Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2). — С. 168–178.

УДК 511.7, 517.1

Інтегральні зображення розв'язків сингулярної крайової задачі на півосі для лінійної системи другого порядку з регулярною особливою точкою

Л. В. Процак,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. Для лінійної неоднорідної системи другого порядку, визначеної на $[0,\infty)$, для якої $x = 0$ є регулярною особливою точкою, досліджено задачу відшукання неперервно диференційовного на $[0,\infty)$ розв'язку, який прямує до нуля, коли $x \to \infty$. Інтегральні зображення розв'язків такого типу побудовані у випадку, коли відповідна однорідна система є експоненціально дихотомічною на півосі $(0,\infty)$.

Integral representations for solutions of singular boundary value problem for a second order linear system defined on semiaxis with regular singular point

L. V. Protsak,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. We study a problem of finding continuously differentiable solution vanishing at infinity for a second order linear nonhomogeneous system defined on $[0,\infty)$ with regular singular point $x = 0$. We construct integral representations for solutions of such a type in the case where the corresponding homogeneous system is exponentially dichotomic.

AMS Subject Classifications (2010): 34M03

Key words: continuously differentiable solution, linear nonhomogeneous system, integral representations.

Вступ

Для системи диференціальних рівнянь вигляду

$$x^2\mathbf{u}'' + xP(x)\mathbf{u}' + Q(x)\mathbf{u} = \mathbf{F}(x), \tag{1}$$

де $P(x) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+ \mapsto M(n;\mathbb{R}))$, $Q(x) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \mapsto M(n;\mathbb{R}))$ ($M(n;\mathbb{R})$ — множина $(n \times n)$-матриць з дійсними елементами), $\mathbf{F}(x) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n)$, поставимо сингулярну крайову задачу: знайти розв'язок $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathrm{C}^2((0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n)$, який задовольняє крайові умови

$$\mathbf{u}(+0) = \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{u}(+\infty) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Тут $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ або наперед заданий вектор, або векторний параметр, який також підлягає визначенню.

Задачі такого типу природно виникають при розв'язанні низки питань математичної фізики (детальніший огляд робіт в цьому напрямку див. у [**1**]). У скалярному випадку $n = 1$ задачу (1)–(2) було досліджено в [**2**]. В [**1**] знайдено інтегральні представлення розв'язків аналогічної задачі для системи першого порядку з особливою точкою $x = 0$ першого роду. При стандартному зведенні системи (1) до системи $2n$ рівнянь першого порядку шляхом уведення векторної змінної $\mathbf{y} = \mathbf{colon}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$, виникає система з особливою точкою другого роду, що унеможливлює безпосереднє застосування результатів роботи [**1**].

В даній роботі розглянемо випадок $n \geq 2$ і з метою подолання зазначених труднощів запровадимо нову векторну змінну

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 2x(x+1)^{-1}\mathbf{u}' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Покладемо $E_n := \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})$, $0_n := \operatorname{diag}(\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$, і подамо вільний член та коефіцієнти системи (1) у вигляді

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_0 + x\mathbf{F}_1(x), \quad P(x) = P_0 + xP_1(x),$$
$$Q(x) = Q_0 + xQ_1 + x^2 Q_2(x).$$

Відтак досліджуватимемо сингулярну крайову задачу вигляду

$$x\mathbf{y}' = (A + xB(x))\,\mathbf{y} + \mathbf{a} + x\mathbf{f}(x), \tag{4}$$

$$\mathbf{y}(+0) = \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{y}(+\infty) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{colon}(\boldsymbol{\lambda}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ — або наперед заданий вектор, або векторний параметр, який також підлягає визначенню,

$$A := \begin{pmatrix} 0_n & \frac{1}{2}E_n \\ -2Q_0 & E_n - P_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 2\mathbf{F}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{2}{x+1}\left[\mathbf{F}_1(x) - \mathbf{F}_0\right] \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$B(x) := \begin{pmatrix} 0_n & \frac{1}{2}E_n \\ \frac{2}{x+1}\left[Q_0 - Q_1 - xQ_2(x)\right] & -\left[\frac{1}{x+1}E_n + P_1(x)\right] \end{pmatrix}.$$

1. Основні припущення та допоміжні леми

Окрім перелічених вище загальних припущень щодо системи (1), будемо в подальшому вимагати виконання таких основних умов:

а): відображення $P_1(\cdot), Q_2(\cdot) : [0,\infty) \mapsto M(n;\mathbb{R})$ обмежені і $\mathbf{F}_1(x) = o(x)$, $x \to \infty$.

б): характеристичний поліном $\chi(\lambda) := \det[\lambda(\lambda-1)E_n + \lambda P_0 + Q_0]$ лінійної однорідної системи Ейлера

$$x^2\mathbf{u}'' + xP_0\mathbf{u}' + Q_0\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7}$$

не має коренів з дійсною частиною, рівною -1;

в): система

$$\mathbf{u}'' + P_1(x)\mathbf{u}' + Q_2(x)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{8}$$

експоненціально дихотомічна на півосі $[1,\infty)$;

г): лінійна алгебрична система $Q_0\mathbf{u} = \mathbf{F}_0$ сумісна.

Варто відзначити, що ці умови не виключають вироджений випадок крайової задачі, коли відповідна однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Уточнимо також, що умову **в)** слід трактувати як експоненціальну дихотомічність відповідної еквівалентної системи першого порядку, де

$$\mathbf{y}' = \tilde{B}(x)\mathbf{y}, \quad \tilde{B}(x) := \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -Q_2(x) & -P_1(x) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

З усіх умов це єдина неефективна, тобто некоефіцієнтна, умова. Вкажемо частинний випадок системи (8), яка задовольняє умову **в)**.

Лема 1. *Якщо існує стала симетрична матриця P_* така, що*

$$\limsup_{x\to\infty}\left[\max_{\|\mathbf{u}\|=1}\langle Q_2(x)\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \|\mathfrak{S}P_1(x) - P_*\|^2/4\right] < 0,$$

де $\mathfrak{S}P_1(x) := \frac{1}{2}[P_1(x) + P_1^*(x)]$ — симетрична складова матриці $P_1(x)$ (* — операція транспонування), то система (8) *експоненціально дихотомічна на півосі* $[1,\infty)$.

Доведення. Обчисливши похідну невиродженої індефінітної квадратичної форми

$$V(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}\langle P_*\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

у наслідок системи (9), еквівалентної системі (8), дістанемо

$$V'(\mathbf{y}) = -\langle P_*\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle - \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, Q_2(x)\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, P_1(x)\mathbf{v}\rangle \le$$
$$\le \max_{\|\mathbf{u}\|=1}\langle Q_2(x)\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 + \|P_1(x) - P_*\|\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Якщо виконана умова леми, то знайдуться додатні числа x_0 і γ такі, що

$$V'(\mathbf{y}) \le -\gamma \|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall x \ge x_0.$$

Тепер на підставі результатів робіт [**3, 4**] робимо висновок, що система (8) експоненціально дихотомічна на півосі $[x_0, \infty)$. Неважко показати, що тоді ця система буде експоненціально дихотомічною і на півосі $[1, \infty)$ (див. зауваження 3.1 [**5**, с. 234]). $\square$

Наслідок 1. *Якщо відображення $P_1(\cdot)$ та $Q_2(\cdot)$ мають властивість*

$$\limsup_{x\to\infty}\left[\max_{\|\mathbf{u}\|=1}\langle Q_2(x)\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \|\mathfrak{S}P_1(x)\|^2/4\right] < 0,$$

то система (8) *експоненціально дихотомічна на півосі* $[1, \infty)$.

Справді, достатньо в лемі 1 покласти $P_* = 0_n$.

Наслідок 2. *Якщо*

$$\limsup_{x\to\infty}\left[\max_{\|\mathbf{u}\|=1}\langle Q_2(x)\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\right] =: -q < 0,$$

існує середнє

$$\mathfrak{S}\bar{P}_1 := \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x \mathfrak{S}P_1(s)\mathrm{d}s$$

і

$$\limsup_{x\to\infty}\left\|\mathfrak{S}P_1(x) - \mathfrak{S}\bar{P}_1\right\| < 2\sqrt{q},$$

то система (8) *експоненціально дихотомічна на півосі* $[1, \infty)$.

Справді, достатньо в лемі 1 покласти $P_* = \mathfrak{S}\bar{P}_1$.

Лема 2. *Якщо система* 8 *експоненціально дихотомічна на півосі* $[1, \infty)$*, то експоненціально дихотомічною на цій півосі (а отже, й на півосі* $[x_0, \infty)$ *при довільному* $x_0 > 0$*) буде й система*

$$x\mathbf{y}' = (A + xB(x))\,\mathbf{y}. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки система (9) буде експоненціально дихотомічною тоді й лише тоді, коли таку саму властивість матиме і система

$$\mathbf{y}' = \hat{B}(x)\mathbf{y}, \quad \hat{B}(x) := \begin{pmatrix} 0_n & \frac{1}{2}E_n \\ -2Q_2(x) & -P_1(x) \end{pmatrix},$$

і

$$\left\|\frac{1}{x}A + B(x) - \hat{B}(x)\right\| \to 0, \quad x \to \infty,$$

то твердження леми випливає з теореми 5.1 на с. 260, зауваження 5.2 на с. 261 та зауваження 3.1 на с. 234 в [**5**]. $\square$

Лема 3. *Характеристичним поліномом матриці* A *в* (6) *є характеристичний поліном* $\chi(\lambda)$ *системи* (7).

Доведення. Справді,

$$|\lambda E_{2n} - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 2Q_0 & \lambda E_n + P_0 - E_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda E_n & 0_n \\ Q_0 & \lambda E_n + P_0 - E_n + \lambda^{-1}Q_0 \end{vmatrix} = \lambda^n \left|\lambda E_n + P_0 - E_n + \lambda^{-1}Q_0\right| =$$

$$= \left|\lambda^2 E_n + \lambda\left(P_0 - E_n\right) + Q_0\right| = \chi(\lambda).$$

□

Лема 4. *Система*

$$A\mathbf{y} + \mathbf{a} = 0 \tag{11}$$

відносно $\mathbf{y}$ *сумісна тоді й лише тоді, коли виконана умова* **г**), *причому існує єдиний вектор* $\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{im} Q_0^*$ *такий, що* $Q_0\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}_0$. *Вектор* $\boldsymbol{\eta} := \mathbf{colon}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0})$ *є єдиним розв'язком системи* (11), *який належить підпростору* $\operatorname{im} A^*$.

Доведення. З вигляду матриці A випливає, що всякий розв'язок системи (11) має вигляд $\mathbf{colon}(\mathbf{u}, \mathbf{0})$, де $\mathbf{u}$ задовольняє систему $Q_0\mathbf{u} = \mathbf{F}_0$. Добре відомо, що остання система у випадку сумісності має єдиний розв'язок $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}$, який належить $\operatorname{im} Q_0^*$. Отже, вектор $\boldsymbol{\eta}$, визначений у формулюванні леми, задовольняє систему (11).

Далі, оскільки підпростір $\operatorname{im} A^*$ утворюють вектори вигляду

$$\mathbf{y} = \mathbf{colon}\left(Q_0^*\mathbf{z}, \mathbf{w} - \frac{1}{2}(E_n - P_0^*)\mathbf{z}\right), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

то на цьому підпросторі система (11) еквівалентна такій:

$$\mathbf{w} - \frac{1}{2}(E_n - P_0^*)\mathbf{z} = 0, \quad 2Q_0Q_0^*\mathbf{z} = \mathbf{F}_0.$$

Вектор $\boldsymbol{\eta}$ належить $\operatorname{im} A^*$, оскільки за означенням $\operatorname{im} Q_0^*$ знайдеться хоча б один вектор $\mathbf{z}$ такий, що $2Q_0^*\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$, і цей вектор однозначно визначає вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(E_n - P_0^*)\mathbf{z}$. Залишилося зауважити, що система (11) має не більше одного розв'язку з підпростору $\operatorname{im} A^*$. □

Леми 1, 3, 4 разом з умовами **а)**–**г)** дають підстави стверджувати, що до крайової задачі (4) можна застосувати результати [**1**]. Перш ніж це зробити, розкласифікуємо розв'язки лінійної однорідної системи (10) за можливими типами відповідно до того, як це було запропоновано в [**1**].

2. Класифікація розв'язків системи (10)

Відповідно до [**1**] апріорі для розв'язків лінійної однорідної системи (10) можна виділити шість лінійних підпросторів $\mathbb{L}_i \in \mathbb{R}^{2n}$ $(i = 1, \ldots, 6)$, які характеризуються такими властивостями:

1) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_1$ тоді і лише тоді, коли

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1+\alpha} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 0 < x \leq s \leq 1, \tag{12}$$

і

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_* e^{-\gamma(x-s)} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 1 \leq s \leq x, \tag{13}$$

де c_0, c_*, α, γ — деякі додатні сталі;

2) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_2$ тоді і лише тоді, коли знайдеться вектор $\boldsymbol{\zeta} \in \ker A \setminus \{0\}$ такий, що

$$\mathbf{y}(x) = \big(E + x(E - A)^{-1} B(0)\big)\boldsymbol{\zeta} + o(x), \quad x \to +0, \tag{14}$$

і справджується нерівність (13);

3) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_3$ тоді і лише тоді, коли не існує правої похідної $\mathbf{y}'(+0)$ і справджуються нерівності

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1-\alpha} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 0 < s \leq x \leq 1, \tag{15}$$

та (13);

4) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_4$ тоді і лише тоді, коли справджуються нерівності (12) та

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_* e^{\gamma(x-s)} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 1 \leq x \leq s; \tag{16}$$

5) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_5$ тоді і лише тоді, коли розв'язок допускає представлення (14) і задовольняє нерівність (16);

6) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_6$ тоді і лише тоді, коли коли не існує правої похідної $\mathbf{y}'(+0)$ і справджуються нерівності (15) та (16).

Очевидно, що у випадку $n = 2$ одночасно нетривіальними можуть бути не більше чотирьох з шести підпросторів $\mathbb{L}_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Як що ж $n \geq 3$, то реалізуватися можуть усі шість підпросторів. Простори $\mathbb{L}_2$ та $\mathbb{L}_5$ можуть бути нетривіальними лише за умови, що

$$\dim \ker Q_0 > 0.$$

3. Основна теорема

Нехай $\mathbf{u}_1(x), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(x)$ — фундаментальна система розв'язків (ФСР) однорідної системи

$$x^2 \mathbf{u}'' + xP(x)\mathbf{u}' + Q(x)\mathbf{u} = 0, \tag{17}$$

нормована в точці $x = 1$ у такий спосіб, щоб матриці

$$U_1(x) := [\mathbf{u}_1(x), \ldots, \mathbf{u}_n(x)], \quad U_2(x) := [\mathbf{u}_{n+1}(x), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(x)],$$

утворені стовпцями зазначеної ФСР, задовольняли умови

$$U_1(1) = E_n, \quad U_2(1) = 0_n, \quad U_1'(1) = 0_n, \quad U_2'(1) = E_n.$$

Уведемо також фундаментальну $(n \times 2n)$ матрицю

$$U(x) := [\mathbf{u}_1(x), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(x)].$$

Поряд з (17) розглянемо спряжену систему

$$x^2\mathbf{w}'' - xP^*(x)\mathbf{w}' + \left(Q^*(x) + P^*(x) - x\,[P'(x)]^*\right)\mathbf{w} = 0, \tag{18}$$

і нормуємо її ФСР $\mathbf{w}_1(x), \ldots, \mathbf{w}_{2n}(x)$ так, щоб матриці

$$W_1(x) := [\mathbf{w}_1(x), \ldots, \mathbf{w}_n(x)], \quad W_2(x) := [\mathbf{w}_{n+1}(x), \ldots, \mathbf{w}_{2n}(x)],$$

утворені стовпцями цієї ФСР, задовольняли умови

$$W_1(1) = 0_n, \quad W_2(1) = E_n, \quad W_1'(1) = -E_n, \quad W_2'(1) = P^*(1).$$

Тепер уведемо $(n \times 2n)$-фундаментальну матрицю

$$W(x) := [\mathbf{w}_1(x), \ldots, \mathbf{w}_{2n}(x)].$$

Позначимо через $P_1, \ldots, P_6$ набір взаємно диз'юнктивних проекційних матриць, природно породжених розкладом

$$\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{L}_i,$$

і увівши множини

$$D := \{(x,s) :\ 0 < x < s < 1\} \cup \{(x,s) :\ 1 \le s \le x\},$$
$$D_+ := \{(x,s) :\ 0 < s \le x\}, \quad D_- := \{(x,s) :\ 0 < x < s\},$$

визначимо матричнозначні функції

$$\mathcal{G}_1(x,s) := \begin{cases} \ \ U(x)P_1W^*(s), & (x,s) \in D \cap D_+, \\ -U(x)P_1W^*(s), & (x,s) \in D \cap D_-, \\ \ \ 0, & (x,s) \in (D_+ \cup D_-) \setminus D, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_2(x,s) := \begin{cases} \ \ U(x)(P_2 + P_3)W^*(s), & (x,s) \in D_+, \\ -U(x)(P_4 + P_5 + P_6)W^*(s), & (x,s) \in D_-, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(x,s) := \mathcal{G}_1(x,s) + \mathcal{G}_2(x,s),$$

та вектор-функцію

$$\mathbf{g}(x) := \frac{1}{x}\left[\mathbf{F}_1(x) - \mathbf{F}_0 + (Q_0 - Q_1 - xQ_2(x))\,\boldsymbol{\xi}\right].$$

Теорема 1. *Крайова задача* (1)–(2) *має розв'язок тоді й лише тоді, коли*

$$\int\limits_0^\infty P_6 W^*(s)\mathbf{g}(s)\mathrm{d}s = \mathbf{0}. \tag{19}$$

Якщо ця умова виконана, то всі розв'язки крайової задачі описує формула

$$\mathbf{u} = U(x)(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) + \boldsymbol{\xi} + \int\limits_0^\infty \mathcal{G}(x,s)\mathbf{g}(s)\mathrm{d}s, \tag{20}$$

де $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{L}_1$ *та* $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{L}_2$ *— довільні вектори, а* $\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{im} Q_0^*$ *— такий єдиний вектор, що* $Q_0\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}_0$. *При цьому* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\xi} + \varkappa(\mathbf{c}_2)$, *де*

$$\varkappa(\mathbf{c}_2) = U(+0)\left[\mathbf{c}_2 - \int\limits_0^\infty P_5 W^*(s)\mathbf{g}(s)\mathrm{d}s\right] \in \ker Q_0.$$

Доведення. Нехай $Y(x)$ — нормована в точці $x = 1$ фундаментальна матриця системи (10). Визначимо матричнозначні функції

$$G_1(x,s) := \begin{cases} Y(x)P_1Y^{-1}(s), & (x,s) \in D \cap D_+, \\ -Y(x)P_1Y^{-1}(s), & (x,s) \in D \cap D_-, \\ 0, & (x,s) \in (D_+ \cup D_-) \setminus D, \end{cases}$$

$$G_2(x,s) := \begin{cases} Y(x)(P_2 + P_3)Y^{-1}(s), & (x,s) \in D_+, \\ -Y(x)(P_4 + P_5 + P_6)Y^{-1}(s), & (x,s) \in D_-, \end{cases}$$

$$G(x,s) := G_1(x,s) + G_2(x,s).$$

Якщо виконуються умови **а)–г)**, то за теоремою 5.1 [**1**] та з урахуванням лем 1, 3, 4 задача (4)–(5) має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\int\limits_0^\infty P_6 Y^{-1}(s)\left[\mathbf{f}(s) + B(x)\boldsymbol{\eta}\right]\mathrm{d}s = \mathbf{0}. \tag{21}$$

За умови, що ця рівність виконується, множину всіх розв'язків задачі (4)–(5) охоплює формула

$$\mathbf{y} = Y(x)\mathbf{c} + \boldsymbol{\eta} + \int_0^\infty G(x,s)\left[\mathbf{f}(s) + B(x)\boldsymbol{\eta}\right]\mathrm{d}s, \tag{22}$$

де $\mathbf{c} \in \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2$ — довільний вектор, $\boldsymbol{\eta}$ — вектор, визначений у лемі 4. Зрозуміло, що вектор-функція, утворена першими n компонентами лівої частини формули (22), визначатиме множину розв'язків основної крайової задачі (1)–(2). З'ясуємо структуру цієї вектор-функції.

З формули (3) випливає, що матрицю $Y(x)$ можна подати у вигляді

$$Y(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ V_1(x) & V_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E_n & 0_n \\ 0_n & \frac{2x}{x+1}E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що справджується рівність

$$Y^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x^{-1}W_1^*(x)P(x) - [W_1'(x)]^* & W_1^*(x) \\ x^{-1}W_2^*(x)P(x) - [W_2'(x)]^* & W_2^*(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0_n \\ 0_n & \frac{x+1}{2x}E_n \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Для цього зауважимо, що матриця

$$\tilde{Y}(x) := \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) \end{pmatrix}$$

є нормованою в точці $x = 1$ фундаментальною матрицею системи першого порядку

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -x^{-2}Q(x) & -x^{-1}P(x) \end{pmatrix}\mathbf{y},$$

еквівалентної системі другого порядку (17). Якщо обернену до зазначеної матриці транспонувати, то дістанемо матрицю $\left[\tilde{Y}^{-1}(x)\right]^*$, яка, як добре відомо, буде нормованою фундаментальною матрицею спряженої системи

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0_n & x^{-2}Q^*(x) \\ -E_n & x^{-1}P^*(x) \end{pmatrix}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{z}' = x^{-2}Q^*(x)\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' = -\mathbf{z} + x^{-1}P^*(x)\mathbf{w}, \end{cases} \tag{24}$$

де $\mathbf{y} = \mathbf{colon}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$. Здиференціювавши тут підсистему для змінної $\mathbf{w}$, дістанемо для цієї змінної систему другого порядку (18), спряжену відносно вихідної системи (17). З урахуванням означення матриць $W_1(x)$, $W_2(x)$ нормована в точці $x = 1$ фундаментальна матриця системи (24) має вигляд

$$\left[\tilde{Y}^{-1}(x)\right]^* = \begin{pmatrix} x^{-1}P^*(x)W_1(x) - W_1'(x) & x^{-1}P^*(x)W_2(x) - W_2'(x) \\ W_1(x) & W_2(x) \end{pmatrix}.$$

Звідси й випливає формула (23).

Зауваживши, що

$$\mathbf{f}(x) + B(x)\boldsymbol{\eta} = \mathbf{colon}\left(\mathbf{0}, \frac{2x}{x+1}\mathbf{g}(x)\right),$$

з урахуванням (23) легко переконатися в тому, що вектор-функція, утворена першими n компонентами вектор-функції $Y(x)P_jY^{-1}(s)\,[\mathbf{f}(s) + B(s)\boldsymbol{\eta}]$ має вигляд $U(x)P_jW^*(s)\mathbf{g}(s)$. Тепер уже зрозуміло, що умова (21) існування розв'язку крайової задачі (1)–(2) набирає вигляду (19), а формула сім'ї розв'язків цієї задачі (20) безпосередньо випливає з (22). Структура вектора $\varkappa(\mathbf{c}_2)$ пояснюється властивостями розв'язків, асоційованими з підпросторами $\mathbb{L}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, якщо при цьому взяти до уваги формули (19) та (20). □

Зауваження 1. *В роботі* [**2**] *потребує уточнення формула для вронскіана* $W(x)$, *який фігурує у формулах для розв'язків теореми 1. Його слід визначити як*

$$W(x) = \frac{2x}{x+1}\mathrm{e}^{-\int_1^x b_1(s)\mathrm{d}s}.$$

Водночас другий рядок матриці $Y(x;i,j)$ *має бути домножений на* $x/(x+1)$.

4. Висновки

З'ясовано, що існування розв'язку сингулярної крайової задачі (4)–(5) обумовлене виконанням умови ортогональності вигляду (19). Ця задача є виродженою, якщо хоча б один з підпросторів $\mathbb{L}_1$ або $\mathbb{L}_2$ нетривіальний; в цьому випадку розв'язки утворюють k-параметричну сім'ю, де $k = \dim \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2$. За допомогою певним чином нормованих фундаментальних систем розв'язків відповідної однорідної системи та спряженої із нею системи побудовано ядро інтегрального зображення розв'язків досліджуваної неоднорідної крайової задачі.

Значно складнішим для аналізу є випадок, коли $x = 0$ є іррегулярною особливою точкою. Цьому випадку буде присвячено окреме дослідження, яке спиратиметься на результати М.І. Шкіля та В.К. Григоренка [**6**].

Література

[1] *Horishna Y., Parasyuk I., Protsak L.* Integral representation of solutions to boundary value problems on the half-line for linear ODEs with singularity of the first kind// Electron. J. Differ. Equat. – 2008. – № 137. – P. 1-18.

[2] *Процак Л.* Сингулярна крайова задача на півосі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з регулярною особливою точкою// Мат. вісник Наукового товариства ім. Шевченка. — 2010. – **7**. – С. 205-214.

[3] *Майзель А.Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений// Труды Уральского политехн. ин-та. Сер. матем. – 1954. – **51**. – С. 20-50.

[4] *Самойленко А.М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$// Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 356-371.

[5] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

[6] *Шкіль М.І., Григоренко В.К.* Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою/ М.І. Шкіль, В.К. Григоренко// Допов. АН УРСР, сер. А. – 1972. – **1**.– с. 29-34.

References

[1] Horishna Y., Parasyuk I., Protsak L. *Electron. J. Differ. Equat.* - 2008, №137, pp. 1-18

[2] Protsak L. *Mat. visnyk Naukovogo tovarystva im. Shevchenka. (Math. Journal of the Shevchenko Scientific Society.)*, 2010, **7**, pp. 205-214.

[3] Meisel A.D. *Trudy Ural'skogo politehn. in-ta. (Proceedings of the Ural Polytechnic. Inst.)*, 1954, **51**, pp. 20-50.

[4] Samoilenko A.M. *Ukr. math. journ.*, 2001, **53**, 3, pp. 356-371.

[5] Daletskii Ju.L., Krein M.G. *Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve. (Stability of solutions of differential equations in a Banach space.)*, 1970, 536 p.

[6] Shkil M.I., Grygorenko V.K. *Dopov. AN URSR (AS USSR Reports)*, 1972, **1**, pp. 29-34.