Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 271–283.

УДК 512.815

Ряди Пуанкаре незвідних зображень спеціальної лінійної алгебри Лі

Н. В. Шаповалова

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. В статті розглянуті основні задачі теорії інваріантів та теорії зображень груп і алгебр Лі, пов'язані з прикладними аспектами теорії зображень груп і алгебр Лі. Розв'язується задача визначення повної системи інваріантів для спеціальної лінійної алгебри Лі, яка пов'язана із знаходженням конкретного вигляду ряду Пуанкаре для відповідного зображення алгебри.

Ключові слова: алгебра Лі, ряд Пуанкаре, теорія зображень, група Лі.

Poincaré series for representation of special linear Lie algebra

N. Shapovalova,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The article explores key problems of invariant theory and of theory of Lie groups and algebras representations related to the applied aspects of theory of Lie groups and algebras representations. There is presented a resolution of the problem of constructing a complete system of invariants for a special linear Lie algebra linked to finding a concrete type of Poincaré polynomial for the corresponding algebra representation.

AMS Subject Classifications (2010): 20C33, 22E45.
Key words: Lie algebra, Lie group, Poincaré polynomial.

Класична постановка основної задачі теорії інваріантів має такий вигляд: обчислити інваріанти в явному вигляді, а також дати повний опис кільця інваріантів. В процесі розв'язання таких задач був помічений такий факт: у всіх задачах, які зводились до знаходження інваріантів, вдавалося виділити скінченну кількість базисних інваріантів $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_m$, тобто таких інваріантів, що будь-який інший інваріант даного зображення ρ може бути виражений у вигляді полінома від них: $\phi = F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$, тобто алгебра інваріантів була скінченно вимірною. Було помічено також, що базисні інваріанти в загальному випадку не є незалежними. Це означало, що алгебра інваріантів не є вільною алгеброю: можуть існувати многочлени $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, які називаються *сізігіями*, тобто це такі співвідношення, після підстановки яких $t_i = \phi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ці поліноми обертаються в нуль [**3**]. В самій множині співвідношень можливо знову вказати скінченну кількість базисних співвідношень, алгебраїчними наслідками яких є всі інші (співвідношення утворюють ідеал в кільці многочленів від змінних $t_1, t_2, \ldots, t_m$, базисні співвідношення являються його твірними). Базисні співвідношення самі не є незалежними. Так визначаються другі сізігії і т. д. [**3**].

Побудований ланцюг сізігій завжди був скінченним. Наприклад, якщо G — симетрична група всіх перестановок координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то алгеброю інваріантів є алгебра всіх симетричних многочленів від $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Елементарні симетричні многочлени являються базисними інваріантами, які алгебраїчно незалежні. В цьому випадку сізігій немає.

Таким чином, в теорії інваріантів виникли такі задачі: 1) показати, що алгебра інваріантів даного зображення заданої групи скінченновимірна (перша основна теорема теорії інваріантів), і 2) визначити систему базисних інваріантів; показати, що існує скінчений базис в сізігіях цієї алгебри інваріантів (друга основна теорема теорії інваріантів) і знайти його).

Спочатку в теорії інваріантів вивчались інваріанти форм, тобто інваріанти лінійної групи відносно її зображення в просторі симетричних тензорів даної валентності. Коефіцієнти вихідної форми f і є компонентами цього тензора [**3**].

В такій постановці задача опису інваріантів є частковим випадком більш загальної задачі: розкласти простір тензорів даної валентності в суму незвідних інваріантних підпросторів відносно даної групи лінійних перетворень основного простору. Розклад простору тензорів валентності p відповідає розкладу p-того тензорного степеня відповідного зображення в суму незвідних компонент і є однією з важливих задач теорії зображень. Одновимірна компонента в розкладі p-того тензорного степеня зображення групи G на незвідні свідчить про наявність інваріантного тензора. Таким чином, задача знаходження інваріантів може бути зведена до виділення одновимірних інваріантних підпросторів [**4, 5**].

Інваріантні тензори грають важливу роль в фізиці, зокрема в спеціальній теорії відносності.

Значний внесок в розвиток методів теорії зображень груп Лі, а також в опис максимальних підгруп класичних груп (повністю описані максимальні підгрупи простих груп) був зроблений Динкіним Є. Б. в роботі «Максимальные подгруппы классических групп» [**2**]. Отримані результати про максимальні підгрупи одночасно були суттєвим доробком для теорії однорідних просторів. Зазначимо, що інваріанти і інваріантні тензори часто так або інакше розглядались в зв'язку з однорідними просторами. Це стосується інваріантів підгрупи групи проективних перетворень і ріманових просторів постійної кривизни, ріманових симетричних просторів та теорії зображень напівпрямих груп Лі.

Розглянемо скінченновимірний векторний простір V над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{C}$. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — базис простору V. Визначимо на просторі V полілінійну функцію f_i:

$$f_i(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_i.$$

Функції f_i породжують підалгебру $S(V)$ алгебри всіх функцій на V із значеннями в $\mathbb{C}$. Елементи цієї підалгебри називаються поліноміальними функціями від n змінних на V. Існує ізоморфізм ϕ алгебри $S(V)$ на алгебру поліномів $C[T_1, T_2, \dots, T_n]$, для якого $\phi(f_i) = T_i$ **[7, 11, 12]**.

Елемент $f \in S(V)$ називається *однорідною функцією степеня* d, якщо

$$f(x\nu) = x^d f(\nu), \quad \nu \in V, x \in \mathbb{C},$$

тобто, якщо $\phi(f)$ — однорідний поліном степеня d **[7, 11, 12]**.

Множина всіх однорідних поліноміальних функцій степеня d є скінченновимірним векторним підпростором в S, причому $S_0 = \mathbb{C}$. Крім того, $S_d \cdot S_l = S_{d+l}$ і S є прямою сумою підпросторів S_d. Ці властивості показують, що підпростори S_d визначають на S структуру градуйованої алгебри.

Алгебра A над полем P називається *градуйованою*, якщо вона є прямою сумою $A = \bigoplus\limits_{d \geq 0} A_d$ таких підпросторів, що $A_d A_l \subset A_{d+l}$. Елементи алгебри A, які лежать в A_d, називаються *однорідними елементами степеня* d **[7, 11, 12]**.

Нехай $GL(n, c)$ група всіх оборотних перетворень простору V. Якщо $g \in GL(n, c)$, $f \in S(V)$, то функцію $g \cdot f \in S(V)$ можна визначити рівністю:

$$g \cdot f(\nu) = f(g^{-1}\nu).$$

Причому, $g(hf) = (gh)f$, і $gS_d = S_d$, де $h \in S$.

Розглянемо підгрупу S групи $GL(n, c)$.

Функція $f \in S(V)$ називається *інваріантом групи* G, якщо

$$gf = f \text{ для всіх } g \in G.$$

Всі інваріанти групи G утворюють підалгебру S^G алгебри S, причому вона є градуйованою підалгеброю, тобто

$$S^G = +\bigoplus_{d \geq 0} (S^G \cap S_d).$$

Властивості таких алгебр S^G і вивчаються в теорії інваріантів.

Назва «поліном Пуанкаре» або «ряд Пуанкаре» використана Н. Бурбакі [**1, 12**]. Але саме поняття зустрічається вже в Келі [**8, 9**].

Нехай $M = \bigoplus\limits_{d\geq 0} M_d$ — скінченно породжений градуйований A-модуль. Тоді всі M_d є скінченновимірними векторними просторами над P.

Формальний степеневий ряд $P_M(T) \in Z(T)$, де Z — кільце цілих чисел.

$$P_M(T) = \sum_{d\geq 0} \dim_k(M_d)T^d$$

називається *рядом Пуанкаре модуля* M [**7, 11, 12**].

Твердження 1. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — система однорідних твірних алгебри A і d_i — степінь елемента a_i. Тоді існує такий поліном $F(T) \in Z(T)$, що*

$$P_M(T) = F(T)\prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})^{-1}.$$

Лема 1. *Якщо елементи a_i з попереднього твердження алгебраїчно незалежні, то*

$$P_A(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})^{-1}.$$

В цьому випадку цілі числа d_i визначені з точністю до порядку самої алгебри A (тобто не залежать від вибору твірних a_i).

Теорема 1. *Нехай поле K нескінченне. Тоді існує такий поліном $F(T) \in Z(T)$, що*

$$P_M(T) = F(M)\prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})^{-1}.$$

Нехай $G = SL(n, C)$. R_d — простір всіх однорідних поліномів степеня d, ρ_d — зображення групи G в просторі R_d. Можна показати, що будь-яке незвідне зображення групи $SL(n, C)$ еквівалентне деякому зображенню ρ_d [**11**].

Позначимо через K_d — алгебру інваріантів бінарних форм степеня d. Її ряд Пуанкаре має вигляд:

$$P_d(t) = \sum_{e=0}^{\infty} m(d, e)t^e,$$

де t — змінна, $m(d, e)$ — розмірність простору S_e^G всіх однорідних інваріантних поліноміальних функцій на R_d, які мають степінь e [**7, 11, 12**].

Визначимо повну систему інваріантів алгебри K_d. Нехай K_d^+ — ідеал алгебри K_d, породжений всіма однорідними елементами додатного степеня. Якщо A — множина однорідних елементів в K_d^+, образи яких в $K_d^+/(K_d^+)^2$ складають базис цього векторного простору, то A є мінімальною множиною однорідних твірних K_d. Ця множина називається *повною системою інваріантів алгебри* K_d (система твірних A називається *мінімальною*, якщо ніяка її власна підсистема не є системою твірних) [**7, 11, 12**].

Постає задача визначення повної системи інваріантів для алгебри K_d. Розв'язання цієї задачі пов'язане із знаходженням конкретного вигляду ряду Пуанкаре для відповідного зображення ρ_d.

Зазначимо також, що за законом взаємності Шарля Ерміта, розмірність простору всіх однорідних поліноміальних функцій на R_d, які мають степінь e, дорівнює розмірності простору однорідних поліноміальних функцій на R_e, які мають степінь d [**7, 11, 12**]:

$$m(d,e)=m(e,d).$$

Відмітимо, що обчисленню поліномів Пуанкаре однорідних просторів присвячений ряд робіт, зокрема Т. Спрінгера, О. В. Мантурова, А. Т. Фоменка, Доан Куіня.

Виберемо за G групу $SL(2,C)$ — спеціальну лінійну групу матриць $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Група $SL(2,C)$ діє в просторі всіх однорідних поліномів степеня 2 від двох змінних x і y. А довільне зображення ϕ групи $SL(2,C)$ еквівалентне деякому зображенню $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{0}$, тобто зображенню, що діє в просторі поліномів степеня d від двох змінних [**11**].

В XIX столітті повні системи інваріантів були знайдені для $d\le 6$ [**9**]. Перші не розроблені класиками випадки — це $d=7, d=8$. Випадок $d=8$ розглядався Т. Шіодою [**10**]. Він повністю визначив систему твірних, яка складається з дев'яти однорідних інваріантів $f_1, f_2, \ldots, f_{10}$ степенів $2,3,\ldots,10$ відповідно, і описав п'ять базисних співвідношень між цими твірними.

В роботах Т. Спрінгера [**7, 11, 12**] наведено список рядів Пуанкаре зображень $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{0}$ для повної системи інваріантів при $d=2,3,4,5,6,7,8$:

$$P_2(T)=\frac{1}{1-t^2},\quad P_3(T)=\frac{1}{1-t^4},\quad P_4(T)=\frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)},$$

$$P_5(T)=\frac{1+t^{18}}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})},\quad P_6(T)=\frac{1+t^{15}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})},$$

$$P_7(T)=\frac{Q_7(t)}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{20})},\quad \text{де}$$

$$\begin{aligned}Q_7(t)=&1+2t^8+4t^{12}+4t^{14}+5t^{16}+9t^{18}+6t^{20}+9t^{22}+\\&+8t^{24}+9t^{26}+6t^{28}+9t^{30}+5t^{32}+4t^{34}+4t^{36}+2t^{40}+t^{48}.\end{aligned}$$

$$P_8(T) = \frac{1+t^8+t^{10}+t^{18}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)}.$$

При $d > 8$ питання залишалося відкритим до роботи Т. Спрінгера [**7, 11, 12**].

В роботах [**7, 11, 12**] Т. Спрінгером були знайдені загальні формули обчислення рядів Пуанкаре $P_d(t)$ для повної системи інваріантів. Вони мають такий вигляд:

$$P_d(t) = \sum_{0\le j<\frac{d}{2}} \phi_{d-2j}((1-\mu_2)\gamma_{dj}(t)),$$

$$\gamma_{dj}(t) = (-1)^j t^{j(j+1)}((j,t^2)!(d-j,t^2)!)^{-1}.$$

Відображення ϕ_n діє на функцію $f(t)$ таким чином:

$$(\phi_n(f))(t^n) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_n^j t), \text{ де } \xi_n \text{ позначає комплексне число } e^{\frac{2\pi i}{n}};$$

$$(d,t)! = (1-t)(1-t^2)\dots(1-t^d),$$

$$\mu_l(t) = t^l.$$

Але на практиці користуватись цими формулами важко. Обчислення виходять дуже громіздкими вже при $d = 5$. Далі ми розглянемо спрощений варіант цієї формули.

В наступних твердженнях розглянемо більш докладно, як діє відображення $\phi_n : C(z) \to C(z)$ на функцію $f(t)$.

Покладемо $f(t) = t^m$. Тоді справедливе таке твердження.

Твердження 2. *Нехай функція $f(t)$ має вигляд $f(t) = t^m, m \in Z$. Тоді відображення ϕ_n на функцію $f(t)$ діє таким чином:*

$$\phi_n(t^m) = \begin{cases} t^{\frac{m}{n}}, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0, & \text{якщо } m \text{ не ділиться на } n. \end{cases}$$

Твердження 3. *Нехай функція $f(t)$ має вигляд $f(t) = (1-t^m)^{-1}, m \in Z$. Тоді, якщо $\frac{m}{n} = \frac{r}{k}$, де $r, k \in N$, то відображення ϕ_n на функцію $f(t)$ діє таким чином:*

$$\phi_n((1-t^m)^{-1}) = (1-t^r)^{-1}\phi_n\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^{im}\right).$$

Твердження 4. *Нехай $\frac{f(t)}{Q(t)}$ — дробово-раціональна функція і нехай існує раціональна функція $P(t)$, така, що $Q(t)P(t) = R(t^{nk})$ — поліном від $2^{nk}, k \in Z$. Тоді*

$$\phi_n\left(\frac{f(t)}{Q(t)}\right) = \frac{\phi_n(f(t)P(t))}{R(t^k)}.$$

Враховуючи розглянуті твердження, запишемо формули для обчислення ряду Пуанкаре.

$$P_d(t) = \sum_{0\le<\frac{d}{2}} \phi_{d-2j}((1-t^2)\gamma_{dj}(t)),$$

$$\gamma_{dj}(t) = (-1)^j t^{j(j+1)}((j,t^2)!(d-j,t^2)!)^{-1},$$

$$(d,t)! = (1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^d),$$

$$(d,t^2)! = (1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2d}),$$

$$(0,t^2)! = 1,$$

$$\phi_n(t^m) = \begin{cases} t^{\frac{m}{n}}, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0, & \text{якщо } m \text{ не ділиться на } n. \end{cases}$$

$$\phi_1(t^m) = t^m, \quad \phi_n(1) = 1,$$

$$\phi_n((1-t^m)^{-1}) = (1-t^m)^{-1}\phi_n\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^{im}\right).$$

Якщо $\frac{m}{n} = \frac{r}{k}$, де $r,k \in N$, то $\phi_n((1-t^m)^{-1} = (1-t^r)^{-1}\phi_n\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} t^{im}\right)$.

Якщо $\frac{m}{n} = r$, де $r \in N$, то $\phi_n((1-t^m)^{-1}) = (1-t^r)^{-1}$.

$$\phi_n((1-t^m)^{-1}) = (1-t^m)^{-1}.$$

Використовуючи ці формули, можна обчислити ряд Пуанкаре практично для будь-якого d. Але через їх громіздкість для обчислення ми зробимо їх спрощення і знайдемо залежності між базовими многочленами, за допомогою яких ми шукаємо ряд Пуанкаре.

Теорема 2. *Якщо $j = 0$, то справедлива формула*

$$\phi_d((1-t^2)\gamma_{d0}(t)) = \frac{\phi_d\left(\prod\limits_{m=2}^{d-1}\sum\limits_{i=0}^{d-1} t^{2im}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{d-1}(1-t^{2m})}.$$

Доведення.

$$\phi_d((1-t^2)\gamma_{d0}(t)) = \phi_d\frac{(1-t^2)}{(d,t^2)!} = \phi_d\frac{(1-t^2)}{\prod\limits_{m=1}^{d}(1-t^{2m})} = \phi_d\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{d}(1-t^{2m})} =$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\phi_d\frac{1-t^2}{\prod\limits_{m=1}^{d-1}(1-t^{2m})} = \frac{\phi_d\left(\prod\limits_{m=2}^{d-1}\sum\limits_{i=0}^{d-1} t^{2im}\right)}{(1-t^2)\prod\limits_{m=2}^{d-1}(1-t^{2m})} = \frac{\phi_d\left(\prod\limits_{m=2}^{d-1}\sum\limits_{i=0}^{d-1} t^{2im}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{d-1}(1-t^{2m})}.$$

□

Теорема 3. *Якщо* $1 \le j \le \frac{d}{2} - 1$, *а* d — *непарне, то справедлива формула*

$$\phi_{d-2j}((1-t^2)\gamma_{dj}(t)) = \frac{(-1)^j \phi_{d-2j}\left(t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}^{d-j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\right)}{\prod_{m=1}^{j}(1-t^m)\prod_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}^{d-j}(1-t^{2m})}.$$

Доведення.

$$\phi_{d-2j}\frac{(1-t^2)(-1)^j t^{j(j+1)}}{(j,t^2)!(d-j,t^2)!} =$$

$$= \phi_{d-2j}\frac{(-1)^j t^{j(j+1)}(1-t^2)}{\prod_{m=1}^{j}(1-t^{2m})\prod_{m=2}^{d-j}(1-t^{2m})} = \phi_{d-2j}\frac{(-1)^j t^{j(j+1)}}{\prod_{m=1}^{j}(1-t^{2m})\prod_{m=2}^{d-j}(1-t^{2m})} =$$

$$= \frac{(-1)^j \phi_{d-2j}\left(t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}^{d-j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\right)}{\prod_{m=1}^{j}(1-t^{2m})\prod_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}^{d-j}(1-t^{2m})}.$$

□

Теорема 4. *Якщо* $d-2j=1$, *то справедлива формула*

$$\phi_1((1-t^2)\gamma_{dj}(t)) = \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{(d^2-1)}{4}}}{\prod_{m=1}^{\frac{d-1}{2}}(1-t^{2m})\prod_{m=2}^{\frac{d+1}{2}}(1-t^{2m})}.$$

Доведення. При обчисленні ϕ_1, тобто, коли $d-2j=1$,

$$j = \frac{d-1}{2}, \quad j+1 = \frac{d+1}{2}, \quad d-j = \frac{2d-d+1}{2} = \frac{d+1}{2}.$$

$$\phi_1((1-t^2)\gamma_{dj}(t)) = \phi_1\frac{(1-t^2)(-1)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d-1}{2}\cdot\frac{d+1}{2}}}{\left(\frac{d-1}{2},t^2\right)!\left(\frac{d+1}{2},t^2\right)!} = \phi_1\frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d^2-1}{4}}(1-t^2)}{\prod_{m=1}^{\frac{d-1}{2}}(1-t^{2m})\prod_{m=1}^{\frac{d+1}{2}}(1-t^{2m})} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d^2-1}{4}}}{\prod_{m=1}^{\frac{d-1}{2}}(1-t^{2m})\prod_{m=1}^{\frac{d+1}{2}}(1-t^{2m})}.$$

□

Запишемо доведені формули разом в загальному вигляді.

$$\phi_d((1-t^2)\gamma_{d0}(t)) = \frac{\phi_d\left(\prod\limits_{m=2}^{d-1}\sum\limits_{i=0}^{d-1} t^{2im}\right)}{(1-t^2)\prod\limits_{m=2}^{d-1}(1-t^{2m})}. \tag{1}$$

$$\phi_{d-2j}((1-t^2)\gamma_{dj}(t)) = \frac{(-1)^j\phi_{d-2j}\left(t^{j(j+1)}\left(\prod\limits_{m=1}^{j}\sum\limits_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\right)}{\prod\limits_{m=1}^{j}(1-t^{2m})\prod\limits_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}(1-t^{2m})}, \tag{2}$$

коли $1 \le j \le \frac{d}{2}-1$ при непарному d.

$$\phi_1((1-t^2)\gamma_{dj}(t)) = \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d^2-1}{4}}}{\prod\limits_{m=1}^{\frac{d-1}{2}}(1-t^{2m})\prod\limits_{m=1}^{\frac{d+1}{2}}(1-t^{2m})}. \tag{3}$$

У формулі (1), тобто у виразі для ϕ_d, будемо використовувати позначення

$$T_0^d = \prod_{m=2}^{d-1}\sum_{i=0}^{d-1} t^{2im}, \quad \phi_d(T_0^d) = Q_0^d. \tag{4}$$

Позначимо через D значення d при $j=0$, тобто $d_j = d_0 = D$.

У формулі (2), тобто у виразі для ϕ_{d-2j} при $1 \le j \le \frac{d}{2}-1$, позначимо

$$T_j = t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq d-2j}}^{d-j}\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im}\right), \quad \phi_{d-2j}(T_i) = Q_i. \tag{5}$$

Теорема 5. *У позначеннях* (4), (5) *справедливі такі формули*

$$T_1 = T_0\cdot M_1,\ T_2 = T_1\cdot M_2, \dots,\ T_j = T_{j-1}\cdot M_j, \tag{6}$$

$$M_j = \left(\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2ji}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2(d-j)i}\right)t^{2j}, \tag{7}$$

де $j = \frac{d-D}{2}$.

Зауважимо, що $j = \frac{d-D}{2}$, *оскільки* $d-2j = D$, *тобто* $d = D+2j$, *точніше,* $d_j = D+2j$, *і* $d_j - 2j = D$.

Доведення. 1) Доведемо, що $T_1 = T_0\cdot M_1$.

Нехай $d_0 = K$, тоді за формулою (4)

$$T_0^d = T_0^K = \prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}.$$

Тоді при $j=1$, $d_1=K+2$ за формулою (5)

$$T_1 = t^2\left(\prod_{m=1}^{1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq K}}^{K+1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right) = t^2\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq K}}^{K+1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right). \tag{8}$$

$$M_1 = \left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i}\right)\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i(K+1)}\right)t^2.$$

$$T_0\cdot M_1 = t^2\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i}\right)\left(\prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right)\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i(K+1)}\right). \tag{9}$$

В отриманих рівностях (8) і (9) перші співмножники рівні, таким чином, залишається довести, що

$$\prod_{\substack{m=2\\ m\neq K}}^{K+1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im} = \left(\prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right)\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i(K+1)}\right).$$

$$\prod_{\substack{m=2\\ m\neq K}}^{K+1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im} = \left(\prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{m=K+1}^{K+1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right) = \left(\prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1} t^{2im}\right)\left(\sum_{i=0}^{K-1} t^{2i(K+1)}\right).$$

Таким чином, ми можемо зробити висновок, що $T_1 = T_0\cdot M_1$.

2)Доведемо, що $T_j = T_{j-1}\cdot M_j$.

Нехай $d_j = D = 2j$, отже, $d_j - 2j = D$.

$d_{j-1} = D + 2(j-1)$, отже, $D_{j-1} - 2(j-1) = D$.

Тоді $d_{j-1} - j + 1 = D = 2(j-1) - j + 1 = D + j - 1$; $d_j - j = D + 2j - j = D + j$.

Запишемо вирази для знаходження T_j і T_{j-1} використовуючи формулу (5); вираз для M_j, використовуючи формулу (7).

$$T_j = t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{D-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq D}}^{D+j}\sum_{i=0}^{D-1} t^{2im}\right).$$

$$T_{j-1} = t^{j(j-1)}\left(\prod_{m=1}^{j-1}\sum_{i=0}^{D-1} t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq D}}^{D-j+1}\sum_{i=0}^{D-1} t^{2im}\right).$$

$$M_j = \left(\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2ij}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2i(d-j)}\right)t^{2j}.$$

Знайдемо добуток

$$T_{j-1}\cdot M_j = t^{j(j-1)}\left(\prod_{m=1}^{j-1}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq D}}^{D-j+1}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2ij}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2ij}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2i(d-j)}\right)t^{2j} =$$

$$= t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq D}}^{D-j+1}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2im}\right)\left(\sum_{i=0}^{D-1}t^{2(D+j)i}\right) =$$

$$= t^{j(j+1)}\left(\prod_{m=1}^{j}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2im}\right)\left(\prod_{\substack{m=2\\ m\neq D}}^{D+j}\sum_{i=0}^{D-1}t^{2im}\right) = T_j.$$

Таким чином, $T_j = T_{j-1}\cdot M_j$. □

Розглянемо застосування доведених формул більш конкретно.

Нехай $d = K$, тобто d дорівнює конкретному числовому значенню і ми за формулою (1) обчислили $\phi_d = \phi_K$. Тобто ми знаємо

$$T_0^d = \prod_{m=2}^{d-1}\sum_{i=0}^{d-1}t^{2im},\ \text{а саме}\ T_0^K = \prod_{m=2}^{K-1}\sum_{i=0}^{K-1}t^{2im}.$$

Тоді при обчисленні ϕ_{d-2j} при $d = K+2$, $j = 1$ одержуємо: $\phi_{d-2j} = \phi_K$,

$$T_1 = T_0\cdot\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2ij}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2(d-j)i}\right)t^{2j},\ \phi_{d-2j}T_1 = \phi_K T_1 = Q_1.$$

Далі при обчисленні ϕ_{d-2j} при $d = K+4$, $j = 2$ одержуємо: $\phi_{d-2j} = \phi_K$,

$$T_2 = T_1\cdot\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2ij}\right)\left(\sum_{i=0}^{d-2j-1}t^{2(d-j)i}\right)t^{2j},\ \phi_{d-2j}T_2 = \phi_K T_2 = Q_2.$$

Знайшовши поліном Пуанкаре, ми таким чином, знайдемо систему твірних в алгебрі інваріантів для певного конкретного значення d, яку описує знаменник ряду Пуанкаре. Наприклад,

$$P_7(t) = \frac{Q_7(t)}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{20})},$$

де

$$Q_7(t) = 1 + 2t^8 + 4t^{12} + 4t^{14} + 5t^{16} + 9t^{18} + 6t^{20} + 9t^{22} + \\ + 8t^{24} + 9t^{26} + 6t^{28} + 9t^{30} + 5t^{32} + 4t^{34} + 4t^{36} + 2t^{40} + t^{48}.$$

Отже, функціонально незалежними є інваріанти f_4, f_8, f_{12}, f_{20} степенів 4, 8, 12, 20 відповідно.

Використовуючи формули (1)–(7) ми можемо обчислити ряд Пуанкаре практично для будь-якого d.

Зображення груп і алгебр являють собою математичний апарат теорії симетрій, яка як метод дослідження все ширше застосовується в різних галузях знань. Теорія зображень груп і алгебр відіграє велику роль в розвитку фізики елементарних частин, ядерній спектроскопії, квантовій теорії поля, атомній фізиці, а також в теорії спеціальних функцій. Вона знаходить все більше застосування в квантовій хімії, фізиці твердого тіла, квантовій оптиці і електроніці. Теоретичні дослідження із застосуванням зображень унітарних груп Лі призвели до відкриття нових елементарних частинок, які з часом були відкриті експериментально, і до введення кварків — частинок з дробовим зарядом, з яких складаються елементарні частинки. Успіх теоретико-групових методів сприяє не тільки подальшому розвитку самої теорії, але і широкому застосуванню зображень груп в інших науках. У зв'язку з цим виникає необхідність розробки відповідних питань і напрямків прикладної теорії зображень.

До прикладних питань теорії зображень груп відносяться, по-перше, її обчислювальні методи, які включають наступні розділи теорії зображень: 1) формули і методи обчислень крайностей вагів скінченновимірних зображень напівпростих груп Лі; 2) формули і методи обчислень кратностей незвідних зображень в тензорному добутку зображень груп і в звуженнях зображень групи на підгрупу; 3) формули і методи обчислень коефіцієнтів Клебша–Гордана для тензорних добутків зображень груп в різних базисах; складання таблиць коефіцієнтів Клебша–Гордана; 4) побудова базисів просторів зображень; 5) обчислення матричних елементів просторів зображень груп і зображень алгебр Лі (інфінітезимальних операторів) в різних базисах; 6) побудова власних функцій повних наборів комутуючих операторів, пов'язаних з зображенням груп; 7) побудова розкладів функцій на конкретних однорідних просторах, пов'язаних з групою; 8) обчислення коефіцієнтів переходу від одного базису простору зображення до другого. Перераховані задачі найбільш тісно пов'язані з прикладними аспектами теорії зображень груп і алгебр Лі.

Література

[1] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 1 – 3. – М.: Мир, 1976. Гл. 4 – 6. – М.: Мир, 1972. Гл. 7, 8. – М.: Мир, 1978. Гл. 9. – М.: Мир, 1986.

[2] *Дынкин Е. Б.* Максимальные подгруппы классических групп. – Тр. Моск. матем. об-ва. – 1952. – Т. 1. – С. 39-166.

[3] *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. – Т. 2. Геометрия. – М.: Наука, 1987. – 416 с.

[4] *Климык А. У.* О разложении прямого произведения неприводимых представлений полупростых алгебр Ли на неприводимые представления. – К.: Наукова думка, 1966. – 16 с.

[5] *Климык А. У.* О представлениях со старшим вектором полупростых алгебр Ли. – К.: ИТФ, 1967. Препринт 68-2.

[6] *Мантуров О. В.* О полиномах Пуанкаре некоторых однородных пространств // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу / МГУ им. М. В. Ломоносова. – М., 1968. – Вып. XIV. – С. 20-32.

[7] *Спрингер Т.* Теория инвариантов. – М.: Мир, 1981. – 191 с.

[8] *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1990. – 256 с.

[9] *Cayley A.* A second memoir upon quantics // Coll. Math. Papers. – Cambridge University Press: 1889. – Vol. II. – P. 250-275.

[10] *Shioda T.* On the graded ring of invariants of binary octavics // American Journal of Mathematics. – 1967. – Vol. 89, No. 4. – P. 1022-1046.

[11] *Springer T. A.* On the invariant theory of SU2 // Nederl. Akad. Wetensch. Indiah. Math. – 1980. – Vol. 42, No. 3. – S. 339-345.

[12] *Springer T. A.* Series de Poincare dans la theorie des invariants. (Poincare series in invariant theory) in Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin algebra seminar, 35th year (Paris, 1982) // Lecture Notes in Math. – 1983. – № 1029. – P. 37-54. (Springer, Berlin-New York).

References

[1] Bourbaki N., *Lie Groups and Lie Algebras*, 1989, 450 p.

[2] Dynkin E., *Tr. Mosk. matem. ob-va (Transactions of the Moscow Mathematical Society)*, 1952, vol. 1, pp. 39-166.

[3] Klein F., *Elementarnaja matematika s tochki zreniya vysshey (Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry)*, 1987, 416 p.

[4] Klimyk A. U., *O razlozhenii pryamogo proizvedeniya neprivodimyh predstavleniy poluprostyh algebr Li na neprivodimye predstavlenija*, 1966, 16 p.

[5] Klimyk A. U., *O predstavleniyah so starshim vektorom poluprostyh algebr Li*, preprint, 1967.

[6] Manturov O. V., *Tr. sem. po vekt. i tenz. analizu (Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis)*, 1968, Vol. XIV, pp. 20-32.

[7] Springer T. A., *Teoriya invariantov (Invariant Theory)*, 1981, 191 p.

[8] Struik D. J., *Kratkiy ocherk istorii matematiki (A Concise History of Mathematics)*, 1990, 256 p.

[9] Cayley A., *Coll. Math. Papers.*, 1889, Vol. II, pp. 250-275.

[10] Shioda T., *American Journal of Mathematics*, 1967, Vol. 89, No. 4, pp. 1022-1046.

[11] Springer T. A., *Nederl. Akad. Wetensch. Indiah. Math.*, 1980, Vol. 42, No. 3., pp. 339-345.

[12] Springer T. A., *Lecture Notes in Math.*, 1983, 1029, pp. 37-54.