Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 215–228.

УДК 517.5

Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю

С. О. Сербенюк

Інститут математики НАН України

Анотація. Стаття присвячена дослідженню функції

$$f : x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \to \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)\ldots} = f(x) = y,$$

де $\varphi(i) = \frac{-3i^2+7i}{2}$, $i \in N^0_2 = \{0, 1, 2\}$ та $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — трійкове зображення числа $x \in [0; 1]$.

Досліджено основні властивості функції f як відображення, а також диференціальні, інтегральні та фрактальні властивості цієї функції. Виведено її еквівалентні задання з допомогою додатково означених допоміжних функцій.

Ключові слова: ніде не диференційовна функція, автомат зі скінченною пам'яттю, фрактал.

Properties of an almost everywhere continuous and nowhere differentiable function defined via automata with a finite memory

S. Serbenyuk,

Institute for Mathematics of NASU

Abstract. This paper is devoted to the investigation of function

$$f : x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \to \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)\ldots} = f(x) = y,$$

where $\varphi(i) = \frac{-3i^2+7i}{2}$, $i \in N^0_2 = \{0, 1, 2\}$ and $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — ternary expansion of number $x \in [0; 1]$.

Main mapping properties and differential, integral, fractal properties of the function are studied. Equivalent representation by additionally defined auxiliary functions of this function are proved.

AMS Subject Classifications (2010): 46T20, 11B85.

Key words: nowhere differentiable function, automata with a finite memory, fractal.

E-mail: simon6@ukr.net

Вступ

У дослідженнях в галузі метричної та ймовірнісної теорії чисел, математичних об'єктів зі складною локальною будовою відносно часто зустрічаються фрактальні множини. Для дослідження таких множин в просторі $\mathbb{R}^2$ часто доводиться розглядати такі множини як графіки функцій, які відображають простір $\mathbb{R}^1$ в простір $\mathbb{R}^1$.

Дана робота стосується вивчення одного прикладу такої функції, аргумент та значення якої представляються в трійковій системі числення, а сама функція є канторівським проектором, який задано автоматом зі скінченною пам'яттю.

1. Об'єкт дослідження

Домовившись у трійковій системі числення не розглядати трійково-раціональні числа, зображення яких містить період (2) (крім числа 1), дослідимо функцію f, означену на відрізку $[0,1]$ наступним чином:

$$x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f} \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)\ldots} = f(x) = y, \tag{1}$$

де $\varphi(i) = \frac{-3i^2+7i}{2}$, $i \in N_2^0 = \{0,1,2\}$.

Дослідимо диференціальні, інтегральні, фрактальні властивості f та властивості цієї функції як відображення.

Означимо додаткові функції, потрібні для дослідження деяких властивостей функції f.

Нехай i, j, k — цифри трійкової системи числення, причому попарно різні. Означимо функцію $\varphi_{ij}(\alpha)$, визначену на алфавіті трійкової системи числення наступним чином

	i	j	k
$\varphi_{ij}(\alpha)$	0	0	1

Під функцією f_{ij} будемо розуміти функцію, означену наступним чином:

$$x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f_{ij}} \Delta^3_{\varphi_{ij}(\alpha_1)\varphi_{ij}(\alpha_2)\ldots\varphi_{ij}(\alpha_n)\ldots} = f_{ij}(x) = y.$$

Зауваження 1. *З означення функції f_{ij} очевидно, що $f_{01} = f_{10}$, $f_{02} = f_{20}$, $f_{12} = f_{21}$. Тому надалі будемо використовувати лише позначення f_{01}, f_{02}, f_{12}.*

Лема 1. *Функцію f можна означити за допомогою наступних трьох еквівалентних між собою виразів:*

(1)

$$f(x) = 2x - 3f_{01}(x), \quad де \;\; \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f_{01}} \Delta^3_{\varphi_{01}(\alpha_1)\varphi_{01}(\alpha_2)\ldots\varphi_{01}(\alpha_n)\ldots}, \tag{2}$$

$\varphi_{01}(i) = \frac{i^2-i}{2}$, $i \in N_2^0$;

(2)

$$f(x) = \frac{3}{2} - x - 3f_{12}(x), \quad \textit{де} \ \ \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \stackrel{f_{12}}{\to} \Delta^3_{\varphi_{12}(\alpha_1)\varphi_{12}(\alpha_2)\ldots\varphi_{12}(\alpha_n)\ldots}, \tag{3}$$

$\varphi_{12}(i) = \frac{i^2-3i+2}{2}$, $i \in N^0_2$.

(3)

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}f_{02}(x), \quad \textit{де} \ \ \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \stackrel{f_{02}}{\to} \Delta^3_{\varphi_{02}(\alpha_1)\varphi_{02}(\alpha_2)\ldots\varphi_{02}(\alpha_n)\ldots}, \tag{4}$$

$\varphi_{02}(i) = -i^2 + 2i$, $i \in N^0_2$.

Доведення. Очевидно, що кожне число $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ в трійковій системі числення можна представити у вигляді суми двох чисел $\Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ та $\Delta^3_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ таких, що $\beta_n \in N^0_1$ та $\gamma_n \in N^0_1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Причому, очевидно, що $\alpha_n = 2$ тоді і тільки тоді, коли $\beta_n = \gamma_n = 1$.

Легко показати, що на множині

$$C[3, \{0,1\}] = \{x : x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \ \alpha_n \in \{0,1\}\}$$

досліджувана функція має вигляд $f(x) = 2x$. Цей факт, насамперед, слідує з означення функції f.

Проте, $1 = \varphi(2) \neq \varphi(1) + \varphi(1) = 4$. Саме тому

$$\varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) - \ 3.$$

Таким чином

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) - 3\Delta^3_{\underbrace{000\ldots00}_{k_1-1}1\underbrace{000\ldots00}_{k_2-k_1-1}1\ldots\underbrace{000\ldots00}_{k_n-(k_1+\ldots+k_{n-1})-1}1\ldots} =$$

$$= 2x - 3\Delta^3_{\underbrace{000\ldots00}_{k_1-1}1\underbrace{000\ldots00}_{k_2-k_1-1}1\ldots\underbrace{000\ldots00}_{k_n-(k_1+\ldots+k_{n-1})-1}1\ldots},$$

де $x = \Delta^3_{e_1e_2\ldots e_{k_1-1}2e_{k_1+1}\ldots e_{k_2-1}2e_{k_2+1}\ldots e_{k_n-1}2e_{k_n+1}\ldots}$, $e_k \in \{0,1\}$. Тобто, k_n — позиція n-тої двійки в зображенні числа x.

Останнє задання функції f еквівалентне наступному:

$$f(x) = 2x - 3f_{01}(x),$$

де

$$x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \stackrel{f_{01}}{\to} \Delta^3_{\varphi_{01}(\alpha_1)\varphi_{01}(\alpha_2)\ldots\varphi_{01}(\alpha_n)\ldots} = f_{01}(x) = y,$$

$$\varphi_{01}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \in \{0,1\}; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i = 2. \end{cases}$$

Тобто, $\varphi_{01}(i) = \frac{i^2-i}{2}$ при $i \in N^0_2$.

Легко показати, що

$$f_{01}(x) = x - \Delta^3_{111...} + f_{12}(x) = x - \frac{1}{2} + f_{12}(x),$$

де $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} \stackrel{f_{12}}{\to} \Delta^3_{\varphi_{12}(\alpha_1)\varphi_{12}(\alpha_2)...\varphi_{12}(\alpha_n)...} = f_{12}(x) = y$, $\varphi_{12}(i) = \frac{i^2-3i+2}{2}$, $i \in N^0_2$. Таким чином

$$f(x) = 2x - 3f_{01}(x) = 2x - 3\left(x - \frac{1}{2} + f_{12}(x)\right) = \frac{3}{2} - x - 3f_{12}(x).$$

Варто зазначити, що для будь-якого $x \in [0,1]$

$$f_{01}(x) + f_{12}(x) + f_{02}(x) = \Delta^3_{111...} = \frac{1}{2}.$$

Тому з останньої рівності та суми двох попередньо доведених представлень функції f слідує, що

$$2f(x) = x + \frac{3}{2} - 3(f_{01}(x) + f_{12}(x)) = x + \frac{3}{2} - 3(\frac{1}{2} - f_{02}(x)) = x + 3f_{02}(x).$$

□

Лема 2. *Функції $f, f_{01}, f_{02}, f_{12}$ мають наступні властивості:*

(1)

$$[0,1] \stackrel{f}{\to} \left([0,1] \setminus \{\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n 111...}\}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

(2) Єдиною інваріантною точкою для функції f є точка $x_0 = 0$.

(3) Функція f не є бієктивним відображенням на деякій зчисленній підмножині точок відрізка $[0,1]$.

(4) Для кожного $x \in [0,1]$

$$f(x) - f(1-x) = f_{01}(x) - f_{12}(x). \tag{5}$$

(5) Для кожного $x \in [0,1]$

$$f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2} + 3f_{02}(x). \tag{6}$$

(6) Для довільного $x \in [0,1]$

$$f_{01}(x) + f_{02}(x) + f_{12}(x) = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

(7)

$$2f_{01}(x) + f_{02}(x) = x. \tag{8}$$

(8) Для будь-якого $x \in [0,1]$

$$f_{01}(x) - f_{12}(x) = x - \frac{1}{2}. \tag{9}$$

(9) Функція f є ні зростаючою, ні спадною. Зокрема, на множині

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1 \ldots c_{n_0} 1 \alpha_{n_0+2} \alpha_{n_0+3} \ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1 \ldots c_{n_0} 2 \beta_{n_0+2} \beta_{n_0+3} \ldots})\},$$

де $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, $c_1, c_2, ..., c_{n_0}$ — фіксований набір трійкових цифр, $\alpha_{n_0+i} \in N_2^0$, $\beta_{n_0+i} \in N_2^0$, $i \in \mathbb{N}$, f є спадною, а на множині

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1 \ldots c_{n_0} 0 \alpha_{n_0+2} \alpha_{n_0+3} \ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1 \ldots c_{n_0} r \beta_{n_0+2} \beta_{n_0+3} \ldots})\},$$

де $r \in \{1, 2\}$ — зростаючою.

Доведення. Перша та друга властивості функції f випливають з означення (1).

Доведемо третю властивість. Нехай маємо $x_1 = \Delta^3_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ та $x_2 = \Delta^3_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}$ такі, що $x_1 \neq x_2$. Знайдемо множину

$$G = \{x : f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2\}.$$

- Нехай $f(x_1) = f(x_2) = y_{1,2}$ — трійково-ірраціональне число. Тоді

$$\varphi(\alpha_n) = \varphi(\beta_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

серед яких існує хоча б один номер n_0, що $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$.

Проте, з останньої нерівності та означення (1) слідує, що $\varphi(\alpha_{n_0}) \neq \varphi(\beta_{n_0})$. Таким чином, отримано протиріччя. Множина трійково-ірраціональних чисел не належить множині G.

- Нехай $f(x_1) = f(x_2) = y_{1,2}$ — трійково-раціональне число. Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, що

$$y_{1,2} = \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n_0})\varphi(\alpha_{n_0+1})000\ldots} = \Delta^3_{\varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_{n_0})(\varphi(\alpha_{n_0+1})-1)222\ldots}$$

або

$$y_{1,2} = \Delta^3_{\varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_{n_0})\varphi(\beta_{n_0+1})000\ldots} = \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n_0})(\varphi(\beta_{n_0+1})-1)222\ldots}.$$

Тобто

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(\alpha_{n_0+2}) = \varphi(\alpha_{n_0+3}) = \ldots = 0, \\ \varphi(\beta_{n_0+2}) = \varphi(\beta_{n_0+3}) = \ldots = 2, \\ \varphi(\beta_{n_0+1}) = \varphi(\alpha_{n_0+1}) - 1. \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(\beta_{n_0+2}) = \varphi(\beta_{n_0+3}) = \ldots = 0, \\ \varphi(\alpha_{n_0+2}) = \varphi(\alpha_{n_0+3}) = \ldots = 2, \\ \varphi(\alpha_{n_0+1}) = \varphi(\beta_{n_0+1}) - 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

причому $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\beta_1)$, $\varphi(\alpha_2) = \varphi(\beta_2)$, ..., $\varphi(\alpha_{n_0}) = \varphi(\beta_{n_0})$.

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_{n_0+2}=\alpha_{n_0+3}=...=0, \\ \beta_{n_0+2}=\beta_{n_0+3}=...=1; \\ \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_{n_0+1}=2, \\ \beta_{n_0+1}=0; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_{n_0+1}=1, \\ \beta_{n_0+1}=2; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_{n_0+2}=\alpha_{n_0+3}=...=1, \\ \beta_{n_0+2}=\beta_{n_0+3}=...=0; \\ \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_{n_0+1}=0, \\ \beta_{n_0+1}=2; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_{n_0+1}=2, \\ \beta_{n_0+1}=1; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином $f(x_1)=f(x_2)$ при $x_1\neq x_2$ на таких множинах:

- $G_1=\{x: x_1=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}2000...}\wedge x_2=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}0111...}\}$;
- $G_2=\{x: x_1=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}1000...}\wedge x_2=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}2111...}\}$;
- $G_3=\{x: x_1=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}0111...}\wedge x_2=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}2000...}\}$;
- $G_4=\{x: x_1=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}2111...}\wedge x_2=\Delta^3_{c_1c_2...c_{n_0}1000...}\}$,

де $c_1,c_2,...,c_n$ — фіксовані трійкові цифри, $n_0\in\mathbb{Z}^+$. Множина

$$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4$$

є зчисленною як підмножина раціональних чисел.

З означення функції f відомо, що $\varphi(i)=\frac{-3i^2+7i}{2}$, $i\in\{0,1,2\}$ та $1=\Delta^3_{222...}$. Тому розглянемо різницю

$$\varphi(i)-\varphi(2-i)=\frac{-3i^2+7i}{2}-\frac{-3(2-i)^2+7(2-i)}{2}=$$
$$=\frac{-3i^2+7i+3(4-4i+i^2)-7(2-i)}{2}=\frac{2i-2}{2}=i-1.$$

Аналогічно, з означень функцій f_{01}, f_{12}

$$\varphi_{01}(i)-\varphi_{12}(i)=\frac{i^2-i}{2}-\frac{i^2-3i+2}{2}=\frac{2i-2}{2}=i-1.$$

Що і свідчить про виконання рівності (4).

Властивість (5) доводиться подібно доведенню властивості (4). Дійсно

$$\varphi(i)+\varphi(2-i)=\frac{-3i^2+7i}{2}+\frac{-3(2-i)^2+7(2-i)}{2}=$$

$$= \frac{-3i^2 + 7i - 3(4 - 4i + i^2) + 14 - 7i}{2} = \frac{-6i^2 + 12i + 2}{2} =$$
$$= -3i^2 + 6i + 1 = 1 - 3(-i^2 + 2i) = \frac{1}{2} + 3\varphi_{02}(i).$$

Властивості (6) та (7) випливають з означень функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}.

Для доведення властивості (8) скористаємося означенням функції f. Зокрема, від рівності (2) віднімемо рівність (3) та отриману різницю поділимо на 3. В результаті отримаємо рівність еквівалентну шуканій рівності.

(9) Нехай $x_1 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$, $x_2 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2...\beta_n...}$. Нагадаємо, що функція f називається спадною, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з області визначення функції $f(x_1) > f(x_2)$. У нашому випадку це означає, що $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ такий, що $\varphi(\alpha_{n_0+1}) > \varphi(\beta_{n_0+1})$ при $\alpha_{n_0+1} < \beta_{n_0+1}$ і $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. Тому з означення функції f випливає, що $\alpha_{n_0+1} = 1$ і $\beta_{n_0+1} = 2$. Тому множиною, на якій досліджувана функція є спадною, буде множина виду

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1...c_{n_0}1\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}...} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1...c_{n_0}2\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}...})\},$$

де $c_1, c_2, ..., c_{n_0}$ — фіксований набір трійкових цифр, n_0 — фіксоване ціле додатне число.

Функція f називається зростаючою, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з області визначення функції $f(x_1) < f(x_2)$. У нашому випадку це означає, що існує $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ такий, що $\varphi(\alpha_{n_0+1}) < \varphi(\beta_{n_0+1})$ при $\alpha_{n_0+1} < \beta_{n_0+1}$ і $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. Тому, провівши аналогічні міркування, отримаємо множину зростання функції

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1...c_{n_0}0\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}...} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1...c_{n_0}r\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}...})\},$$

де $r \in \{1, 2\}$. □

Теорема 1. *Функція f задовольняє функціональне рівняння*

$$f(x) - f(1 - x) = x - \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Доведення. Властивість (10) слідує із властивостей (4) та (8) (рівностей (5) та (9)). □

2. Диференціальні властивості функції

Теорема 2. *Функція f є неперервною в трійково-ірраціональних точках, а трійково-раціональні точки є точками неусувних розривів першого роду (точками стрибків функції). Причому, трійково-раціональна точка $x_0 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n000...}$ є точкою стрибку функції $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$ вгору при $\alpha_n = 1$ та $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$ вниз при $\alpha_n = 2$.*

Доведення. Нехай x_0 — трійково-ірраціональне число. Покажемо, що
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0.$$
Для довільного $x=\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\in[0,1]$ існує такий номер $n_0=\ n_0(x)$, що
$$\begin{cases}\alpha_m(x)=\alpha_m(x_0), & m=\overline{1,n_0-1},\\ \alpha_{n_0}(x)\neq\alpha_{n_0}(x_0);\end{cases}$$
причому умова $x\to x_0$ рівносильна умові $n_0\to\infty$. Тому
$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sum_{l=n_0}^{\infty}\frac{\varphi(\alpha_l(x))-\varphi(\alpha_l(x_0))}{3^l}\right|\leq\sum_{l=n_0}^{\infty}\frac{|\varphi(\alpha_l(x))-\varphi(\alpha_l(x_0))|}{3^l}\leq$$
$$\leq\sum_{l=n_0}^{\infty}\frac{2}{3^l}=\frac{1}{3^{n_0-1}}\to 0\quad(n_0\to\infty),$$
Отже, f — неперервна в точці x_0.

Нехай тепер x_0 — трійково-раціональне число, тобто
$$x_0=\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n000\ldots}=\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)222\ldots},\quad \alpha_n\neq 0.$$
Доведемо, що f неперервна зліва та справа в точці x_0.
$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})\varphi(\alpha_n-1)111\ldots},$$
$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})\varphi(\alpha_n)000\ldots},$$
$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)-\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\frac{\varphi(\alpha_n)-\varphi(\alpha_n-1)-1}{2\cdot 3^n}=$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}, & \text{якщо } \alpha_n=1,\\ -\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}, & \text{якщо } \alpha_n=2.\end{cases}$$
Отже, x_0 — точка стрибку функції f. □

Теорема 3. *Функція f є ніде не диференційовною.*

Доведення. Трійково-раціональні точки не розглядаємо, бо вони є точками стрибків досліджуваної функції. Нехай x_0 — довільне трійково-ірраціональне число з $[0;1]$. В силу того, що в трійковому зображенні числа x_0 одна із цифр використовується нескінченну кількість разів, зафіксуємо цю цифру (позначимо α) та зафіксуємо одну із позицій n_0 в трійковому зображенні, на якій знаходиться ця цифра. Тобто,
$$x_0=\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0-1}\alpha\alpha_{n_0+1}\ldots}.$$
Побудуємо послідовність чисел $x_{n'}$ таких, що
$$x_{n'}=\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0-1}\beta_{n_0}\alpha_{n_0+1}\ldots}.$$

Тоді

$$x_0 - x_{n'} = \frac{\alpha - \beta_{n_0}}{3^{n_0}} \quad \text{та} \quad f(x_0) - f(x_{n'}) = \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta_{n_0})}{3^{n_0}}.$$

Таким чином

$$f'(x) = \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta_{n_0})}{\alpha - \beta_{n_0}}.$$

Розглянувши випадки, коли значення цифри α пробігають значення $0, 1, 2$ та значення цифри β_{n_0} пробігають значення трійкових цифр, відмінних від α, легко переконатися про різні значення похідної функції f в точці x_0. Що й свідчить про ніде не диференційовність досліджуваної функції. □

3. Фрактальні властивості рівнів

Знайдемо вираз для розмірності Хаусдорфа–Безиковича всіх рівнів функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}, за допомогою яких означається досліджувана функція f. Нагадаємо [**9**], що *рівнем деякої функції* g називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : g(x) = y_0\},$$

де y_0 — елемент множини $E(g)$ значень функції g.

Теорема 4. *Якщо в трійковому зображенні числа* x_0 *є хоча б одна цифра* 2, *то* $f_{ij}^{-1}(y_0) = \varnothing$.

Якщо $y_0 = 0$ *або* y_0 *трійково-раціональне, то* $\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) = \log_3 2$.

Якщо y_0 *— трійково-ірраціональне, то* $0 \le \alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \le \log_3 2$, *де* $\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0))$ *— фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини* $f_{ij}^{-1}(y_0)$.

Доведення. (1) З означення функції f_{ij} очевидно, що якщо в трійковому зображенні числа x_0 є хоча б одна цифра 2, то $f_{ij}^{-1}(y_0) = \varnothing$. Тобто, множиною значень функції f_{ij} є множина

$$E_1 = \{x : x = \Delta^3_{e_1 e_2 \ldots e_n \ldots}, \ e_n \in \{0,1\}\}.$$

(2) Якщо $y_0 = 0$, то множиною прообразів є множина канторівського типу, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$, що слідує з означень функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}. Множинами прообразів нуля для цих функцій, відповідно, будуть наступні множини: E_1, $E_2 = \{x : x = \Delta^3_{u_1 u_2 \ldots u_n \ldots}, u_n \in \{0,2\}\}$, $E_3 = \{x : x = \Delta^3_{v_1 v_2 \ldots v_n \ldots}, \ v_n \in \{1,2\}\}$.

(3) Нехай y_0 — трійково-раціональне число з E_1, тобто

$$y_0 = \frac{1}{3^{l_1}} + \frac{1}{3^{l_2}} + \ldots + \frac{1}{3^{l_{n_0}}} + \frac{0}{3^{l_{n_0}+1}} + \frac{0}{3^{l_{n_0}+2}} + \ldots,$$

тоді множиною прообразів $f_{01}^{-1}(y_0)$, $f_{02}^{-1}(y_0)$, $f_{12}^{-1}(y_0)$ будуть всі раціональні числа з відрізка $[0,1]$, трійкове зображення яких має період з використанням цифр $\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$ відповідно, а також ірраціональні числа, у трійковому зображенні яких, після фіксованого номеру n_0 вживаються лише цифри з відповідної двоелементної множини цифр.

Легко показати, що розмірність Хаусдорфа–Безиковича такої множини прообразів фіксованого трійково-раціонального елемента y_0 з множини значень однієї з функцій $f_{01}(y_0)$, $f_{02}(y_0)$, $f_{12}(y_0)$, дорівнює $\log_3 2$.

Доведення проведемо, наприклад, для функції $f_{01}(x)$.

$$f_{01}^{-1}(y_0)=\left\{x: x=a_{l_{n_0}}+\frac{1}{3^{l_{n_0}}}\left(\frac{e_{l_{n_0}+1}}{3}+\frac{e_{l_{n_0}+2}}{3^2}+...+\frac{e_{l_{n_0}+m}}{3^m}+...\right)\right\}=$$

$$=\left\{x: x=a_{l_{n_0}}+\frac{1}{3^{l_{n_0}}}E_1\right\},\text{ де } a_{l_n}=\Delta^3_{e_1...e_{l_1-1}2e_{l_1+1}...e_{l_2-1}2e_{l_2+1}...e_{l_{n_0}-1}200...},$$

n_0 — фіксоване число з множини додатних цілих чисел, e_{l_n} — число з одиничного інтервалу, $n\in\mathbb{N}$.

Оскільки n_0 — фіксоване число, яке залежить лише від y_0, то

$$\alpha_0(f_{01}^{-1}(y_0))=\alpha_0(E_1)=\log_3 2,$$

де $\alpha_0(f_{01}^{-1}(y_0))$ — розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини $f_{01}^{-1}(y_0)$.

Аналогічно можна провести доведення і для інших двох функцій.

(4) Нехай y_0 — трійково-ірраціональне число з E_1, тобто

$$y_0=\frac{1}{3^{l_1}}+\frac{1}{3^{l_2}}+...+\frac{1}{3^{l_n}}+...,$$

тоді

$$f_{ij}^{-1}(y_0)=\{x: x=\widehat{\Delta}^{l_1l_2...l_n...}_{kk...k...}, l_n\in\mathbb{N}\},$$

де $\widehat{\Delta}^{l_1l_2...l_n...}_{kk...k...}$ — число з відрізка $[0,1]$, в трійковому зображенні якого на позиціях $l_1,l_2,...,l_n,...$, знаходиться цифра k, а на інших позиціях в представленні — лише цифри з множини $\{i,j\}$.

Слід зауважити, що натуральні числа $l_1,l_2,...,l_n,...$ — фіксовані і залежать від числа y_0 такого, що $y_0=f_{ij}(x_0)$. Тобто, маємо задану монотонно зростаючу послідовність натуральних чисел (l_n).

Тоді, в залежності від частоти цифри 1 в трійковому представленні (зображенні) числа y_0, отримаємо $0\le\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0))\le\log_3 2$. Дійсно, оскільки

$$\widehat{\Delta}^{l_1l_2...l_n...}_{kk...k...}=\Delta^3_{\underbrace{00...00}_{l_1-1}k\underbrace{000...000}_{l_2-l_1-1}k...}+\widehat{\Delta}^{l_1l_2...l_n...}_{00...0...},$$

де $\Delta^3_{\underbrace{00...00}_{l_1-1}k\underbrace{000...000}_{l_2-l_1-1}k...}$ — фіксоване число, яке залежить тільки від y_0, а $\widehat{\Delta}^{l_1l_2...l_n...}_{00...0...}$ — підмножина множини $C[3,\{i,j\}]$ (при $k\neq 0$), причому для

$n \to \infty$

$$\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad \frac{n}{l_n} \to 1,$$

$$\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \to \log_3 2 \quad \text{при} \quad \frac{n}{l_n} \to 0.$$

Останні два рядки справедливі і при $k = 0$.

$\square$

4. Фрактальні властивості графіка досліджуваної функції

Нехай в трійковій системі числення

$$X = [0;1] \times [0;1] = \left\{ (x,y) : x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{3^m}, y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{3^m}, \ \alpha_m, \beta_m \in N_2^0 \right\}.$$

Тоді множина точок

$$\sqcap_{(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)...(\alpha_m\beta_m)} = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m} \times \Delta^3_{\beta_1\beta_2...\beta_m}$$

є квадратом зі стороною, довжина якої рівна 3^{-m} і який називають *квадратом рангу m з основою* $(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)...(\alpha_m\beta_m)$.

Якщо $E \subset X$, то число

$$\alpha^K(E) = \inf\{\alpha : \widehat{H}_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \widehat{H}_\alpha(E) = \infty\},$$

де $\widehat{H}_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{d \leq \varepsilon} K(E,d) d^\alpha\right]$, $K(E,d)$ — найменша кількість квадратів діаметра d, необхідних для покриття множини E, називають *фрактальною клітинковою ентропійною розмірністю* множини E.

Цілком очевидним є той факт, що фрактальна клітинкова ентропійна розмірність є більшою або рівною розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Теорема 5. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції f дорівнює* 1.

Доведення. З означення та властивостей функції f випливає, що її графік належить трьом з дев'яти квадратів першого рангу

$$\sqcap_{(ij)} = \left[\frac{i}{3}; \frac{i+1}{3}\right] \times \left[\frac{j}{3}; \frac{j+1}{3}\right], \ i \in N_2^0, \ j \in N_2^0,$$

а саме $\sqcap_{(00)}, \sqcap_{(12)}, \sqcap_{(21)}$.

Графік належить $9 = 3^2$ з $81 = 3^4$ квадратів другого рангу.

$$\sqcap_{(i_1j_2)(i_2j_2)} = \left[\frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2}; \frac{i_1}{3} + \frac{i_2+1}{3^2}\right] \times \left[\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2}; \frac{j+1}{3} + \frac{j_2+1}{3^2}\right],$$

$i \in N_2^0, \ j \in N_2^0, i_1 \in N_2^0, i_2 \in N_2^0, j_1 \in N_2^0, j_2 \in N_2^0$, а саме:

(1) та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{(00)}$, належить трьом квадратам $\sqcap_{(00)(00)}, \sqcap_{(00)(12)}, \sqcap_{(00)(21)}$;

(2) та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{(12)}$, належить трьом квадратам $\sqcap_{(12)(00)}, \sqcap_{(12)(12)}, \sqcap_{(12)(21)}$;

(3) та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{(21)}$, належить трьом квадратам $\sqcap_{(21)(00)}, \sqcap_{(21)(12)}, \sqcap_{(21)(21)}$; і т. д.

Графік Γ_f функції f міститься в 3^m квадратах m-го рангу з довжиною сторони 3^{-m}. Тому

$$\widehat{H}_\alpha(\Gamma_f) = \lim_{m\to\infty} 3^m \left(\sqrt{3^{-2m}+3^{-2m}}\right)^\alpha = \lim_{m\to\infty} 3^m \left(2\cdot 3^{-2m}\right)^{\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left(3^{\frac{2m}{\alpha}-2m}\cdot 2\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{m\to\infty} \left(2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot (3^{1-\alpha})^m\right).$$

Оскільки $3^{(1-\alpha)m} \to 0$ при всіх $\alpha > 1$, то $\alpha^K(\Gamma_f) = 1$. В силу самоподібних властивостей графіка функції, значення ентропійної розмірності співпадає із значенням розмірності Хаусдорфа–Безиковича. □

5. Інтеграл Лебега

Лема 3. *Інтеграл Лебега від функції f дорівнює $\frac{1}{2}$.*

Доведення. Оскільки для досліджуваної функції виконуються умови існування інтеграла Лебега та в силу самоподібних властивостей графіка цієї функції, знайдемо значення інтеграла Лебега з рівності

$$I = 3\frac{1}{3^2} + 3I\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3},$$

звідки $I = \frac{1}{2}$. □

6. Деякі узагальнення

У трійковій системі числення можна означити $m = 3! = 6$ функцій, визначених на відрізку $[0,1]$ наступним чином:

$$\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f_m} \Delta^3_{\varphi_m(\alpha_1)\varphi_m(\alpha_2)\ldots\varphi_m(\alpha_n)\ldots},$$

де функція $\varphi_m(\alpha_n)$, визначена на алфавіті трійкової системи числення, для кожної з функцій $f_m(x), m = \overline{1,6}$ задається з таблиці

	0	1	2
$\varphi_1(\alpha_n)$	0	1	2
$\varphi_2(\alpha_n)$	0	2	1
$\varphi_3(\alpha_n)$	1	0	2
$\varphi_4(\alpha_n)$	1	2	0
$\varphi_5(\alpha_n)$	2	0	1
$\varphi_6(\alpha_n)$	2	1	0

Очевидно, що функція $f_1(x)$ є функцією $y = x$, а функція $f_6(x)$ — функцією $y = 1 - x$.

Лема 4. *Довільна функція f_m виражаєтьcя за допомогою функцій f_{ij} наступним чином*

$$f_m = a_m^{(ij)} x + b_m^{(ij)} + c_m^{(ij)} f_{ij}(x), \quad \text{де } a_m^{(ij)}, b_m^{(ij)}, c_m^{(ij)} \in \mathbb{Q}.$$

Таким чином, з проведеного у статті дослідження, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 6. *Функція f_m, відмінна від функцій $y = x$, $y = 1 - x$ є: 1) майже скрізь неперервною; 2) ніде не диференційовною; 3) функцією, розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка якої дорівнює* 1*; 4) інтегровною за Лебегом, причому, інтеграл Лебега дорівнює $\frac{1}{2}$.*

Література

[1] *Banach S.* Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionnenmengen // Stud. Math. — 1931.— 3.— P. 174–179.

[2] *Mazurkiewicz S.* Sur les functions non derivables // Stud. Math. — 1931.— 3.— P. 244.

[3] *Falconer K. J.* Fractal geometry. — Chichester, Wiley, 1990. — 290 p.

[4] *Hensley D.* Continued Fraction Cantor Sets, Hausdorff Dimension and Functional Analysis // Journal of number theory. — 1992.— 40.— P. 336–358.

[5] *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 119 с.

[6] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур — К.: КГПИ.— 1989.— С. 78 – 90.

[7] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу 2001 — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003.— С. 77–93.

[8] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[9] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї непервної ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2002, №3.— С. 327 –338.

[10] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.,* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[11] *Федер Е.* Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

References

[1] Banach S., *Stud. Math.*, 1931, №3, pp. 174–179.

[2] Mazurkiewicz S., *Stud. Math.*, 1931, №3, pp. 244.

[3] Falconer K., *Fractal geometry.*, 1990, 290 p.

[4] Hensley D., *Journal of number theory.*, 1992, №40, pp. 336–358.

[5] Pelyukh G., Sharkovsky A., *Vvedenie v teoriju funkcional'nyh uravnenij (Introduction to the theory of functional equations)*, 1974, 119 p.

[6] Pratsiovytyi M., *Metody issledovanija algebraicheskih i topologicheskih struktur (Methods of study of algebraic and topological structures)*, 1989, , pp. 78–90.

[7] Pratsiovytyi M., Torbin G., *Dynamichni systemy: Praci ukrai'ns'kogo matematychnogo kongresu 2001 (Dynamical Systems: Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress 2001)*, 2003, pp. 77–93.

[8] Pratsiovytyi M.,*Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, 1998, 296 p.

[9] Pratsiovytyi M., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2002, №3, pp. 327 –338.

[10] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, 1992, 208 p.

[11] Feder E. *Fraktaly (Fractals)*, 1991, 254 p.