Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 197–214.
УДК 517.955.8

Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу

П. Ф. Самусенко,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Ключові слова: сингулярно збурені диференціальні рівняння, рівняння гіперболічного типу.

Asymptotic integration of singularly perturbed systems of hyperbolic-type partial differential equations

P. F. Samusenko,

National Pedagogical Dragomanov University

AMS Subject Classifications (2010): 35A99.

Key words: singularly perturbed differential equations, hyperbolic-type PDE.

Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу досліджувалися в працях І.Г. Петровського, О.О. Ладиженської, М.І. Вишика, О.А. Олейник, Ю.О. Митропольського, Б.І. Мосеєнкова, Г.П. Хоми, С.Ф. Фещенка тощо. Так, О.О. Ладиженська навела достатні умови існування та єдиності як класичного, так і узагальненого розв'язку основних крайових задач у лінійному випадку. При цьому обґрунтовано застосування методу Фур'є для розв'язання крайових задач для систем рівнянь гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами [1, с. 70 – 190].

Перша крайова задача для диференціального рівняння з частинними похідними з повільно змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon a(\tau, x, \varepsilon)u + p(\tau, x, \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{1}$$

$0 \le \tau = \varepsilon t \le L$, $0 \le x \le l$, досліджувалася С.Ф. Фещенком, М.І. Шкілем та І.І. Маркушем [2 – 5]. Як і в методі Фур'є, її розв'язок вони шукали у вигляді

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t, \varepsilon) \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{2}$$

де функції $z_k(t,\varepsilon)$ визначались із деякої системи алгебраїчних рівнянь. При цьому залишалось нез'ясованим питання про збіжність ряду (2) та про можливість його почленного диференціювання.

У даній роботі розглядається перша крайова задача для лінійного сингулярно збуреного диференціального рівняння гіперболічного типу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon c(t,x,\varepsilon)u + f(t,x,\varepsilon),\ t>0,\ 0<x<L, \tag{3}$$

$$u(0,x,\varepsilon) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(0,x,\varepsilon)}{\partial t} = \psi(x),\ 0 \le x \le L, \tag{4}$$

$$u(t,0,\varepsilon) = u(t,L,\varepsilon) = 0,\ t \ge 0, \tag{5}$$

де $u = u(t,x,\varepsilon)$ — шукана функція, $a(t,\varepsilon)$, $c(t,x,\varepsilon)$, $f(t,x,\varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — задані дійсні функції, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, — малий параметр.

Зазначимо, що за постановкою дана задача близька до досліджень Ю.О. Митропольского і Г.П. Хоми регулярно збурених квазілінійних і нелінійних рівнянь гіперболічного типу [6].

Надалі припускаємо виконання таких умов.

1. Функції $a(t,\varepsilon) \in C^2([0;\infty)\times[0;\varepsilon_0])$, $c(t,x,\varepsilon) \in C^4([0;\infty)\times[0;L]\times[0;\varepsilon_0])$, $f(t,x,\varepsilon) \in C^3([0;\infty)\times[0;L]\times[0;\varepsilon_0])$ мають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε, тобто

$$a(t,\varepsilon) = \sum_{i\ge 0} \varepsilon^i a_i(t),\ t \ge 0,$$

$$c(t,x,\varepsilon) = \sum_{i\ge 0} \varepsilon^i c_i(t,x),\ f(t,x,\varepsilon) = \sum_{i\ge 0} \varepsilon^i f_i(t,x),\ t \ge 0,\ 0 \le x \le L.$$

2. $a_i(t) \in C^\infty[0;\infty)$, $c_i(t,x)$, $f_i(t,x) \in C^\infty([0;\infty)\times[0;L])$, $i \ge 0$.
3. $a_0(t) > 0$, $t \in [0;T]$.
4. $\varphi(x) \in C^5[0;L]$, $\psi(x) \in C^5[0;L]$.
5. $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(L) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = \psi^{(2k)}(L) = 0$, $k = \overline{0,1}$.

Нехай $T > 0$ — довільна фіксована стала. Вважаємо, що

$$\overline{D}_T = \{(t,x) : 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le L\}.$$

Розв'язок задачі (3) – (5) шукаємо у вигляді

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(t,\varepsilon) v_s(x), \tag{6}$$

де $z_s(t,\varepsilon)$ — шукана функція, а $v_s(x)$ — розв'язок крайової задачі

$$v_s''(x) + \omega_s^2 v_s(x) = 0, \tag{7}$$

$$v_s(0) = v_s(L) = 0,$$

$\omega_s = \dfrac{s\pi}{L}$, $s \in N$.

Тобто

$$v_s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \omega_s x, \; s \in N.$$

При цьому

$$\int_0^L v_s(x) v_k(x) dx = \delta_{sk}, \; s, k \in N,$$

де δ_{sk} — символ Кронекера.

Підставляючи формально (6) у (3) з урахуванням (7), домножуючи отриману рівність на $v_s(x)$ та інтегруючи її обидві частини за змінною x в межах від 0 до L, дістаємо

$$\varepsilon^2 z_s'' + \omega_s^2 a(t,\varepsilon) z_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{sk}(t,\varepsilon) z_k + f_s(t,\varepsilon), \; s \in N, \tag{8}$$

де

$$c_{sk}(t,\varepsilon) = \int_0^L c(t,x,\varepsilon) v_k(x) v_s(x) dx, \; f_s(t,\varepsilon) = \int_0^L f(t,x,\varepsilon) v_s(x) dx.$$

Нехай мають місце такі умови.

6. $\dfrac{\partial c(t,0,\varepsilon)}{\partial x} = \dfrac{\partial c(t,L,\varepsilon)}{\partial x} = 0$, $t \in [0;T]$.
7. $f(t,0,\varepsilon) = f(t,L,\varepsilon) = 0$, $t \in [0;T]$.

Тоді

$$c_{sk}(t,\varepsilon) = \int_0^L c(t,x,\varepsilon) v_k(x) v_s(x) dx = \frac{1}{L} \left(\int_0^L c(t,x,\varepsilon) \cos(\omega_k - \omega_s) x dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^L c(t,x,\varepsilon) \cos(\omega_k + \omega_s) x dx \right).$$

Зафіксуємо t, $t \in [0;T]$. Інтегруючи частинами, з останньої рівності дістаємо

$$|c_{sk}(t,\varepsilon)| \leq \frac{M}{(\omega_k - \omega_s)^4}, \; k \neq s, \; k, s \in N,$$

де стала M не залежить від k, s.

Надалі, у випадках, коли важливий лише факт обмеженості, а не величина відповідної сталої, писатимемо одну й ту саму сталу M.

Аналогічно дістаємо оцінку для $f_s(t,\varepsilon)$

$$|f_s(t,\varepsilon)| \le \frac{M}{\omega_s^3},\ s \in N.$$

Запишемо систему (8) у вигляді

$$\varepsilon^2 z'' + a(t,\varepsilon)\Omega z = \varepsilon C(t,\varepsilon)z + f(t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $z(t,\varepsilon)$ та $f(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірні вектори з компонентами $z_s(t,\varepsilon)$ та $f_s(t,\varepsilon)$ відповідно,

$$\Omega = diag\{\omega_1^2, \omega_2^2, ...\},$$

$C(t,\varepsilon)$ — нескінченна матриця, що складається з елементів $c_{sk}(t,\varepsilon)$, $k,s \in N$.

Нехай

$$C(t,\varepsilon) = \sum_{i\ge 0} \varepsilon^i C^{(i)}(t),\ f(t,\varepsilon) = \sum_{i\ge 0} \varepsilon^i f^{(i)}(t).$$

Розв'язок системи (9) шукаємо у вигляді

$$z(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{10}$$

де $\xi_+(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірна вектор-функція, що є розв'язком задачі

$$\varepsilon\frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t,\varepsilon)\xi_+,\ \xi_+(0,\varepsilon) = a, \tag{11}$$

a — нескінченновимірний вектор, всі компоненти якого дорівнюють 1; $\Pi_+(t,\varepsilon)$ — нескінченна матриця, $\Lambda_+(t,\varepsilon)$ — нескінченна діагональна матриця та $g(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірна вектор-функція вигляду

$$\Pi_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Pi_+^{(i)}(t),\ \Lambda_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Lambda_+^{(i)}(t),\ g(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i g^{(i)}(t),\ m \ge 1. \tag{12}$$

Для визначення $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $g^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, підставимо (10), враховуючи (11), до системи (9). Тоді, зрівнюючи коефіцієнти при $\xi_+(t,\varepsilon)$ і вільні члени, дістаємо

$$\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+^2(t,\varepsilon) + a(t,\varepsilon)\Omega\Pi_+(t,\varepsilon) = \varepsilon C(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon) - \varepsilon^2\Pi_+''(t,\varepsilon) -$$
$$-2\varepsilon\Pi_+'(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) - \varepsilon\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+'(t,\varepsilon), \tag{13}$$

$$a(t,\varepsilon)\Omega g(t,\varepsilon) = \varepsilon C(t,\varepsilon)g(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon) - \varepsilon^2 g''(t,\varepsilon). \tag{14}$$

Розглянемо спочатку тотожність (13). Зрівнюючи в ній коефіцієнти при однакових степенях ε^i, $i = \overline{0,m}$, отримаємо

$$\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega\Pi_+^{(0)}(t) = 0, \tag{15}$$

$$\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega\Pi_+^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} C^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-j-1)}(t) - (\Pi_+^{(i-2)}(t))''-$$

$$-\sum_{j=0}^{i-1}\Big(2(\Pi_+^{(j)}(t))'\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) + \Pi_+^{(j)}(t)(\Lambda_+^{(i-j-1)}(t))'\Big)-$$

$$-\Pi_+^{(0)}(t)\Big(2\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)\Big) - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{i} a_j(t)\Omega\Pi_+^{(i-j)}(t), \tag{16}$$

$i = \overline{1,m}$, $\Pi_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $k < 0$.

Доведемо розв'язність матричних рівнянь (15), (16). Нехай $p_{s+}^{(0)}(t)$, $s \in N$, — стовпці матриці $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_{1+}^{(0)}(t), \lambda_{2+}^{(0)}(t), ...\}$.

Тоді система (15) набуде вигляду

$$((\lambda_{s+}^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega)p_{s+}^{(0)}(t) = 0, \ s \in N.$$

Покладемо

$$\lambda_{s+}^{(0)}(t) = i\omega_s\sqrt{a_0(t)}, \ s \in N, \ i^2 = -1,$$

$$\{p_{s+}^{(0)}(t)\}_k \equiv 0, \ t \in [0;T], \ k \neq s, \ k, s \in N,$$

$\{p_{s+}^{(0)}(t)\}_s$, $s \in N$, визначимо далі.

За побудовою матриці $\Pi_+^{(0)}(t)$ і $\Lambda_+^{(0)}(t)$ діагональні. А тому відповідні добутки нескінченних матриць у (15) існують і є діагональними матрицями.

Із системи (16) дістаємо

$$((\lambda_{s+}^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega)p_{s+}^{(i)}(t) = b_{s+}^{(i)}(t), \ s \in N,$$

де

$$b_{s+}^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} C^{(j)}(t)p_{s+}^{(i-j-1)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1}\Big(2\lambda_{s+}^{(i-j-1)}(t)(p_{s+}^{(j)}(t))' + (\lambda_{s+}^{(i-j-1)}(t))'p_{s+}^{(j)}(t)\Big)-$$

$$-(p_{s+}^{(i-2)}(t))'' - p_{s+}^{(0)}(t)\Big(2\lambda_{s+}^{(0)}(t)\lambda_{s+}^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{s+}^{(j)}(t)\lambda_{s+}^{(i-j)}(t)\Big)-$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\lambda_{s+}^{(k)}(t)\lambda_{s+}^{(i-k-j)}(t)p_{s+}^{(j)}(t) - \sum_{j=1}^{i} a_j(t)\Omega p_{s+}^{(i-j)}(t),$$

$p_{s+}^{(i)}(t)$, $s \in N$, $i = \overline{1,m}$, — стовпці матриці $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_{1+}^{(i)}(t), \lambda_{2+}^{(i)}(t), ...\}$.

Тоді

$$\{p^{(i)}_{s+}(t)\}_k=\frac{\{b^{(i)}_{s+}(t)\}_k}{a_0(t)(\omega_k^2-\omega_s^2)},\ i=\overline{1,m},\ k\neq s,\ k,s\in N,$$

$$\{p^{(i)}_{s+}(t)\}_s\equiv 0,\ t\in[0;T],\ i=\overline{1,m},\ s\in N,$$

$$\lambda^{(i)}_{s+}(t)=\frac{1}{2\lambda^{(0)}_{s+}(t)\{p^{(0)}_{s+}(t)\}_s}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{h=1}^{\infty}\{C^{(j)}(t)\}_{sh}\{p^{(i-j-1)}_{s+}(t)\}_h-\{p^{(i-2)}_{s+}(t)\}''_s-\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{i-1}\Big(2\lambda^{(i-j-1)}_{s+}(t)\{p^{(j)}_{s+}(t)\}'_s+(\lambda^{(i-j-1)}_{s+}(t))'\{p^{(k)}_{s+}(t)\}_s\Big)-\{p^{(0)}_{s+}(t)\}_s\sum_{j=1}^{i-1}\lambda^{(j)}_{s+}(t)\lambda^{(i-j)}_{s+}(t)-$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\lambda^{(k)}_{s+}(t)\lambda^{(i-k-j)}_{s+}(t)\{p^{(j)}_{s+}(t)\}_s-\sum_{j=1}^{i}a_j(t)\omega_s^2\{p^{(i-j)}_{s+}(t)\}_s\right),\ i=\overline{1,m},\ s\in N.$$

Розглянемо тепер тотожність (14). Зрівнюючи в ній коефіцієнти при однакових степенях ε^i, $i=\overline{0,m}$, дістаємо

$$a_0(t)\Omega g^{(0)}(t)=f^{(0)}(t),$$

$$a_0(t)\Omega g^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{i-1}C^{(j)}(t)g^{(i-j-1)}(t)-(g^{(i-2)}(t))''-\sum_{j=1}^{i}a_j(t)\Omega g^{(i-j)}(t)+f^{(i)}(t),$$

$i=\overline{1,m}$, $g^{(k)}(t)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $k<0$.

Таким чином,

$$g^{(0)}(t)=\frac{1}{a_0(t)}\,\Omega^{-1}f^{(0)}(t), \tag{17}$$

$$g^{(i)}(t)=\frac{1}{a_0(t)}\,\Omega^{-1}\left(\sum_{j=0}^{i-1}C^{(j)}(t)g^{(i-j-1)}(t)-(g^{(i-2)}(t))''-\sum_{j=1}^{i}a_j(t)\Omega g^{(i-j)}(t)+f^{(i)}(t)\right), \tag{18}$$

$i=\overline{1,m}$.

Формули для визначення $p^{(i)}_{s+}(t)$, $\lambda^{(i)}_{s+}(t)$, $s\in N$, $i=\overline{1,m}$, отримані за умови існування відповідних нескінченних матриць у системі (16). Зупинимося на цьому питанні докладніше.

8. Нехай $m=1$.

Покладемо $\{p^{(0)}_{s+}(t)\}_s\equiv\{p^{(0)}_{s+}\}_s=const$, $t\in[0;T]$, $s\in N$. Тоді за побудовою

$$|\{C^{(0)}(t)p^{(0)}_{s+}\}_k|\leq\begin{cases}\dfrac{M|\{p^{(0)}_{s+}\}_s|}{(\omega_k-\omega_s)^4},\ k\neq s,\\ M|\{p^{(0)}_{s+}\}_s|,\ k=s,\ k,s\in N,\end{cases}$$

де стала M не залежить від k, s.

Отже, $p^{(1)}_{s+}(t)$, $\lambda^{(1)}_{s+}(t)$, $s \in N$, для всіх $t \in [0;T]$ існують і

$$|\{p^{(1)}_{s+}(t)\}_k| \leq \frac{M|\{p^{(0)}_{s+}\}_s|}{|\omega_k^2 - \omega_s^2|(\omega_k - \omega_s)^4},\ k \neq s,\ k, s \in N, \tag{19}$$

$$|\lambda^{(1)}_{s+}(t)| \leq M\omega_s,\ s \in N, \tag{20}$$

де стала M не залежить від k, s.

Оскільки Ω — діагональна матриця, то

$$|\{g^{(i)}(t)\}_s| \leq \frac{M}{\omega_s^5},\ i = 0, 1;\ s \in N,$$

зі сталою M, що не залежить від s.

Нехай $w_+(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon)$. Покладаючи

$$\lambda^{(0)}_{s-}(t) = -i\omega_s\sqrt{a_0(t)},\ s \in N,\ i^2 = -1,$$

аналогічно визначаємо $\Pi_-(t,\varepsilon)$, $\Lambda_-(t,\varepsilon)$, $\xi_-(t,\varepsilon)$ та $w_-(t,\varepsilon) = \Pi_-(t,\varepsilon)\xi_-(t,\varepsilon)$.

Побудуємо функцію

$$u_1(t,x,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon))v_s(x), \tag{21}$$

де

$$w_{s+}(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty}\{\Pi_+(t,\varepsilon)\}_{sj}\{\xi_+(t,\varepsilon)\}_j + \{g(t,\varepsilon)\}_s,\ s \in N.$$

Аналогічну структуру має $w_{s-}(t,\varepsilon)$.

Для визначення $\{p^{(0)}_{s+}\}_s$ і $\{p^{(0)}_{s-}\}_s$, $s \in N$, розглянемо систему

$$\begin{aligned} &w_{s+}(0,\varepsilon) + w_{s-}(0,\varepsilon) = a_s, \\ &(w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon))'_{|t=0} = b_s, \end{aligned} \tag{22}$$

де $a_s = \int\limits_0^L \varphi(x)v_s(x)dx$ і $b_s = \int\limits_0^L \psi(x)v_s(x)dx$, $s \in N$.

Використовуючи формули Крамера, подамо систему (22) наступним чином

$$\begin{aligned} &\{p^{(0)}_{s+}\}_s = f_1\left(\{p^{(0)}_{s+}\}_s, \{p^{(0)}_{s-}\}_s\right), \\ &\{p^{(0)}_{s-}\}_s = f_2\left(\{p^{(0)}_{s+}\}_s, \{p^{(0)}_{s-}\}_s\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$s \in N$.

За побудовою

$$\left| f_i\left(\{p_{s+}^{(0)}\}_s, \{p_{s-}^{(0)}\}_s\right)\right| \leq \frac{M_1}{\omega_s^5} + \varepsilon M_2 \Bigg(|\{p_{s+}^{(0)}\}_s| + |\{p_{s-}^{(0)}\}_s| + \frac{1}{\omega_s^5} +$$

$$+ \sum_{\substack{h=1\\ h\neq s}}^{\infty} \left(\frac{|\{p_{h+}^{(0)}\}_h| + |\{p_{h-}^{(0)}\}_h|}{|\omega_s^2 - \omega_h^2|(\omega_s-\omega_h)^4} + \frac{\omega_h}{\omega_s} \frac{|\{p_{h+}^{(0)}\}_h| + |\{p_{h-}^{(0)}\}_h|}{|\omega_s^2 - \omega_h^2|(\omega_s-\omega_h)^4} \right) \Bigg), \ i = 1, 2,$$

де сталі M_1, M_2 не залежать від s.

А тому на множинах

$$S_5 = \left\{ (\{p_{s+}^{(0)}\}_s, \{p_{s-}^{(0)}\}_s) \in R^2 : \max\{|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|, |\{p_{s-}^{(0)}\}_s|\} \leq \frac{M_0}{\omega_s^5} \right\},$$

$M_0 < M_1$, $s \in N$, функції $f_1(\{p_{s+}^{(0)}\}_s, \{p_{s-}^{(0)}\}_s)$, $f_2(\{p_{s+}^{(0)}\}_s, \{p_{s-}^{(0)}\}_s)$ задовольняють умови теореми про існування та єдиність нерухомої точки [7, с. 609], тобто система (23) на множині S_5 має єдиний розв'язок.

9. Припустимо, що компоненти $\{p_{s+}^{(0)}\}_s$, $\{p_{s-}^{(0)}\}_s$, $s \in N$, розв'язку системи (23) відмінні від нуля.

Для знайдених $\{p_{s+}^{(0)}\}_s$ та $\{p_{s-}^{(0)}\}_s$ ряд (21) збігається абсолютно і рівномірно у прямокутнику $\overline{D}_T$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (21) до двох разів включно; побудовані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(t, x) \in \overline{D}_T$.

Зазначимо, що

$$u_1(0, x, \varepsilon) = \varphi(x), \ \frac{\partial u_1(0, x, \varepsilon)}{\partial t} = \psi(x).$$

Функція $w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)$ задовольняє систему (8) з точністю $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right)$, $s \in N$, тобто $|c_s(t, \varepsilon)| \leq \frac{k_0 \varepsilon^2}{\omega_s^3}$, $t \in [0; T]$, де $c_s(t, \varepsilon)$ — відповідний залишок, стала k_0 не залежить від ε, s.

Нехай

$$z_s(t, \varepsilon) = w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon) + y_s(t, \varepsilon). \tag{24}$$

Тоді

$$\varepsilon^2 y_s'' + \omega_s^2 a(t, \varepsilon) y_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{sk}(t, \varepsilon) y_k + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right), \ s \in N. \tag{25}$$

Покладемо

$$y_s(0, \varepsilon) = 0, \ y_s'(0, \varepsilon) = 0, \ s \in N. \tag{26}$$

Позначимо через $\eta(t,\varepsilon)$ диференціальний інваріант рівняння (25), тобто

$$\eta(t,\varepsilon) = \frac{a''(t,\varepsilon)}{4a(t,\varepsilon)} - \frac{5}{16}\left(\frac{a'(t,\varepsilon)}{a(t,\varepsilon)}\right)^2$$

[8, с. 25].

Враховуючи (26), дістаємо

$$y_s(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s}\int\limits_0^t Y_s(t,\tau,\varepsilon)\Bigg(\eta(\tau,\varepsilon)y_s + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} c_{sk}(\tau,\varepsilon)y_k + O\bigg(\frac{1}{\omega_s^3}\bigg)\Bigg)d\tau,\ s\in N, \tag{27}$$

де

$$Y_s(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[4]{a(t,\varepsilon)a(\tau,\varepsilon)}}\sin\frac{\omega_s\psi(t,\tau,\varepsilon)}{\varepsilon},\ \psi(t,\tau,\varepsilon) = \int\limits_\tau^t \sqrt{a(\tau,\varepsilon)}d\tau.$$

Для доведення існування розв'язку рівняння (27) скористаємося методом послідовних наближень. Визначаємо останні за формулами

$$y_s^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0,\ t\in[0;T],$$

$$y_s^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s}\int\limits_0^t Y_s(t,\tau,\varepsilon)\Bigg(\eta(\tau,\varepsilon)y_s^{(q-1)}(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} c_{sk}(\tau,\varepsilon)y_k^{(q-1)} + O\bigg(\frac{1}{\omega_s^3}\bigg)\Bigg)d\tau,$$

де $q\in N$.

За побудовою

$$|y_s^{(1)}(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon k_0 t}{\omega_s^4},\ t\in[0;T].$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_{sk}(\tau,\varepsilon)|}{\omega_k^4} \le M\left(\frac{1}{\omega_s^4} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_s-\omega_k)^4\omega_k^4}\right) \le$$

$$\le M\left(\frac{1}{\omega_s^4} + \left(\frac{L}{\pi}\right)^8\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}\frac{1}{(s-k)^4k^4}\right) \le \frac{M}{\omega_s^3}\left(\frac{1}{\omega_s} + 8\left(\frac{L}{\pi}\right)^5\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}\frac{1}{|s-k|k}\right) \le$$

$$\le \frac{ML}{\pi\omega_s^3}\left(1 + 16\left(\frac{L}{\pi}\right)^4\right) \le \frac{K}{\omega_s^3},$$

[9, с. 263, 264], де

$$|c_{ss}(t,\varepsilon)| \le M,\ |c_{sk}(t,\varepsilon)| \le \frac{M}{(\omega_s-\omega_k)^4},\ t\in[0;T],\ s\neq k,\ s,k\in N,$$

то

$$|y_s^{(q)}(t,\varepsilon) - y_s^{(q-1)}(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon k_0 K^{q-1} t^q}{\omega_s^4 q!},\ q \in N.$$

А тому ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty}(y_s^{(q)}(t,\varepsilon) - y_s^{(q-1)}(t,\varepsilon))$ на відрізку $[0;T]$ збігається абсолютно та рівномірно. Позначимо його суму через $y_s(t,\varepsilon)$. Оскільки

$$y_s^{(q)}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{q}(y_s^{(i)}(t,\varepsilon) - y_s^{(i-1)}(t,\varepsilon)),$$

то $y_s^{(q)}(t,\varepsilon) \to y_s(t,\varepsilon)$, $t \in [0;T]$, $q \to \infty$.

Враховуючи неперервність наближень $y_s^{(q)}(t,\varepsilon)$, $q \in N$, приходимо до висновку, що функція $y_s(t,\varepsilon)$ є розв'язком рівняння (27).

За побудовою

$$|y_s^{(q)}(t,\varepsilon)| \le \sum_{i=1}^{q}|y_s^{(i)}(t,\varepsilon) - y_s^{(i-1)}(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon k_0(\exp(KT)-1)}{K\omega_s^4},\ q \in N.$$

Отже,

$$|y_s(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon k_0(\exp(KT)-1)}{K\omega_s^4}.$$

Покажемо, що рівняння (27) на відрізку $[0;T]$ має єдиний розв'язок. Для цього скористаємося методом доведення від супротивного.

Нехай $\overline{y}_s = \overline{y}_s(t,\varepsilon)$ та $\overline{\overline{y}}_s = \overline{\overline{y}}_s(t,\varepsilon)$ — розв'язки рівняння (27). Припустимо, що $\overline{y}_s(t,\varepsilon) \not\equiv \overline{\overline{y}}_s(t,\varepsilon)$, $t \in [0;T]$. Тоді, не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\overline{y}_s(t,\varepsilon) \not\equiv \overline{\overline{y}}_s(t,\varepsilon)$, $t \in [0;\delta]$, де δ — як завгодно мале число.

Нехай

$$\theta(t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\overline{y}_s(t,\varepsilon) - \overline{\overline{y}}_s(t,\varepsilon)\right)^2,\ t \in [0;T]. \tag{28}$$

Оскільки ряд у правій частині (28) збігається рівномірно і його члени є неперервними функціями на відрізку $[0;T]$, то й функція $\theta(t)$ буде неперервною на цьому відрізку [9, с. 430].

Нехай $\theta_1 = \max\limits_{t\in[0;\delta]}\theta(t)$. Тоді для деякого $t^* \in [0;\delta]$ $\theta(t^*) = \theta_1$. Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, з (27) дістаємо

$$\left(\overline{y}_s(t,\varepsilon) - \overline{\overline{y}}_s(t,\varepsilon)\right)^2 \le c\left(\frac{1}{\omega_s^2}\int_0^t \theta(\tau)d\tau + \int_0^t \left(\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) - \overline{\overline{y}}_k(\tau,\varepsilon)\right)^2 d\tau\right)$$

зі сталою c, що не залежить від t та ε [9, с. 152; 4, с. 244].

Тоді існує стала c_0, для якої

$$\theta_1 \leq c_0 \int\limits_0^{t^*} \theta(\tau)d\tau \leq c_0 \int\limits_0^{\delta} \theta(\tau)d\tau \leq c_0\delta\theta_1.$$

Отже, $\delta \geq \dfrac{1}{c_0}$, що суперечить вибору δ. Таким чином, рівняння (27) має єдиний розв'язок.

Із наведених оцінок для функцій $y_s(t,\varepsilon)$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність ряду

$$\sum_{s=1}^{\infty} y_s(t,\varepsilon)v_s(x) \tag{29}$$

у прямокутнику $\overline{D}_T$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (29) за змінними t та x до двох разів включно; знайдені таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно в $\overline{D}_T$.

За побудовою

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} z_k''(t,\varepsilon) \int\limits_0^L v_k(x)v_s(x)dx + a(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 z_k(t,\varepsilon) \int\limits_0^L v_k(x)v_s(x)dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^L c(t,x,\varepsilon)v_k(x)v_s(x)dx \right) z_k(t,\varepsilon) + \int\limits_0^L f(t,x,\varepsilon)v_s(x)dx,\ s \in N,$$

або

$$\int\limits_0^L \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2} - a(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon c(t,x,\varepsilon)u(t,x,\varepsilon) - f(t,x,\varepsilon) \right) v_s(x)dx \equiv 0,$$

де $s \in N$ і функція $u(t,x,\varepsilon)$ визначена за формулою (6).

Покладемо

$$q(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2} - a(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon c(t,x,\varepsilon)u(t,x,\varepsilon) - f(t,x,\varepsilon).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_s(t,\varepsilon)v_s(x),$$

де

$$q_s(t,\varepsilon) = \int\limits_0^L q(t,x,\varepsilon)v_s(x)dx,\ s \in N.$$

За побудовою $q_s(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s \in N$.

Оскільки функція $q(t,x,\varepsilon)$ неперервна за змінною x, $x\in[0;L]$, (t, ε вважаємо параметрами) і

$$q(t,0,\varepsilon)=q(t,L,\varepsilon)=0,\ t\in[0;T],$$

то, продовжуючи непарним способом $q(t,x,\varepsilon)$ на відрізок $[-L;0]$, приходимо до висновку, що $q(t,x,\varepsilon)\equiv 0$, $(t,x)\in\overline{D}_T$ [10, с. 578].

Таким чином, функція (6) у прямокутнику $\overline{D}_T$ є розв'язком крайової задачі (3) – (5), причому

$$|u(t,x,\varepsilon)-u_1(t,x,\varepsilon)|=O(\varepsilon). \tag{30}$$

В силу довільності T розв'язок задачі (3) – (5) визначаємо на множині $\overline{D}_\infty=\{(t,x):t\geq 0,\ 0\leq x\leq L\}$.

Теорема 1. *Нехай $a_i(t)\in C^4[0;\infty)$, $c_i(t,x)$, $f_i(t,x)\in C^4([0;\infty)\times[0;L])$, $i\geq 0$, і виконуються умови 1, 3 – 9. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, що перша крайова задача (3) – (5) на множині $\overline{D}_\infty$ для всіх $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ має єдиний розв'язок (6), для якого в $\overline{D}_T\subset\overline{D}_\infty$ справджується оцінка (30).*

Зауваження 1. *Побудуємо функцію*

$$\overline{u}_1(t,x,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}(\overline{w}_+^{(s)}(t,\varepsilon)+\overline{w}_-^{(s)}(t,\varepsilon))v_s(x),$$

де, наприклад,

$$\overline{w}_-^{(s)}(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty}\{\Pi_-(t,0)\}_{sj}\{\xi_-(t,\varepsilon)\}_j=\{p_{s-}^{(0)}\}_s\{\xi_-(t,\varepsilon)\}_s,\ s\in N.$$

При цьому

$$\{p_{s-}^{(0)}\}_s=\frac{a_s}{2}+O(\varepsilon),\ s\in N.$$

Таким чином, має місце оцінка

$$|u(t,x,\varepsilon)-\overline{u}_1(t,x,\varepsilon)|=O(\varepsilon).$$

Теорема 1 містить достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (3) – (5). При цьому умови 4 – 7 давали змогу почленно диференціювати відповідні ряди.

Нехай тепер мають місце такі умови.

10. $\varphi(x)\in C^3[0;L]$, $\psi(x)\in C^3[0;L]$.

11. $\varphi(0)=\varphi(L)=0$, $\psi(0)=\psi(L)=0$.

Тоді для всіх $t\in[0;T]$

$$|\{p_{s+}^{(1)}(t)\}_k|\leq\frac{M|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|}{|\omega_k^2-\omega_s^2|(\omega_k-\omega_s)^2},\ k\neq s,\ k,s\in N,$$

та

$$|\{g^{(i)}(t)\}_s| \le \frac{M}{\omega_s^4},\ i=0,1;\ s\in N,$$

зі сталою M, що не залежить від k, s.

Аналогічно доводимо, що на множинах

$$S_3=\left\{(\{p_{s+}^{(0)}\}_s,\{p_{s-}^{(0)}\}_s)\in R^2:\max\{|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|,|\{p_{s-}^{(0)}\}_s|\}\le\frac{M_0}{\omega_s^3}\right\},\ s\in N,$$

система (23) має єдиний розв'язок.

У даному випадку функція $w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (8) з точністю $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s}\right)$, $s\in N$. Тоді для розв'язку $y_s=y_s(t,\varepsilon)$ рівняння, що аналогічне (27), справджується оцінка $y_s(t,\varepsilon)=O\left(\frac{\varepsilon}{\omega_s^2}\right)$, $s\in N$. А тому ряд (29) у прямокутнику $\overline{D}_T$ збігається абсолютно і рівномірно.

За побудовою

$$\varepsilon^2\sum_{k=1}^{m}z_k''(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx+a(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}\omega_k^2 z_k(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx\equiv$$

$$\equiv\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L c(t,x,\varepsilon)v_k(x)v_s(x)dx\right)z_k(t,\varepsilon)+\int_0^L f(t,x,\varepsilon)v_s(x)dx,\ s=\overline{1,m},$$

тобто

$$\int_0^L\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2}-a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2}-\varepsilon c(t,x,\varepsilon)u(t,x,\varepsilon)-f(t,x,\varepsilon)\right)v_s(x)dx\equiv 0,$$

$s=\overline{1,m}$, де

$$u_m(t,x,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}z_k(t,\varepsilon)v_k(x).$$

Покладемо

$$q_m(t,x,\varepsilon)=\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2}-a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2}-\varepsilon c(t,x,\varepsilon)u(t,x,\varepsilon)-f(t,x,\varepsilon).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x), \tag{31}$$

де

$$q_{ms}(t,\varepsilon)=\int_0^L q_m(t,x,\varepsilon)v_s(x)dx,\ s\in N.$$

За побудовою $q_{ms}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s = \overline{1,m}$. Оцінимо решту коефіцієнтів $q_{ms}(t,\varepsilon)$, $s \geq m+1$. Для цього зазначимо, що

$$q_{m+1}(t,x,\varepsilon) = q_m(t,x,\varepsilon) + \varepsilon^2 z''_{m+1}(t,\varepsilon)v_{m+1}(x) - a(t,\varepsilon)z_{m+1}(t,\varepsilon)v''_{m+1}(x).$$

Оскільки $q_{m+1,s}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s = \overline{1,m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 z''_{m+1}(t,\varepsilon) + \omega^2_{m+1} a(t,\varepsilon) z_{m+1}(t,\varepsilon)).$$

А тому

$$|q_{m,m+1}(t,\varepsilon)| \leq \frac{M}{\omega^2_{m+1}}$$

зі сталою M, що не залежить від m. І взагалі, враховуючи, що

$$q_{m+i}(t,x,\varepsilon) = q_m(t,x,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{i} (\varepsilon^2 z''_{m+j}(t,\varepsilon)v_{m+j}(x) - a(t,\varepsilon)z_{m+j}(t,\varepsilon)v''_{m+j}(x)),$$

звідки

$$q_{m,m+i}(t,x,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 z''_{m+i}(t,\varepsilon) + \omega^2_{m+i} a(t,\varepsilon) z_{m+i}(t,\varepsilon)),\ i \in N,$$

дістаємо

$$|q_{ms}(t,\varepsilon)| \leq \frac{M}{\omega^2_s},\ s \geq m+1,$$

де стала M не залежить від m, s. Таким чином, ряд (31) у прямокутнику $\overline{D}_T$ збігається абсолютно і рівномірно.

Оскільки функція $q_m(t,x,\varepsilon)$ неперервна за змінною x, $x \in [0;L]$ (t, ε вважаємо параметрами) і

$$q_m(t,0,\varepsilon) = q_m(t,L,\varepsilon) = 0,$$

то, продовжуючи непарним способом $q_m(t,x,\varepsilon)$ на відрізок $[-L;0]$, приходимо до висновку, що $q_m(t,x,\varepsilon)$ є сумою ряду (31) [11, с. 68].

За побудовою $u_m(t,x,\varepsilon)$ є розв'язком задачі

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u_m(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2} +$$

$$+\varepsilon c(t,x,\varepsilon)u(t,x,\varepsilon) + f(t,x,\varepsilon) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x),$$

$$u_m(0,x,\varepsilon) = \varphi_m(x),\ \frac{\partial u_m(0,x,\varepsilon)}{\partial t} = \psi_m(x),$$

$$u_m(t,0,\varepsilon) = u_m(t,L,\varepsilon) = 0,$$

де

$$\varphi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s v_s(x),\ \psi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} b_s v_s(x).$$

Оскільки

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon) v_s(x) \to 0,\ m \to \infty,$$

і

$$u_m(t,x,\varepsilon) \to u(t,x,\varepsilon),\ m \to \infty,$$

рівномірно для всіх $(t,x) \in \overline{D}_T$, то функція (6) у прямокутнику $\overline{D}_T$ є узагальненим розв'язком крайової задачі (3) – (5) [12, с. 324].

Отже, має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $a_i(t) \in C^3[0;\infty)$, $c_i(t,x)$, $f_i(t,x) \in C^3([0;\infty) \times [0;L])$, $i \geq 0$, *і виконуються умови 1, 3, 7 – 11. Тоді існує таке* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *що перша крайова задача (3) – (5) на множині* $\overline{D}_\infty$ *для всіх* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ *має єдиний узагальнений розв'язок (6), для якого в* $\overline{D}_T \subset \overline{D}_\infty$ *справджується оцінка (30).*

Нехай тепер рівняння (3) має вигляд

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon c(t,x,\varepsilon) u + f(t,x,\varepsilon). \tag{32}$$

Як і раніше, розв'язок задачі (32), (4), (5) шукаємо у вигляді (6). При цьому $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $g^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, визначаємо із тотожностей (13), (14).

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε^i, $i = \overline{0,m}$, у тотожності (13), дістаємо

$$\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega\Pi_+^{(0)}(t) = 0,$$

$$\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + a_0(t)\Omega\Pi_+^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} C^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-j-1)}(t) - (\Pi_+^{(i-2)}(t))'' -$$
$$-\sum_{j=0}^{i-1}\Big(2(\Pi_+^{(j)}(t))'\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) + \Pi_+^{(j)}(t)(\Lambda_+^{(i-j-1)}(t))'\Big) -$$
$$-\Pi_+^{(0)}(t)\Big(2\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)\Big) - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t),$$

$i = \overline{1,m}$, $\Pi_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $k < 0$.

Нехай $p_{s+}^{(i)}(t)$, $s \in N$, $i = \overline{0,m}$ — стовпці матриці $\Pi_+^{(i)}(t)$,
$\Lambda_+^{(i)}(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_{1+}^{(i)}(t), \lambda_{2+}^{(i)}(t), ...\}$, $i = \overline{0,m}$.

Тоді за умови 6 маємо

$$|\{p_{s+}^{(1)}(t)\}_k| \leq \frac{M|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|}{|\omega_k^2-\omega_s^2|(\omega_k-\omega_s)^4},\ k\neq s,\ k,s\in N,$$

$$|\lambda_{s+}^{(1)}(t)|\leq M,\ s\in N,$$

де стала M не залежить від k, s.

Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що мають місце такі оцінки:

$$|\{p_{s+}^{(i)}(t)\}_k| \leq \frac{M|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|}{|\omega_k^2-\omega_s^2|(\omega_k-\omega_s)^4},\ k\neq s,\ k,s\in N, \tag{33}$$

$$|\lambda_{s+}^{(i)}(t)|\leq M,\ s\in N, \tag{34}$$

$i=\overline{2,m}$; стала M не залежить від k, s.

Справді, припускаючи справедливість оцінок (33), (34) для $i=\overline{2,l}$, $l\geq 2$, дістаємо

$$\{C^{(j)}(t)p_{s+}^{(l-j)}(t)\}_k=\sum_{h=1}^{\infty}\{C^{(j)}(t)\}_{kh}\{p_{s+}^{(l-j)}(t)\}_h=\{C^{(j)}(t)\}_{kk}\{p_{s+}^{(l-j)}(t)\}_k+$$

$$+\sum_{\substack{h=1\\h\neq k}}^{\infty}\{C^{(j)}(t)\}_{kh}\{p_{s+}^{(l-j)}(t)\}_h,\ 0\leq j\leq l,\ k\neq s.$$

Тоді

$$|\{C^{(j)}(t)p_{s+}^{(l-j)}(t)\}_k|\leq$$

$$\leq K_1|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|\left(\frac{1}{(\omega_k-\omega_s)^4}+\sum_{\substack{h=1\\h\neq k,h\neq s}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_k-\omega_h)^4|\omega_h^2-\omega_s^2|(\omega_h-\omega_s)^4}\right)\leq\frac{K_2|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|}{(\omega_k-\omega_s)^4}$$

для всіх $0\leq j\leq l$, $k\neq s$, $k,s\in N$ (сталі K_1, K_2 не залежать від $k,s\in N$). А тому для $i=l+1$ має місце оцінка (33). Таким чином, згідно з принципом математичної індукції для всіх $i=\overline{2,m}$, $k,s\in N$, справджується оцінка (33). Аналогічно показуємо правильність оцінки (34).

12. Нехай $\varphi(x)\in C^4[0;L]$, $\psi(x)\in C^4[0;L]$.

Тоді з умов 5, 7 випливає, що система (23) на множині

$$S_4=\left\{(\{p_{s+}^{(0)}\}_s,\{p_{s-}^{(0)}\}_s)\in R^2:\max\{|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|,|\{p_{s-}^{(0)}\}_s|\}\leq\frac{M_0}{\omega_s^4}\right\},\ s\in N,$$

має єдиний розв'язок.

Для знайдених $\{p_{s+}^{(0)}\}_s$ та $\{p_{s-}^{(0)}\}_s$ ряд (21) збігається абсолютно і рівномірно у прямокутнику $\overline{D}_T$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (21) до двох разів включно; побудовані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(t,x) \in \overline{D}_T$.

Зазначимо, що функція $w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (8) з точністю $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$, $s \in N$.

Тоді, як і раніше, доводимо існування та єдиність розв'язку рівняння (27).

Теорема 3. *Нехай* $a_0(t) \in C^{m+3}[0;\infty)$, $c_i(t,x)$, $f_i(t,x) \in \in C^{m+3}([0;\infty) \times [0;L])$, $i \geq 0$, *і виконуються умови 1, 3, 5 – 7, 9, 12. Тоді існує таке* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *що перша крайова задача (32), (4), (5) на множині* $\overline{D}_\infty$ *для всіх* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ *має єдиний розв'язок (6), для якого в* $\overline{D}_T \subset \overline{D}_\infty$ *справджується оцінка*

$$|u(t,x,\varepsilon) - u_m(t,x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^m), \tag{35}$$

де $u_m(t,x,\varepsilon)$ *— функція вигляду (21), в якій* $\Pi_+(t,\varepsilon)$, $\Pi_-(t,\varepsilon)$, $\Lambda_+(t,\varepsilon)$, $\Lambda_-(t,\varepsilon)$ *та* $g(t,\varepsilon)$ *визначаються за формулами (12).*

13. Нехай $\varphi(x) \in C^2[0;L]$, $\psi(x) \in C^2[0;L]$. Тоді аналогічно показуємо, що на множинах

$$S_2 = \left\{ (\{p_{s+}^{(0)}\}_s, \{p_{s-}^{(0)}\}_s) \in R^2 : \max\{|\{p_{s+}^{(0)}\}_s|, |\{p_{s-}^{(0)}\}_s|\} \leq \frac{M_0}{\omega_s^2} \right\}, \ s \in N,$$

система (23) має єдиний розв'язок $\{p_{s+}^{(0)}\}_s$, $\{p_{s-}^{(0)}\}_s$. При цьому для розв'язку $y_s = y_s(t,\varepsilon)$ рівняння (27) справджується оцінка $y_s(t,\varepsilon) = O\left(\dfrac{\varepsilon^m}{\omega_s^2}\right)$, $s \in N$.

Теорема 4. *Нехай* $a_0(t) \in C^{m+2}[0;\infty)$, $c_i(t,x)$, $f_i(t,x) \in C^{m+2}([0;\infty)\times[0;L])$, $i \geq 0$, *і виконуються умови 1, 3, 7, 9, 11, 13. Тоді існує таке* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *що перша крайова задача (32), (4), (5) на множині* $\overline{D}_\infty$ *для всіх* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ *має єдиний узагальнений розв'язок (6), для якого в* $\overline{D}_T \subset \overline{D}_\infty$ *справджується оцінка (35).*

Література

[1] *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет лит., 1953. — 279 с.

[2] Маркуш И.И. Об асимптотическом представлении решения смешанной задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа с малым параметром // Дифференциальные уравнения. — 1967. — №2. – С. 294–314.

[3] *Фещенко С.Ф.* Асимптотичний розв'язок нескінченної системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – 1954. – №2. – С. 82–86.

[4] *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1966. – 249 с.

[5] *Шкиль Н.И.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными // Укр. мат. журн. – 1966. – №6. – С. 85–96.

[6] *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследований квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.

[7] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[8] *Павлюк І.А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. – 208 с.

[9] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

[10] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. – М.: Наука, 1969. – 656 с.

[11] *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 936 с.

[12] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. *Smeshannaja zadacha dlja giperbolicheskogo uravnenija (Mixed problem for hyperbolic equation)*, 1953, 279 p.

[2] Markush I.I. *Differencial'nye uravnenija (Differential Equations)*, 1967, №2, pp. 294–314

[3] Feshenko S.F. *Dop. AN URSR. (AS USSR Reports)*, 1954, №2, pp. 82-86.

[4] Feshenko S.F., Shkil N.I., Nikolenko L.D. *Asimptoticheskie metody v teorii linejnyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic methods in the theory of linear differential equations)*, 1966, 249 p.

[5] Shkil N.I. *Ukr. mat. zhurn. (Ukr. math. journal)*, 1966, №6, pp. 95-96.

[6] Mitropolskiy Ju.A., Homa G.P., Gromyak M.I. *Asimptoticheskie metody issledovanij kvazivolnovyh uravnenij giperbolicheskogo tipa (Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type)*, 1991, 232 p.

[7] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funkcional'nyj analiz (Functional analysis)*, 1977, 744 p.

[8] Pavlyuk I.A. - *Asymptotychni vlastyvosti rozv'jazkiv neavtonomnyh system dyferencial'nyh rivnjan' drugogo porjadku (Asymptotic properties of solutions of nonautonomous systems of second order differential equations)*, 1970, 208 p.

[9] Fichtenholz G. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija (A course in differential and integral calculus)*, 1969, vol. 2, 800 p.

[10] Fichtenholz G. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija (A course in differential and integral calculus)*, 1969, vol. 3, 656 p.

[11] Bari N.K. *Trigonometricheskie rjady (Trigonometric series)*, 1961, 936 p.

[12] Sobolev S.L. *Uravnenija matematicheskoj fiziki (The equations of mathematical physics)*,1966, 444 p.