Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 139–149.

УДК 511.72+519.21

Тополого-метричні властивості однієї множини дійсних чисел визначеної в термінах частоти двійкової цифри

О. П. Макарчук,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. В роботі досліджуються властивості множини розв'язків рівняння $\nu_i(x) = f(x)$ $(i \in 0, 1)$ в двійковій системі числення, де $\nu_i(x)$ частота цифри i в двійковому записі числа x. Вказано алгоритм побудови коренів рівняння $\nu_i(x) = f(x)$.

Ключові слова: частота цифри, двійкова система числення.

Topological and metric properties of the set of real numbers that are described in terms of frequency of binary digit

O. Makarchuk,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. In this paper we study the properties of the set of solutions of equation $\nu_i(x) = f(x)$ $(i \in 0, 1)$ in binary notation, where $\nu_i(x)$ is a frequency of digit i in binary representation of number x. We specified algorithm of roots constructing for the equation $\nu_i(x) = f(x)$.

AMS Subject Classifications (2010): 28A80, 60G30.

Key words: asymptotic frequency of digit, binary digit, equation.

Вступ

Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність α_n, $\alpha_n \in \{0, 1\}$, $\forall n \in N$ така, що

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} = \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

Останній запис називається двійковим зображенням числа. Зліченна множина точок має рівно два зображення

$$\Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n 1(0) \ldots} = \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n 0(1) \ldots}.$$

E-mail: makolpet@gmail.com

Їх називають двійково-раціональними і вони, очевидно, подаються у вигляді $\dfrac{r}{2^s}$, $r, s \in Z_+$, $r \leq 2^s$. Для таких чисел прийнято використовувати перше двійкове зображення. Решта чисел називається двійково-ірраціональними. Вони мають єдине зображення.

Нехай $N_i(x,n)$ кількість цифр $i \in \{0,1\}$ у двійковому зображенні числа x до n-го місця включно, тобто

$$N_i(x,n) = \#\{k : \alpha_k(x) = i, k \leq n\}.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = \nu_i(x),$$

то вона називається частотою цифри i у двійковому зображенні числа x.

Число називається нормальним за основою 2, якщо для кожного $i \in \{0,1\}$ частота цифри i існує і дорівнює $\frac{1}{2}$.

За теоремою Бореля, майже всі в смислі міри Лебега числа з відрізку $[0;1]$ є нормальними за основою 2, тобто міра Лебега множини нормальних за основою 2 чисел з відрізку $[0;1]$ дорівнює 1.

Множина розв'язків рівняння $\nu_i(x) = kx$ в трійковій системі числення розглядалася в роботах **[1]**, **[2]**. Множина розв'язків рівняння $\nu_i(x) = x$ в двійковій системі числення розглядалася в роботі **[3]**.

1. Процедура CTF та властивості множини розв'язків рівняння $\nu_0(x) = f(x)$ в двійковій системі числення

Нехай неперервна строго зростаюча функція $f(x)$ визначена на проміжку $[u;v] \subset [0;1]$ причому $0 \leq f(u) < f(v) \leq 1$, тоді будемо казати, що функція $f(x)$ задовольняє властивість 1.

Нехай неперервна строго спадаюча функція $f(x)$ визначена на проміжку $[u;v] \subset [0;1]$ причому $0 \leq f(v) < f(u) \leq 1$, тоді будемо казати, що функція $f(x)$ задовольняє властивість 2.

Нехай $X_i(f)$ множина чисел x, які задовольняють рівність $\nu_i(x) = f(x)$.

Розглянемо процедуру CTF(i) (closer to the frequency — наближуючий до частоти) для функції $f(x)$, яка задовольняє властивість 1.

Нехай заданий набір u чисел $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_m$ кожне з яких набуває значення 0 або 1, причому серед них p цифр i. На набір u накладемо обмеження :

$$\Delta_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)} > u, \tag{1}$$

$$\Delta_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(1)} < v\,. \tag{2}$$

Нехай $i' = 1 - i$. Побудуємо число

$$x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u)} = \Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \underbrace{ii\ldots i}_{a_1}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_1}\underbrace{ii\ldots i}_{a_2}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_2}\ldots\underbrace{ii\ldots i}_{a_n}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_n}\ldots}$$

за наступним правилом: після цифри α_m будемо дописувати цифру i до того першого моменту коли

$\dfrac{p+a_1}{m+a_1} > f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)}\right)$ (тобто $\frac{a_1-1+p}{m+a_1-1} \leq f(\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)})$),

потім будемо дописувати цифру i' до першого моменту коли

$$\frac{a_1+p}{m+a_1+b_1} < f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \underbrace{ii\ldots i}_{a_1}(0)}\right) (\text{ тобто } \tfrac{a_1+p}{m+a_1+b_1-1} \geq f(\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \underbrace{ii\ldots i}_{a_1}(0)})), \ \ldots,$$

після серії з b_{n-1} цифр i' дописуємо цифру i до першого моменту коли

$$\frac{p+a_1+\ldots+a_n}{m+a_1+b_1+\ldots+a_{n-1}+b_{n-1}+a_n} > f\left(\Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m \underbrace{i\ldots i}_{a_1}\underbrace{i'\ldots i'}_{b_1}\underbrace{i\ldots i}_{a_2}\underbrace{i'\ldots i'}_{b_2}\ldots\underbrace{i\ldots i}_{a_{n-1}}\underbrace{i'\ldots i'}_{b_{n-1}}(0)}\right)$$

(тобто дописування $a_n - 1$ цифр i ще не достатньо для виконання останньої нерівності), далі після вище вказаної серії з a_n цифр i дописуємо цифри i' до першого моменту коли

$$\frac{p+a_1+\ldots+a_n}{m+a_1+b_1+\ldots+a_{n-1}+b_{n-1}+a_n+b_n} < f\left(\Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m \underbrace{i\ldots i}_{a_1}\underbrace{i'\ldots i'}_{b_1}\ldots\underbrace{i\ldots i}_{a_{n-1}}\underbrace{i'\ldots i'}_{b_{n-1}}(0)}\right) \text{ і т. д..}$$

Словесно дану побудову можна описати наступним чином, після серії цифр i' ми дописуємо цифри i до першого моменту поки весь запис (мається на увазі всі цифри записані після коми) не буде містити l знаків, причому відношення кількості цифр i (включаючи записані) серед цих l знаків до l буде строго більше ніж значення функції f від числа, що має двійковий запис представлений всіма l знаками записаними до цього (мається на увазі, що після l знаків стоїть період (0)), далі ми дописуємо цифри i' до першого моменту поки весь запис (мається на увазі всі цифри записані після коми) не буде містити w знаків, причому відношення кількості цифр i серед цих w знаків до w буде строго менше ніж значення функції f від числа, що має двійковий запис представлений всіма l знаками записаними до цього (тобто всіма знаками записаними до серії цифр i', які ми почали дописувати). Даний процес можливий, адже дописування великої кількості цифр i після деякого місця наближає частоту цифри i цього числа до 1, а дописування великої кількості цифр i' після деякого місця наближає частоту цифри i цього числа до 0, також важливо те, що функція $f(x)$ зростаюча. Зрозуміло, що даний процес послідовного дописування нулів та одиничок нескінчений.

Лема 1. **[3]** *Нехай*

$$\underbrace{j_0j_0\ldots j_0}_{a_1}\underbrace{j_1j_1\ldots j_1}_{b_1}\underbrace{j_0j_0\ldots j_0}_{a_2}\underbrace{j_1j_1\ldots j_1}_{b_2}\cdots\underbrace{j_0j_0\ldots j_0}_{a_n}\underbrace{j_1j_1\ldots j_1}_{b_n}\cdots$$

послідовність складена з символів j_0 та j_1.

Якщо виконуються умови

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_{n-1}+b_{n-1}+a_n}=\lambda,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_{n-1}+b_{n-1}+a_n+b_n}=\lambda,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{j_0}(x,n)}{n}=\lambda,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{N_{j_1}(x,n)}{n}=1-\lambda,$$

де $N_{j_i}(x,n)$, $(i\in 0;1)$ — кількість символів j_i серед перших n символів послідовності.

Теорема 1. *Для функції f, яка задовольняє властивість 1 виконується умова: $x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u)}\in X_i(f)$ для довільного набору u, який задовольняє нерівності* (1),(2) .

Доведення. .

Лема 2. *Нехай α,β,γ додатні числа, причому $\dfrac{\alpha}{\beta}\le\gamma$, а x — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність $\dfrac{x+\alpha}{x+\beta}>\gamma$, тоді $x=\left[\dfrac{\gamma\beta-\alpha}{1-\gamma}\right]+1$.*

Доведення. $\dfrac{x+\alpha}{x+\beta}>\gamma\Rightarrow x+\alpha>\gamma(x+\beta)\Rightarrow x>\dfrac{\gamma\beta-\alpha}{1-\gamma}\Rightarrow x=\left[\dfrac{\gamma\beta-\alpha}{1-\gamma}\right]+1$. Лему доведено. □

Лема 3. *Нехай ψ,λ,μ додатні числа, причому $\dfrac{\psi}{\lambda}\ge\mu$, а x — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність $\dfrac{\psi}{x+\lambda}<\mu$, тоді $x=\left[\dfrac{\psi}{\mu}-\lambda\right]+1$.*

Доведення. $\dfrac{\psi}{x+\lambda}<\mu\Rightarrow\psi<\mu(x+\lambda)\Rightarrow x>\dfrac{\psi}{\mu}-\lambda\Rightarrow x=\left[\dfrac{\psi}{\mu}-\lambda\right]+1$. Лему доведено. □

Для спрощення записів вважатимемо

$$S_{(b_{n-1})}=\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\underbrace{ii\ldots i}_{a_1}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_1}\underbrace{ii\ldots i}_{a_2}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_2}\cdots\underbrace{ii\ldots i}_{a_{n-1}}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b_{n-1}}(0)}.$$

Лема 4. *Для кожного натурального $n \geq 2$,виконуються рівності*

$$a_n = \left[\frac{(m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})f(S_{(b_{n-1})}) - (p + a_1 + ... + a_{n-1})}{1 - f(S_{(b_{n-1})})}\right] + 1,$$

$$b_n = \left[\frac{p + a_1 + a_2 + ... + a_n}{f(S_{(b_{n-1})})} - (m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n)\right] + 1.$$

Доведення. Зрозуміло, що a_n найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$\frac{p + a_1 + ... + a_n}{m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n} > f\left(\Delta^2_{\alpha_1...\alpha_m \underbrace{i...i}_{a_1}\underbrace{i'...i'}_{b_1}\underbrace{i...i}_{a_2}\underbrace{i'...i'}_{b_2}...\underbrace{i...i}_{a_{n-1}}\underbrace{i'...i'}_{b_{n-1}}(0)}\right),$$

тобто нерівність $\frac{x+\alpha}{x+\beta} > \gamma$, де

$$\alpha = p + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}, \beta = m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1},$$

$$\gamma = f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m \underbrace{ii...i}_{a_1}\underbrace{i'i'...i'}_{b_1}\underbrace{ii...i}_{a_2}\underbrace{i'i'...i'}_{b_2}...\underbrace{ii...i}_{a_{n-1}}\underbrace{i'i'...i'}_{b_{n-1}}(0)}\right), \text{ причому}$$

$\frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma$ за умовою побудови, тому за лемою 2

$$a_n = \left[\frac{\gamma\beta - \alpha}{1 - \gamma}\right] + 1 =$$

$$= \left[\frac{(m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})f(S_{(b_{n-1})}) - (p + a_1 + ... + a_{n-1})}{1 - f(S_{(b_{n-1})})}\right] + 1.$$

Зрозуміло, що b_n найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$\frac{p + a_1 + ... + a_n}{m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n} < f\left(\Delta^2_{\alpha_1...\alpha_m \underbrace{i...i}_{a_1}\underbrace{1...1}_{b_1}...\underbrace{i...i}_{a_{n-1}}\underbrace{1...1}_{b_{n-1}}(0)}\right),$$

тобто нерівність $\frac{\psi}{x+\lambda} < \mu$, де

$$\psi = p + a_1 + a_2 + ... + a_n, \lambda = m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n,$$

$$\mu = f\left(\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m \underbrace{ii...i}_{a_1}\underbrace{i'i'...i'}_{b_1}\underbrace{i'i'...i'}_{a_2}\underbrace{i'i'...i'}_{b_2}...\underbrace{ii...i}_{a_{n-1}}\underbrace{11...1}_{b_{n-1}}(0)}\right), \text{ причому}$$

$\frac{\psi}{\lambda} \geq \mu$ за умовою побудови, тому за лемою 4

$$b_n = \left[\frac{\psi}{\mu} - \lambda\right] + 1 = \left[\frac{p + a_1 + ... + a_n}{f(S_{(b_{n-1})})} - (m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})\right] + 1.$$

Лему доведено. □

Враховуючи лему 4 , маємо:

$$a_n = \left[\frac{(m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})f(S_{(b_{n-1})}) - (p + a_1 + ... + a_{n-1})}{1 - f(S_{(b_{n-1})}})\right] + 1,$$

$$b_n = \left[\frac{p + a_1 + ... + a_n}{f(S_{(b_{n-1})})} - (m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n)\right] + 1.$$

Позначимо

$$g_n = \frac{(m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})f(S_{(b_{n-1})}) - (p + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})}{1 - f(S_{(b_{n-1})})},$$

$$h_n = \frac{p + a_1 + a_2 + ... + a_n}{f(S_{(b_{n-1})})} - (m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n).$$

Тоді

$$\frac{b_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{h_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} + \frac{-\{h_n\} + 1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} =$$

$$= \frac{\frac{p}{a_1+a_2+...+a_n} + 1}{f(S_{(b_{n-1})})} - \left(\frac{m}{a_1 + a_2 + ... + a_n} + \frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{a_1 + a_2 + ... + a_n} + 1\right) + \frac{-\{h_n\} + 1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Звідки

$$\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{\frac{p}{a_1+a_2+...+a_n} + 1}{f(S_{(b_{n-1})})} - \left(\frac{m}{a_1 + a_2 + ... + a_n} + 1\right) + \frac{-\{h_n\} + 1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Оскільки $a_n \geq 1, \forall n \geq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{(b_{n-1})} = x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)}$, та $\{h_n\} \in [0; 1)$, то з останньої рівності, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{1}{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})} - 1. \tag{3}$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p + a_1 + a_2 + ... + a_n}{m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p}{a_1+a_2+...+a_n} + 1}{\frac{m}{a_1+a_2+...+a_n} + 1 + \frac{b_1+b_2+...+b_n}{a_1+a_2+...+a_n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})} - 1} = f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)}).$$

З рівності (3) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = \frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}. \tag{4}$$

Оскільки за лемою 4

$$a_n = \left[\frac{(m + a_1 + b_1 + ... + a_{n-1} + b_{n-1})f(S_{(b_{n-1})}) - (p + a_1 + ... + a_{n-1})}{1 - f(S_{(b_{n-1})})}\right] + 1$$

то,

$$\frac{a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}} = \frac{g_n}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}} + \frac{-\{g_n\} + 1}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}$$
$$= \frac{f(S_{(b_{n-1})})}{1 - f(S_{(b_{n-1})})}\left(\frac{m}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}} + \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}} + 1\right) -$$
$$-\frac{1}{1 - f(S_{(b_{n-1})})}\left(\frac{p}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}} + \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}\right) + \frac{-\{g_n\} + 1}{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}.$$

Оскільки $b_n \geq 1, \forall n \geq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{(b_{n-1})} = x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)}$, $\{g_n\} \in [0; 1)$, то враховуючи рівність (4), отримаємо :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_1 + ... + b_{n-1}} = \frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(k;u)})}\left(\frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})} + 1\right) - \frac{1}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}\frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})} = 0.$$

Звідки враховуючи рівність (4), маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + ... + a_n}{b_1 + ... + b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{b_1 + ... + b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_1 + ... + b_{n-1}}\right) = \frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(k;u)})}{1 - f(x^{\text{ctf(i)}}_{(k;u)})}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p + a_1 + a_2 + ... + a_n}{m + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p}{b_1+b_2+...+b_{n-1}} + \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_{n-1}}}{\frac{m}{b_1+b_2+...+b_{n-1}} + 1 + \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_{n-1}}} = \frac{\frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1-f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}}{1 + \frac{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})}{1-f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})})} = f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)}).$$

Враховуючи лему 1 отримаємо $\nu_i(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)}) = f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)})$. Теорему доведено. □

Теорема 2. *Для функції $f(x)$, яка задовольняє властивість 1 множина $X_i(f)$ є всюди щільною на відрізку $[u; v]$.*

Доведення. Для довільного відрізка $[a; b] \subset [u; v]$, де $(0 \leq a < b \leq 1)$ знайдеться двійковий циліндр $[\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(0)}; \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(0)} + \frac{1}{2^m}]$, який є підмножиною $[a; b]$, але $x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)} \in [\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(0)}; \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(0)} + \frac{1}{2^m}]$, де $u = (\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_m)$, причому за теоремою 1 число $x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u)} \in X_i(f)$, що і доводить потрібне твердження. □

Теорема 3. *Для функції $f(x)$, яка задовольняє властивість 1 множина $X_i(f)$ континуальна.*

Доведення. Розглянемо наступний корекційний варіант процедури CTF. Нехай заданий набір u чисел $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_m$ кожне з яких набуває значення 0 або 1, причому серед них p цифр i та виконуються нерівності (1) та (2).

Нехай c_n послідовність, для якої $c_n = 0 \vee 1, \forall n \in N$. Побудуємо число $x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(k;u;\{c_n\})}$ за наступним правилом: після запису серії з a_n цифр i по процедурі CTF ми дописуємо ще c_n цифр i і далі продовжується процедура CTF, тобто якщо $c_n = 1$, то після серії з a_n цифр i по процедурі CTF дописується ще одна цифра i, якщо ж $c_n = 0$ то після серії з a_n цифр i нічого не дописується і просто продовжується процедура CTF. Переконаємося в коректності вище вказаної процедури. Нехай на певному кроці, після того як було дописано цифри i по процедурі CTF отримали число t в якого r знаків після коми, а далі йде період (0), причому серед r знаків знаходиться s цифр i, тоді $t < \dfrac{s}{r} < 1$, тому $\dfrac{s+1}{r+1} - \dfrac{s}{r} = \dfrac{r(s+1) - s(r+1)}{r(r+1)} = \dfrac{r-s}{r(r+1)} > 0$, адже $r > s$, звідки $\dfrac{s+1}{r+1} > t$ тобто після того як була дописана зайва цифра i частка цифр i вже серед $r+1$ знаків після коми все рівно більша ніж t, тому далі можливе дописування цифр i' по процедурі CTF. Отже, коректність побудови числа зрозуміла.

Лема 5. *Якщо,* $x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} = x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c'_n\})}$, *то* $c_n \equiv c'_n$.

Доведення. Враховуючи лему 4, легко бачити, що

$$x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \underbrace{ii\ldots i}_{a'_1}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b'_1}\underbrace{ii\ldots i}_{a'_2}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b'_2}\ldots\underbrace{ii\ldots i}_{a'_n}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b'_n}\ldots},$$

$$x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c'_n\})} = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \underbrace{ii\ldots i}_{a''_1}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b''_1}\underbrace{ii\ldots i}_{a''_2}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b''_2}\ldots\underbrace{ii\ldots i}_{a''_n}\underbrace{i'i'\ldots i'}_{b''_n}\ldots},$$

де

$$a'_n = \left[\frac{(m + a'_1 + b'_1 + \ldots + a'_{n-1} + b'_{n-1})f(S_{(b'_{n-1})}) - (p + a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{n-1})}{1 - f(S_{(b'_{n-1})})}\right] + 1 + c_n,$$

$$b'_n = \left[\frac{p + a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n}{f(S_{(b'_{n-1})})} - (m + a'_1 + b'_1 + \ldots + a'_{n-1} + b'_{n-1} + a'_n)\right] + 1,$$

$$a''_n = \left[\frac{(m + a''_1 + b''_1 + \ldots + a''_{n-1} + b''_{n-1})f(S_{(b''_{n-1})}) - (p + a''_1 + a''_2 + \ldots + a''_{n-1})}{1 - f(S_{(b''_{n-1})})}\right] + 1 + c'_n,$$

$$b''_n = \left[\frac{p + a''_1 + a''_2 + \ldots + a''_n}{f(S_{(b''_{n-1})})} - (m + a''_1 + b''_1 + \ldots + a''_{n-1} + b''_{n-1} + a''_n)\right] + 1.$$

Якщо послідовності c_n та c'_n не тотожні, то існує номер $j \in N : c_n = c'_n, \forall n \in \{1, 2, ..., j-1\}, c_j \neq c'_j$. Враховуючи вище вказані формули, легко бачити, що $a'_n = a''_n, b'_n = b''_n, \forall n \in \{1, 2, ..., j-1\}, a'_j \neq a''_j$, звідки $x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} \neq x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c'_n\})}$. $\square$

Лема 6. *Якщо функція $f(x)$ задовольняє властивість 1, то $x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} \in X_i(f)$ для довільної послідовності c_n.*

Доведення. Нехай $x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m \underbrace{ii...i}_{a'_1}\underbrace{i'i'...i'}_{b'_1}\underbrace{ii...i}_{a'_2}\underbrace{i'i'...i'}_{b'_2}...\underbrace{ii...i}_{a'_n}\underbrace{i'i'...i'}_{b'_n}...}$.

Оскільки для кожного натурального $n \geq 2$, виконуються рівності

$$a'_n = \left[\frac{(m + a'_1 + b'_1 + ... + a'_{n-1} + b'_{n-1})f(S_{(b'_{n-1})}) - (p + a'_1 + a'_2 + ... + a'_{n-1})}{1 - f(S_{(b'_{n-1})})}\right] + 1 + c_n,$$

$$b'_n = \left[\frac{p + a'_1 + a'_2 + ... + a'_n}{f(S_{(b'_{n-1})})} - (m + a'_1 + b'_1 + ... + a'_{n-1} + b'_{n-1} + a'_n)\right] + 1,$$

то позначивши

$$g'_n = \frac{(m + a'_1 + b'_1 + ... + a'_{n-1} + b'_{n-1})f(S_{(b'_{n-1})}) - (p + a'_1 + a'_2 + ... + a'_{n-1})}{1 - f(S_{(b'_{n-1})})},$$

$$h'_n = \frac{p + a'_1 + a'_2 + ... + a'_n}{f(S_{(b'_{n-1})})} - (m + a'_1 + b'_1 + ... + a'_{n-1} + b'_{n-1} + a'_n),$$

отримаємо

$$\frac{b'_n}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} = \frac{h'_n}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} + \frac{-\{h'_n\} + 1}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} =$$

$$= \frac{\frac{p}{a'_1+a'_2+...+a'_n} + 1}{f(S_{(b'_{n-1})})} - \left(\frac{m}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} + \frac{b'_1 + b'_2 + ... + b'_{n-1}}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} + 1\right) + \frac{-\{h'_n\} + 1}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n}.$$

Звідки

$$\frac{b'_1 + b'_2 + ... + b'_{n-1} + b'_n}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} = \frac{\frac{p}{a'_1+a'_2+...+a'_n} + 1}{f(S_{(b'_{n-1})})} - \left(\frac{m}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} + 1\right) + \frac{-\{h'_n\} + 1}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n}.$$

Оскільки $a'_n \geq 1, \forall n \geq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{(b'_{n-1})} = x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}$, та $\{h'_n\} \in [0; 1)$, то з останньої рівності, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b'_1 + b'_2 + ... + b'_n}{a'_1 + a'_2 + ... + a'_n} = \frac{1}{f(x^{\text{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})} - 1. \tag{5}$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p + a'_1 + a'_2 + ... + a'_n}{m + a'_1 + b'_1 + a'_2 + b'_2 + ... + a'_{n-1} + b'_{n-1} + a'_n + b'_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p}{a'_1+a'_2+...+a'_n}+1}{\frac{m}{a'_1+a'_2+...+a'_n}+1+\frac{b'_1+b'_2+...+b'_n}{a'_1+a'_2+...+a'_n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}-1}=f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}).$$

З рівності (5) випливає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a'_1+a'_2+...+a'_n}{b'_1+b'_2+...+b'_n}=\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}. \tag{6}$$

Оскільки

$$a'_n=\left[\frac{(m+a'_1+b'_1+...+a'_{n-1}+b'_{n-1})f(S_{(b'_{n-1})})-(p+a'_1+a'_2+...+a'_{n-1})}{1-f(S_{(b'_{n-1})})}\right]+1+c_n$$

то,

$$\frac{a'_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}=\frac{g_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+\frac{-\{g_n\}+1+c_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}=$$

$$=\frac{f(S_{(b'_{n-1})})}{1-f(S_{(b'_{n-1})})}\left(\frac{m}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+\frac{a'_1+a'_2+...+a'_{n-1}}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+1\right)-$$

$$-\frac{p}{1-f(S_{(b'_{n-1})})}\left(\frac{p}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+\frac{a'_1+a'_2+...+a'_{n-1}}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}\right)+\frac{-\{g'_n\}+1+c_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}.$$

Оскільки $b'_n\geq 1,\forall n\geq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{(b'_{n-1})}=x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}$, $\{g'_n\}\in[0;1)$, то враховуючи рівність (6), отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a'_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}=$$

$$=\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}}\left(\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}+1\right)-\frac{1}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}\frac{f(x^{\mathrm{ctf(0)}}_{(f;u;\{c_n\})}}{1-fx^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}}=0.$$

Звідки враховуючи рівність (6) , маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a'_1+...+a'_n}{b'_1+...+b'_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a'_1+...+a'_{n-1}}{b'_1+...+b'_{n-1}}+\frac{a'_n}{b'_1+...+b'_{n-1}}\right)=\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p+a'_1+a'_2+...+a'_n}{m+a'_1+b'_1+a'_2+b'_2+...+a'_{n-1}+b'_{n-1}+a'_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+\frac{a'_1+a'_2+...+a'_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}}{\frac{m}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}+1+\frac{a'_1+a'_2+...+a'_n}{b'_1+b'_2+...+b'_{n-1}}}=\frac{\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}}{1+\frac{f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}{1-f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})})}}=f(x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}).$$

Враховуючи лему 1 отримаємо, що $x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}\in X_i(f)$.

$\square$

Нехай $X^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}$ — множина чисел $x^{\mathrm{ctf(i)}}_{(k;u;\{c_n\})}$ для всеможливих послідовностей c_n, A — множина точок відрізка $[0;1]$. Враховуючи леми 5, 6 маємо: $X^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})} \subset X_i(f) \subset A$, де множини A та $X^{\mathrm{ctf(i)}}_{(f;u;\{c_n\})}$ є континуальними, тому за теоремою Кантора–Бернштейна $X_i(f)$ — континуальна множина. □

Література

[1] *Котова.О.В.* Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Укр.мат.журн. — 2005, №6. — С.255–260.

[2] *Котова О.В.* Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Науковий часопис НПУ. імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ. імені М.П. Драгоманова.— 2006, №7. — С.152-159.

[3] *Працьовитий М.В., Макарчук О.П., Карпенко О.В.* Про множину інваріантних точок функції частоти у двійковій системі зображення дійсних чисел //Науковий часопис НПУ. імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки.–2010, №11.–С.182-199.

[4] *Мельничук Ю.В* О представлении действительных чисел быстро сходящимися рядами // Цепные дроби и их применения. — Киев: Ин-т математики АН УССР. 1976. — С.77–78.

[5] *Постников А.Г* Вероятностная теория чисел.— Москва: Знание, 1974.— 62с.

[6] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296с.

[7] *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев: Наук.думка, 1992. — 2008с.

[8] *Торбін.Г.М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання.— Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. Драгоманова. — 1998, №1. — С.53–55.

References

[1] Kotova O., *Ukrain. Mat. Zh.*, 2005, **6**, pp. 255 – 260.

[2] Kotova O., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2006, **7**, pp. 152 – 159.

[3] Pratsiovytyi M., Makarchuk O., Karpenko O., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2010, **11**, pp. 182 – 199.

[4] Melnychuk Yu., *Tcepnye drobi i ih primeneniya (Continued fractions and applications)*, 1976, pp. 77 – 78.

[5] Postnikov A., *Veroyatnostnaya teoriya chisel (Probabilistic number theory)*, 1974, 62 p.

[6] Pratsiovytyi M., *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, 1998, 296 p.

[7] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, 1992, 208 p.

[8] Torbin G., *Fraktalnyi analiz ta sumizhni pytannya (Fractal analysis and related questions)*, 1998, **1**, pp. 53 – 55.