана підстановка $x(t) = B(t)y(t)$, де $B(t)$ — матриця, складена з власних векторів, що відповідають власним значенням $w_i(t)$, яка приводить систему (7) до l-діагонального вигляду (1). В [5-7] будувалися більш загальні підстановки при тих же припущеннях відносно коренів рівняння (8). В [8] наведені підстановки, що приводять систему (7) до l-діагонального вигляду у випадку, коли рівняння має корінь $w_0(t) \neq 0$ кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої ж кратності. В усіх перерахованих роботах вимагається знання точних коренів рівняння (8), що є проблематичним при високому порядку системи (n >3).Те ж можна сказати і у випадках, коли рівняння (8) має кратні корені, або серед коренів є нульовий (особливо кратний). В цій роботі пропонується метод приведення системи (7) до l-діагонального вигляду, подібний до запропонованого нами в [9] методу приведення системи лінійних диференціальних рівнянь до L-діагонального вигляду. Цей метод не вимагає відшукання коренів рівняння (8), тому байдуже які корені має це рівняння.

2. Отже, нехай маємо систему (7), асимптотичну поведінку розв'язків якої потрібно дослідити. Введемо в розгляд допоміжну систему з параметром

$$\varepsilon x(t+1) = (W + \varepsilon(A(t) - W))\, x(t),\ t = t_0, t_0+1, t_0+2, \ldots, \tag{9}$$

в якій

$$W = \operatorname{diag}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = \text{const},\ w_i,\ i = \overline{1,n} \tag{10}$$

— довільні додатні числа, які задовольняють, наприклад, нерівностям $0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_n$. (При $\varepsilon = 1$ система (9) співпадає з системою (7)). В системі (9) зробимо заміну

$$x(t) = Q_m(t,\varepsilon) y(t), \tag{11}$$

де

$$Q_m(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k Q^{(k)}(t). \tag{12}$$

(Про вибір числа m буде сказано пізніше). Отримаємо систему

$$\varepsilon Q_m(t+1,\varepsilon) y(t+1) = (W + \varepsilon(A(t) - W)) Q_m(t,\varepsilon) y(t). \tag{13}$$

Матрицю $Q_m(t,\varepsilon)$ будемо будувати, виходячи з рівності

$$(W + \varepsilon(A(t) - W) Q_m(t,\varepsilon) = \left(Q_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \Delta Q^{(k)}(t)\right) \left(\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(t,\varepsilon)\right), \tag{14}$$

в якій

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = W + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \Lambda^{(k)}(t),\ \Lambda^{(k)} = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1^{(k)}(t), \ldots, \lambda_n^{(k)}(t)\right\}, \tag{15}$$

$C_m(t,\varepsilon)$ — $(n \times n)$-матриця, що підлягає визначенню, як і $\Lambda_m(t,\varepsilon)$ та $Q_m(t,\varepsilon)$, $\Delta Q^{(k)}(t) = Q^{(k)}(t+1) - Q^{(k)}(t)$.

Прирівнявши коефіцієнти при степенях $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m$, отримаємо наступну систему матричних рівнянь:

$$WQ^{(1)} - Q^{(1)}W = \Lambda^{(1)} + (W - A), \tag{16^1}$$

$$WQ^{(2)} - Q^{(2)}W = \Lambda^{(2)} + (W - A)Q^{(1)} + Q^{(1)}\Lambda^{(1)}, \tag{16^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$WQ^{(m)} - Q^{(m)}W = \Lambda^{(m)} + (W - A)Q^{(m-1)} + \sum_{i=1}^{m-1} Q^{(i)}\Lambda^{(m-i)}. \tag{16^m}$$

(тут, і надалі, ми аргумент t опустили; при ε^0 маємо тотожність $W \equiv W$).

Розглянемо рівняння (16^1). В координатній формі воно має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & (w_1-w_2)q_{12}^{(1)} & (w_1-w_3)q_{13}^{(1)} & \dots & (w_1-w_n)q_{1n}^{(1)} \\ (w_2-w_1)q_{21}^{(1)} & 0 & (w_2-w_3)q_{23}^{(1)} & \dots & (w_2-w_n)q_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (w_n-w_1)q_{n1}^{(1)} & (w_n-w_2)q_{n2}^{(1)} & (w_n-w_3)q_{n3}^{(1)} & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & w_2-a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & w_n-a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Оскільки зліва в (17) на головній діагоналі стоять нулі, то прирівнявши до нуля діагональні елементи справа, визначаємо елементи матриці $\Lambda^{(1)}$:

$$\lambda_i^{(1)} = w_i - a_{ii},\ i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Прирівнюючи не діагональні елементи матриць, знаходимо

$$q_{ij}^{(1)} = \frac{a_{ij}}{w_j - w_i},\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j. \tag{19}$$

Не визначеними залишилися елементи $q_{ii}^{(1)}$, для визначеності покладемо $q_{ii}^{(1)} = 0$, $i=\overline{1,n}$. Таким чином матриці $\Lambda^{(1)}$ та $Q^{(1)}$ однозначно визначені.

Розглянемо рівняння (16^2). Підставивши сюди знайдені матриці $\Lambda^{(1)}$, $Q^{(1)}$ та позначивши

$$F^{(2)} = (W-A)Q^{(1)} + Q^{(1)}\Lambda^{(1)},$$

подібно до попереднього визначаємо

$$\lambda_i^{(2)} = -f_{ii}^{(2)},\ i=\overline{1,n},\ q_{ij}^{(2)} = \frac{f_{ij}^{(2)}}{w_i - w_j},\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j,\ q_{ii}^{(2)}=0. \tag{20}$$

Аналогічним чином визначаються і всі наступні матриці $\Lambda^{(s)}$, $Q^{(s)}$, $s=\overline{3,m}$:

$$\lambda_i^{(s)} = -f_{ii}^{(s)},\ q_{ii}^{(s)}=0,\ i=\overline{1,n},\ q_{ij}^{(s)} = \frac{f_{ij}^{(s)}}{w_i - w_j},\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j, \tag{21}$$

де $f_{ij}^{(s)}, i,j=\overline{1,n}$ — елементи матриці

$$F^{(s)} = (W-A)Q^{(s-1)} + \sum_{i=1}^{s-1} Q^{(i)}\Lambda^{(s-i)}.$$

Отже, матриці $Q_m(t,\varepsilon), \Lambda_m(t,\varepsilon)$ повністю визначені. Зауважимо, що число m в (10) вибираємо так, щоб виконувалися умови

$$\det\Lambda_m(t,1)\neq 0, \det Q_m(t,1)\neq 0, \tag{22}$$

чого завжди можна добитися підбираючи певним чином елементи матриці W. Тоді матриця $C_m(t,1)$ визначиться з (14) згідно формули

$$C_m(t,1) = \tag{23}$$
$$= Q_m^{-1}(t,1)\left((A(t)-W)Q^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=i}^{m} Q^{(r)}(t)\Lambda^{(m+i-r)} - Q_m(t+1,1)\Lambda_m(t,1)\right).$$

Враховуючи (14) (при $\varepsilon = 1$), система (13) запишеться так:

$$y(t+1) = (\Lambda_m(t,1) + C_m(t,1))y(t),$$

або ж

$$y(t+1) = \Lambda_m(t,1)(E + H_m(t,1))y(t), \tag{24}$$

де $H_m(t,1) = \Lambda_m^{-1}(t,1)\cdot C_m(t,1)$.

Система (24) — це система вигляду (1), а тому якщо елементи матриць $\Lambda_m(t,1)$, $H_m(t,1)$ задовольняють умовам теореми Рапопорта, то фундаментальна матриця розв'язків системи (7) має вигляд

$$X(t) = Q_m(t,1)\cdot\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\Lambda_m(\tau,1)(E+\Phi(\tau)),\ \Phi(t)\to 0,\ t\to\infty. \tag{25}$$

Загальний асимптотичний розв'язок тоді можна подати у вигляді

$$x(t) = X(t)\cdot p,\ p = \mathrm{colon}(p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{26}$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — довільні сталі числа.

3. Розглянемо систему

$$Bx(t+1) = A(t)x(t),\ t = t_0, t_0+1, \ldots \tag{27}$$

з виродженою сталою матрицею B. Нехай її ранг дорівнює $1 < r < n$ і відмінним від нуля є мінор r-го порядку, що стоїть у верхньому лівому куті. Матриці B та $A(t)$ розіб'ємо на блоки

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix} \tag{28}$$

($\mathrm{rang}B = \mathrm{rang}B_{11} = r$) і введемо в розгляд матриці

$$P = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ -B_{21}B_{11}^{-1} & E_2\end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} E_1 & -B_{11}^{-1}B_{12} \\ 0 & E_2\end{pmatrix},$$

де E_1, E_2 — одиничні матриці відповідно розмірів r і $n-r$. Тоді

$$PBQ = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \equiv M. \tag{29}$$

Зробивши в (27) заміну $x(t) = Qy(t)$ та помноживши зліва на P, приходимо до рівносильної системи

$$My(t+1) = C(t)y(t), \tag{30}$$

в якій

$$C(t) = PA(t)Q = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

У відповідності до (29) систему (30) подамо у вигляді

$$u(t+1) = C_{11}(t)u(t) + C_{12}(t)v(t), \tag{31}$$

$$0 = C_{21}(t)u(t) + C_{22}(t)v(t), \tag{32}$$

де $y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

Припустимо, що в'язка $A(t) - wB$ задовольняє умові «ранг-степінь» при всіх $t = t_0, t_0 + 1, \ldots$. Тоді і в'язка $C(t) - wM$ задовольняє цій умові, а тому, як показано в [10], $\det C_{22}(t) \neq 0$ при всіх $t = t_0, t_0 + 1, \ldots$. З (32) знаходимо вектор $v(t) = -C_{22}^{-1}(t)C_{21}(t)u(t)$, підставивши який в (31), отримаємо систему

$$u(t+1) = D(t)u(t),$$

де $D(t) = C_{11}(t) - C_{22}^{-1}(t)$, яка є системою вигляду (7) і до неї можна застосувати запропонований в п.2 метод приведення до l-діагонального вигляду.

Література

[1] *Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. — К.: Наукова думка,1986. — 277 с.

[2] *Рябенький В.С.* Об устойчивости разностных уравнений / В.С. Рябенький, А.Ф. Филиппов. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1996. — 289 с.

[3] *Игнатьев А.О.* Об устойчивости решений систем разностных уравнений в одном критическом случае / А.О. Игнатьев // Укр. матем. вiсник. — 2008. — Т.5, №4. — С. 488-506.

[4] *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений / И.М. Рапопорт. — К.: Изд-во АН УССР, 1954. — 218 с.

[5] *Коваль П.И.* Об асимптотическом поведении решений линейных разностных и дифференциальных уравнений / П.И. Коваль // ДАН СССР. — 1957. — 114, №5. — С. 87-94.

[6] *Коваль П.И.* Об асимптотическом поведении решений систем линейных разностных уравнений / П.И. Коваль // Функциональный анализ и его применения. — Изд-во АН Азерб.ССР, 1961. — С. 124-133.

[7] *Коваль П.Й.* Про асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь / П.Й. Коваль // Вісник КДУ, сер. матем. та мех. — 1961. — № 3. — С. 74-82.

[8] *Старун И.И.* Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / И.И. Старун. — К., 1969. — 16 с.

[9] *Старун І.І.* Асимптотика розв'язків однорідної лінійної системи / І.І. Старун // Фізико-математичний збірник наукових праць. — Ніжин, 2007. — С. 19-21.

[10] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 580 с.