Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 261–270.

Лінійні системи диференціальних рівнянь з параметром та іррегулярною особливою точкою

О. В. Чорненька

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Анотація. Побудовано асимптотичні розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь з параметром та іррегулярною особливою точкою. Розглянуто випадок, коли головна матриця має кратне власне значення, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Запропоновано алгоритм дослідження при $n = 2$.

Ключові слова: асимптотичний розв'язок, лінійна система диференціальних рівнянь, диференціальне рівняння з параметром, диференціальне рівняння з іррегулярною особливою точкою.

Linear systems of differential equations with the parameter and the irregular singular point

O. V. Chornenkay,

Nizhyn Mykola Gogol State University

Abstract. The asymptotic solutions of the linear system of differential equations with the parameter and the irregular singular point are constructed. The case when the main matrix has the multiple eigenvalue which corresponds to elementary divisor with the same multipleness is considered. The algorithm of constructing when $n = 2$ is proposed.

AMS Subject Classifications (2010): 34A30

Key words: differential equation with the parameter, differential equations with the irregular singular point, linear system of differential equations, asymptotic solution.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x, \varepsilon) z \tag{1}$$

з іррегулярною особливою точкою $x = \infty$, де $z(x, \varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, ε — малий комплексний параметр: $\varepsilon \in \pi_\varepsilon = \{0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \gamma \le \arg \varepsilon \le \delta\}$, x — комплексна змінна: $x \in S = \{|x| \ge a, \alpha \le \arg x \le \beta\}$, h і g — натуральні числа; $A(x, \varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, яка в областях S та π_ε допускає асимптотичне розвинення

E-mail:elenagolovch@rambler.ru

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x^{-s} A_{sk}. \tag{2}$$

Вперше системи лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у випадку іррегулярної особливої точки вивчались М. А. Сотніченком та С. Ф. Фещенком [1]. Зокрема, їм вдалося розв'язати задачу про асимптотичне розщеплення (1) на підсистеми меншої розмірності. Ці результати не дозволяли отримати вигляд їх розв'язків, але стимулювали проведення подальших досліджень сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.

В роботі [2] досліджено питання побудови асимптотики загального розв'язку системи (1) у випадку простого спектра граничної матриці. Було встановлено, що розв'язки таких систем можна побудувати у вигляді, знайденому Біркгофом, але відповідні розвинення необхідно вести у вигляді подвійних розвинень за цілими степенями незалежної змінної та параметра.

Більш складним виявився випадок кратного спектра граничного оператора. В роботах [3–7] встановлено, що при наявності кратних коренів у відповідного характеристичного рівняння розв'язки системи (1) можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної та параметра. Для цих розв'язків виведено рівняння розгалуження, до дослідження якого застосовано просторовий аналог діаграм Ньютона [8, 9]. Це дало можливість встановити залежність структури відповідних формальних розвинень від поведінки збурювальних матриць.

В даній статті вивчається питання про побудову асимптотичних розв'язків системи (1) у випадку, коли матриця $A(x,\varepsilon)$ має вигляд

$$A(x,\varepsilon) = A_{00} + \varepsilon x^{-1} A_{11}, \tag{3}$$

а гранична матриця A_{00} має n-кратне власне значення λ_0, якому відповідає один елементарний дільник такої самої кратності.

Слід відмітити, що такий випадок кратного спектра за умови, коли матриця $A(x,\varepsilon)$ задається розвиненням (2), досить детально досліджено в роботах [3–5]. Основні результати цих досліджень застосуємо до розв'язання поставленої задачі.

Розв'язок системи (1), (3) будемо шукати у вигляді вектора

$$z(x,\varepsilon) = v(x,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{x_0}^{x} x^g\left(\lambda_0 + \lambda(x,\varepsilon)\right)dx\right), \tag{4}$$

де $v(x,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор,$\lambda(x,\varepsilon)$ — скалярна функція, які необхідно визначити.

Для знаходження функції $\lambda(x,\varepsilon)$ використаємо виведене в [3] рівняння розгалуження. Враховуючи, що ненульовими є лише матриці A_{00} та A_{11}, то рівняння розгалуження ((16), [3], с. 73) має вигляд

$$\lambda^n+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1}\lambda^k\varepsilon^{j-k}x^{-(j-k)}L_{k,j-k,j-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=h+1}^{\infty}\sum_{r=g+2}^{\infty}\lambda^k\varepsilon^s x^{-r}L_{krs}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k x^{-k}L_{0kk}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=g+k+1}^{\infty}\sum_{s=h+k}^{\infty}\varepsilon^s x^{-r}L_{0rs}+\sum_{k=1}^{n-1}D^{n-k}\left[\lambda^k\right]\varepsilon^{(n-k)h}x^{-(n-k)g}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=h}^{\infty}\sum_{r=g}^{\infty}\varepsilon^s x^{-r}L_{krs}\left[\lambda^k\right]=0, \tag{5}$$

коефіцієнти якого визначаються наступним чином

$$L_{k,j-k,j-k}=(-1)^{k+j}\left(\widetilde{P}_{k,j-k}\left(H,HA_{11}\right)\varphi,\psi\right), \tag{6}$$

$$L_{krs}=\sum_{j=3}^{k+2}(-1)^{k+j}\big(\widetilde{R}^{s-ph}_{p+k,r-p(g+1)}\left(H,HA_{11}\right)\varphi,\psi\big), p=\big\{\frac{s-j+k+1}{h}=\frac{r-j+k}{g}\in\mathcal{N}\big\}, \tag{7}$$

$$L_{0rs}=(-1)^{k}\left(\widetilde{R}^{s-ph}_{p,r-p(g+1)}\left(H,HA_{11}\right)\varphi,\psi\right), p=\left\{\frac{s-k+1}{h}=\frac{r-k}{g}\in\mathcal{N}\right\}, \tag{8}$$

$$L_{0kk}=(-1)^{k}\left(\widetilde{P}_{0k}\left(H,HA_{11}\right)\varphi,\psi\right), \tag{9}$$

$$L_{krs}\left[\lambda^k\right]=\sum_{i=1}^{\{[\frac{s}{h}]=[\frac{r}{g}]\}}(-1)^{k+i+j}D^i\left[\lambda^k\right]\Big(\Big(\delta_{i,\{[\frac{s}{h}]=[\frac{r}{g}]\}}\widetilde{P}_{k+i,k-i-j}\left(H,HA_{11}\right)+$$
$$+\widetilde{R}^{s-(p+i)h}_{p+k+i,r-(p+i)(g+1)}\left(H,HA_{11}\right)\Big)\varphi,\psi\Big), \tag{10}$$
$$p=\left\{\frac{s-j+k+i+1-ih}{h}=\frac{r-j+k+i-ig}{g}\in\mathcal{N}\right\}.$$

У наведених вище формулах символом $(\quad,\quad)$ позначено скалярний добуток у n-вимірному унітарному просторі, $\left[\frac{r}{g}\right]$ — ціла частина відношення $\frac{r}{g}$.

φ — фіксований власний вектор матриці A_{00}, що відповідає її n-кратному власному значенню λ_0.

Вектор ψ — елемент нуль-простору матриці $(A_{00}-\lambda_0 E)^*$, спряженої з $A_{00}-\lambda_0 E$, для визначення якого має виконуватись рівність

$$\left(H^{i-1}\varphi,\psi\right)=\delta_{i,n}, \tag{11}$$

де H — напівобернена матриця до матриці $A_{00} - \lambda_0 E$,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Використовуючи символіку [10], виразом $P_{i,j}\left(H, HA_{11}\right)$ позначено суми всіх можливих добутків i множників H та j множників HA_{11}, що задовольняють співвідношення

$$P_{i,j}\left(H, HA_{11}\right) = H \cdot P_{i-1,j}\left(H, HA_{11}\right) + HA_{11} \cdot P_{i,j-1}\left(H, HA_{11}\right),$$
$$P_{i,j}\left(H, HA_{11}\right) = H\widetilde{P}_{i,j}\left(H, HA_{11}\right).$$

Крім того, якщо i або j – від'ємні числа, або $j = 0$, то $P_{i,j}\left(H, HA_{11}\right) = 0$.

Вираз $R^{s-ph}_{p+k,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right)$ — це сума добутків $p+k$ множників H та $r-p(g+1)$ множників HA_{11}, що визначаються за рекурентними формулами

$p = 1$

$$R^{s-h}_{k+1,r-(g+1)}\left(H, HA_{11}\right) = \left(1 - \delta_{k,0}\right) H \cdot R^{s-h}_{k,r-(g+1)}\left(H, HA_{11}\right) +$$

$$HA_{11} \cdot R^{s-h-1}_{k+1,r-(g+1)-1}\left(H, HA_{11}\right) + (r-g-1)H \cdot P_{k,r-(g+1)}\left(H, HA_{11}\right),$$

$p \geq 2$

$$R^{s-ph}_{k+p,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right) = \left(1 - \delta_{k,0}\right) H \cdot R^{s-ph}_{k+p-1,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right) +$$

$$HA_{11} \cdot R^{s-ph-1}_{k+p,r-p(g+1)-1}\left(H, HA_{11}\right) + (r-g-1)H \cdot R^{s-ph}_{k+p,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right).$$

Крім того має місце рівність

$$R^{s-ph}_{p+k,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right) = H \cdot \widetilde{R}^{s-ph}_{p+k,r-p(g+1)}\left(H, HA_{11}\right).$$

Символом $D^i\left[\lambda^k\right]$ позначено суму всіх можливих добутків i операторів $D_s = \left(D - sgx^{-1}\right)$ та k множників λ, останнім множником у всіх доданках має бути λ [11], наприклад

$$D^1\left[\lambda\right] = D\lambda = D\lambda_0,$$
$$D^2\left[\lambda\right] = \left(D - gx^{-1}\right) D\lambda = D_1 D^1\left[\lambda\right],$$
$$D\left[\lambda^2\right] = D\lambda^2 + \lambda D\lambda = D_0\lambda^2 + \lambda D^1\left[\lambda\right],$$
$$D^2\left[\lambda^2\right] = D_1 D^1 \lambda^2 + \lambda D^2\left[\lambda\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^i\left[\lambda^k\right] = D_{i-1} D^{i-1} \lambda^k + \lambda D^i\left[\lambda^{k-1}\right].$$

Щоб знайти вигляд розвинення функції $\lambda(x,\varepsilon)$ необхідно проаналізувати коефіцієнти $L_{krs}\left[\lambda^k\right]$ рівняння (5) та застосувати просторовий аналог діаграм Ньютона [8, 9].

Проведемо детальне дослідження на прикладі системи другого порядку, при $n = 2$.

Припустимо, що головна матриця системи (1) має канонічну форму $A_{00} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, власному значенню λ_0 відповідає власний вектор $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а матриця $A_{11} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

Знайдемо напівобернену матрицю H до матриці $(A_{00}-\lambda_0 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ранг якої дорівнює 1. Відповідно до теорії [10, с. 18-21], матрицями перестановок будуть матриці $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді $X = P\left(A_{00}-\lambda_0 E\right)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$H = QXP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи умову (11), приєднаний вектор $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналіз коефіцієнтів розпочнемо з виразів (9), а саме

$$L_{011} = (-A_{11}\varphi, \psi) = -\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -b.$$

1. Якщо $b \neq 0$, то згідно теорії [8] просторові діаграми Ньютона будуються наступним чином: у просторі $Okrs$ позначаємо точку з координатами $(0,1,1)$ та знаходимо її проекції в площинах Okr та Oks відповідно. Кожну з одержаних точок $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ з'єднуємо з $(2,0,0)$. Отримані відрізки є діаграмами D_1 та D_2 (рис. 1). У даному випадку кожна з діаграм має стандартний вигляд і складається з однієї ланки, кутовий коефіцієнт якої з від'ємним напрямом осі Ok дорівнює $\frac{1}{2}$.

Отже, для скалярних функцій $\lambda_{1,2}(x,\varepsilon)$ та векторів $v_{1,2}(x,\varepsilon)$ мають місце розвинення

$$\lambda_{1,2}(x,\varepsilon) = \lambda_{00}^{(1,2)} + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^{\frac{s}{2}} x^{\frac{-r}{2}} \lambda_{rs}^{(1,2)},$$

$$v_{1,2}(x,\varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^{\frac{s}{2}} x^{\frac{-r}{2}} v_{rs}^{(1,2)},$$

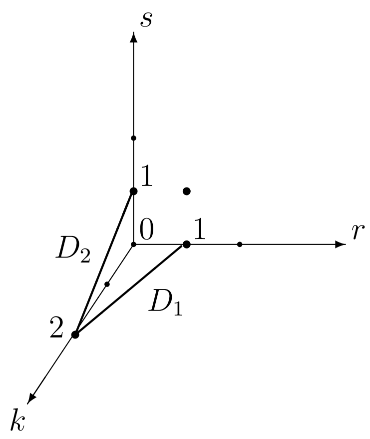

Рис. 1

визначальне рівняння запишеться у вигляді

$$\lambda_{00}^2 + L_{011} = 0, \qquad \lambda_{00}^2 = b.$$

2. Якщо $b = 0$, то $A_{11} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ і відповідно $L_{011} = 0$. Використовуючи формули (6), (9), знайдемо коефіцієнти L_{022} та L_{111}

$$L_{022} = (A_{11}HA_{11}\varphi, \psi) = ad \neq 0,$$
$$L_{111} = -(HA_{11}\varphi, \psi) = -(a + d) \neq 0.$$

Просторові діаграми в цьому випадку мають вигляд, поданий на рис. 2.

Діаграма D_2 має стандартний вигляд і складається з двох ланок, які утворюють з від'ємним напрямом осі $0k$ кут $45°$. Діаграма D_1 складається з двох ланок, кутовий коефіцієнт кожної з яких дорівнює 1.

Отже, скалярну функцію $\lambda(x, \varepsilon)$ та вектор $v(x, \varepsilon)$ слід шукати у вигляді подвійних розвинень за цілими степенями і параметра, і незалежної змінної

$$\lambda_{1,2}(x, \varepsilon) = \lambda_{00}^{(1,2)} + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} \lambda_{rs}^{(1,2)}, \tag{12}$$

$$v_{1,2}(x, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} v_{rs}^{(1,2)}. \tag{13}$$

Визначальне рівняння має вигляд

$$\lambda_{00}^2 + L_{111}\lambda_{00} + L_{022} = 0,$$
$$\lambda_{00}^2 - (a + d)\lambda_{00} + ad = 0. \tag{14}$$

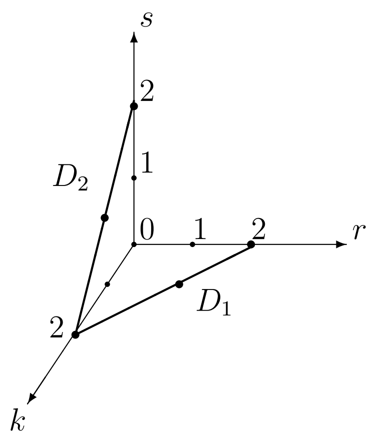

Рис. 2

Тоді за теоремою Вієта маємо

$$\lambda_{00}^{(1)} = a, \qquad \lambda_{00}^{(2)} = d.$$

Якщо $a = d \neq 0$, то рівняння (14) матиме кратний корінь

$$\lambda_{00}^2 - 2a\lambda_{00} + a^2 = 0, \quad \lambda_{00}^{(1)} = \lambda_{00}^{(2)} = a.$$

У цьому випадку щоб встановити вигляд функції $\lambda(x, \varepsilon)$, потрібно в рівнянні (5) зробити заміну

$$\lambda(x, \varepsilon) = \lambda_{00}\varepsilon x^{-1} + \eta(x, \varepsilon),$$

де $\eta(x, \varepsilon)$ — шукана функція. В результаті матимемо нове рівняння розгалуження відносно функції $\eta(x, \varepsilon)$, дослідження якого проводиться за наведеним алгоритмом.

3. Якщо $b = 0$, $L_{111} = 0$, $d = -a \neq 0$ і $L_{022} = -a^2$, то $A_{11} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Відповідні просторові діаграми матимуть вигляд, поданий на рис. 2. У цьому випадку і D_1, і D_2 мають стандартний вигляд і складаються з двох вузлів (точок на координатних осях) та однієї ланки (кутовий коефіцієнт кожної дорівнює 1). Для визначення функцій $\lambda(x, \varepsilon)$ та вектора $v(x, \varepsilon)$ мають місце формули (12), (13). Проте визначальне рівняння запишеться у вигляді

$$\lambda_{00}^2 + L_{022} = 0, \qquad \lambda_{00}^2 - a^2 = 0.$$

4. Якщо $b = 0$, $d = 0$, а $a \neq 0$, то $A_{11} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. У цьому випадку $L_{0kk} = 0, k \geq 1$, $L_{111} = -a$. Застосовуючи формули (8), знайдемо коефіцієнти L_{0rs} при $r = g + 2$, $s = h + 1$

$$L_{0,g+2,h+1} = -(HA_{11}\varphi, \psi) = -a.$$

Проаналізуємо відповідні діаграми, подані на рис. 3.

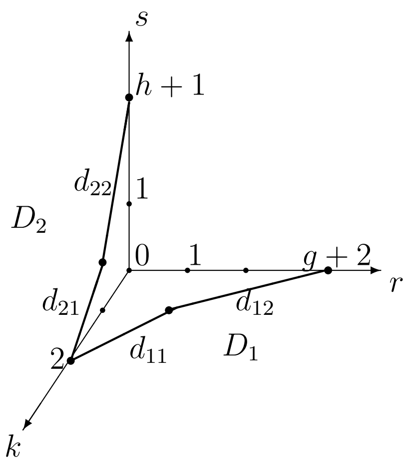

Рис. 3

У цьому випадку і D_1, і D_2 мають стандартний вигляд і складаються з двох ланок та трьох вузлів. Для кожного з відрізків d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} знайдемо k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} — кутові коефіцієнти нахилу відповідних ланок з від'ємним напрямом осі Ok. Отже, $k_{11} = 1$, $k_{12} = g + 1$, $k_{21} = 1$, $k_{11} = h$.

Функції $\lambda(x, \varepsilon)$ та вектори $v(x, \varepsilon)$ мають розвинення

$$\lambda_1(x,\varepsilon) = \lambda_{00}^{(1)} + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} \lambda_{rs}^{(1)}, \quad v_1(x,\varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} v_{rs}^{(1)},$$

$$\lambda_2(x,\varepsilon) = \lambda_{00}^{(2)} + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^{sh} x^{-r(g+1)} \lambda_{rs}^{(2)}, \quad v_2(x,\varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^{sh} x^{-r(g+1)} v_{rs}^{(2)}.$$

Числа $\lambda_{00}^{(1)}$, $\lambda_{00}^{(2)}$ можна знайти з відповідних визначальних рівнянь

$$\lambda_{00}^2 + L_{111}\lambda_{00} = 0, \quad L_{111}\lambda_{00} + L_{0,g+2,h+1} = 0.$$

5. Якщо $b = 0$, $a = 0$, а $d \neq 0$, то $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$. У цьому випадку коефіцієнти $L_{0kk} = 0, k \geq 1$, $L_{0rs} = 0$ при $r \geq g+2$, $s \geq h+1$, $L_{111} = -d$.

Просторові діаграми подано на рис. 4. D_1, і D_2 мають стандартний вигляд і складаються з двох вузлів та однієї ланки, кутовий коефіцієнт кожної дорівнює 1. У цьому випадку система (1), (3) має лише один ненульовий розв'язок, і $\lambda(x,\varepsilon)$ та $v(x,\varepsilon)$ визначаються наступним чином

$$\lambda(x,\varepsilon) = \lambda_{00} + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} \lambda_{rs}, \quad v(x,\varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s\geq 1} \varepsilon^s x^{-r} v_{rs},$$

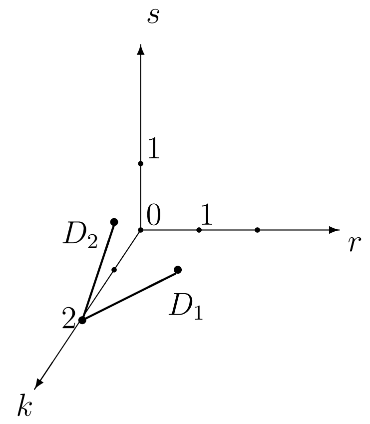

Рис. 4

визначальне рівняння має запис

$$\lambda_{00}^2 + L_{111}\lambda_{00} = 0.$$

Щоб обчислити інші коефіцієнти λ_{rs}, v_{rs} знайдених розвинень, необхідно підставити вектор (4) в систему (1), враховуючи структуру подвійних рядів для функції $\lambda(x,\varepsilon)$ і вектора $v(x,\varepsilon)$, та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях параметра і незалежної змінної.

Література

[1] *Сотниченко Н. А.* Асимптотическое интегрированние дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. - К., 1980. - 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).

[2] *Давидюк Г. П.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 /Давидюк Галина Павловна. - К., 1983. - 136 с.

[3] *Головченко О. В.* Побудова загального розв'язку сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / О. В. Головченко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1 "Фізико-математичні науки". - 2007. - Вип. 8. - С. 66-81.

[4] *Головченко О. В.* Побудова розв'язків лінійних систем з особливою точкою та параметром / О. В. Головченко, В. П. Яковець // Труды ИПММ НАН Украины. - 2007. - № 15. - С. 40-49.

[5] *Яковец В.П.* Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. - 2009. - Т. 12, № 3. - С. 417-432.

[6] *Яковец В.П.* Побудова асимптотичних розв'язків сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою у випадку кратного спектра граничної матриці / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. - 2008. - Т. 11, № 1. - С. 128-144.

[7] *Головченко Е. В.* 8. Головченко Е. В. Асимптотический анализ линейной системы дифференциальных уравнений с особой точкой / Е. В. Головченко // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна -2008. - Воронеж : ВорГУ, 2008. - С. 79-87.

[8] *Яковец В.П.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малими параметрами / В. П. Яковец. - К., 1992. - 52 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т. Математики; 92.34).

[9] *Айзенгендлер П. Г.* Метод диаграм Ньютона для уравнений с несколькими малыми параметрами и его приложения / П. Г. Айзенгендлер. - Псков, 1989. - 52 с. - Деп. в ВИНИТИ 30.10.1989, № 6852-89.

[10] *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

[11] *Яковец В.П.* Побудова загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. А. Шепель // Нелінійні коливання - 2002. - Т. 5 - № 4. - С. 562-577.