Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 229–242.

УДК 519.21

Асимптотичні властивості перетворення Фур'є–Стілт'єса деяких класів нескінченних згорток Бернуллі

Л. О. Сінельник,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова; Інститут математики НАН України

Анотація. Робота присвячена дослідженню асимптотики характеристичних функцій нескінченних згорток Бернуллі, тобто розподілів в.в. виду $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних в.в., які набувають значень -1 та 1, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно збігається. Особлива увага приділена дослідженню двох класів таких розподілів. Перше сімейство породжується рядами, що $|a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k}$. Друге сімейство є однопараметричним континуальним сімейством.

Ключові слова: перетворення Фур'є–Стіл'єса, згортка Бернуллі, сингулярна міра, модуль характеристичної функції, розмірність Хаусдорфа–Безиковича.

Asymptotic properties of Fourier–Stieltjes transforms for some classes of infinite Bernoulli convolutions

L. Sinelnyk,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. The paper is devoted to the study of asymptotic properties of the characteristic functions of infinite Bernoulli convolutions, i.e., probability distributions of r.v. $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, where $\{\xi_k\}$ is a sequence of i.r.v. taking values -1 and 1, and the series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges absolutely. A special attention is paid to the investigation of two families of such distributions. The first family is generated by series such that $|a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k}$. The second family is a parametrised family of singular measures.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

Key words: Bernoulli convolutions, singular measure, Fourier–Stieltjes transform, Hausdorff dimension, fractals.

E-mail: sinelnyklilia@ukr.net, torbin@iam.uni-bonn.de

Вступ

Нехай ξ — випадкова величина, μ_ξ — відповідна їй ймовірнісна міра, $F_\xi(x)$ — відповідна функція розподілу. Нагадаємо, що перетворенням Фур'є–Стілт'єса міри μ_ξ (характеристичною функцією випадкової величини ξ) називається функція

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} \left(F_\xi(x)\right) = M\left(e^{it\xi}\right).$$

Якщо μ_ξ — абсолютно неперервна ймовірнісна міра, то

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} F'_\xi(x) dx$$

є класичним перетворенням Фур'є міри μ_ξ.

Характеристичні функції є потужним інструментом вивчення властивостей ймовірнісних розподілів. Зокрема за асимптотичними властивостями модуля характеристичної функції можна судити про тип функції розподілу.

Нагадаємо, що будь-яка функція розподілу може бути єдиним чином представлена у виді:

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \tag{1}$$

де $F_d(x)$ — дискретна, $F_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна, $F_s(x)$ — сингулярно неперервна функції розподілу, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Функція розподілу називається чистою, якщо один із коефіцієнтів в розкладі (1) дорівнює 1. Нехай $L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)|$.

Відомо [**8**], що якщо $\alpha_1 = 1$, тобто $f_\xi(t)$ є характеристичною функцією чисто дискретного розподілу, то $L_\xi = 1$.

Якщо $\alpha_2 = 1$, то $f_\xi(t)$ відповідає деякому абсолютно неперервному розподілу. З леми Рімана–Лебега слідує, що $\lim\limits_{t\to\infty} f_\xi(t) = 0$.

Якщо $\alpha_3 = 1$, то $f_\xi(t)$ — характеристична функція сингулярного розподілу. Тоді $f_\xi(t)$ не обов'язково прямує до нуля при $|t| \to \infty$. І величина L_ξ може бути будь-яким числом з $[0, 1]$.

Таким чином, поведінка характеристичної функції на нескінченності дозволяє говорити про структуру відповідної функції розподілу.

Розглянемо розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{2}$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно; $\{a_k\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ абсолютно збігається. Функція розподілу такої випадкової величини називається нескінченною згорткою Бернуллі.

Цей об'єкт інтенсивно досліджується, починаючи з 30-х рр. XX століття [**9**]. Його вивчали, використовуючи різні підходи, Джессен і Вінтнер [**6**], Кершнер, Ердеш [**3**], Кахане і Салем , Гарсіа [**4**], Перес і Солом'як [**10, 11**], Альбеверіо [**1**], Працьовитий [**2, 5**], Торбін [**1, 2, 5**], Гончаренко [**5**] та ін.

З теореми Джессена–Вінтнера [**6**] випливає, що ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) або чисто сингулярно неперервний). Теорема П. Леві [**7**] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра μ_ξ дискретна тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\{p_{0k},p_{1k}\}>0$.

У симетричному випадку $p_{0k}=p_{1k}=\frac{1}{2}$, коли $a_k=\lambda^k$, де $\lambda\in(0,1)$ тип розподілу випадкової величини в залежності від λ досліджувався в роботах [**3, 4, 9, 10, 12**].

При $\lambda\in(0,\frac{1}{2})$ спектр S_ξ — ніде не щільна множина нульової міри Лебега, і тому ймовірнісна міра μ_ξ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Якщо $\lambda=\frac{1}{2}$, то ймовірнісна міра μ_ξ має абсолютно неперервний розподіл.

Якщо $\lambda\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, то структура розподілу випадкової величини ξ дуже складна. Спектром S_ξ у цьому випадку буде відрізок $\left[\frac{-\lambda}{1-\lambda},\frac{\lambda}{1-\lambda}\right]$. Тому деякий час існувала гіпотеза про абсолютну неперервність ймовірнісної міри μ_ξ.

Нехай $S_\perp$ — множина таких $\lambda\in(\frac{1}{2},1)$ для яких випадкова величина ξ має сингулярний розподіл і $S_\ll$ — множина таких $\lambda\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ яких розподіл ξ є абсолютно неперервним.

Користуючись методом характеристичних функцій, у 1939 р. П. Ердеш [**3**] довів, що для тих значень $\lambda\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, при яких $\frac{1}{\lambda}$ є числом Пізо, має місце нерівність $L_\xi>0$, і, отже, випадкова величина ξ має сингулярний розподіл. На сьогоднішній день невідомі приклади інших значень $\lambda\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ при яких ймовірнісна міра μ_ξ є сингулярною.

В 1940 р. Ердеш довів існування числа a незалежного від λ такого, що майже всі λ з $(0,1)$ належать до $S_\ll$. В 1962 р. Гарсіа [**4**] дав найбільш точний з існуючих до сьогодні опис множини $S_\ll$. Він сформулював гіпотезу: майже всі $\lambda\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ належать $S_\ll$. Це твердження довів Б. Солом'як [**12**] в 1995 р., більш просте доведення цього факту дано Ю. Пересом та Б. Солом'яком [**10**]. В [**11**] більш загальна несиметрична модель була розглянута Ю. Пересом і Б. Солом'яком: якщо ξ_k приймають значення та з ймовірностями p і $1-p$ відповідно $\left(p\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right)$, то майже всі λ з проміжку $\left(\frac{1}{2},1\right)$ належать множині $S_\ll$.

Цікавими є дослідження асимптотики модуля характеристичної функції $|f_\xi(t)|$, як для випадку $a_k=\lambda^k$, так і для загального випадку послідовності $\{a_k\}$.

Зокрема, П. Ердеш [**3**] показав, що серед всіх раціональних значень λ величина $L_\xi > 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$.

Для характеристичної функції випадкової величини (2) справедлива наступна лема:

Лема 1. *Для характеристичної функції випадкової величини (2):*

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)}.$$

Доведення. Характеристична функція випадкової величини (2) має вигляд:

$$f_\xi(t) = M\left(e^{it\xi}\right) = Me^{it\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\xi_k} = \prod_{k=1}^{\infty} Me^{it\xi a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t).$$

Розглянемо $f_k(t)$:

$$f_k(t) = Me^{it\xi_k a_k} = p_{0k}e^{-a_k it} + p_{1k}e^{a_k it} =$$
$$= p_{0k}\cos(a_k t) - p_{0k}i\sin(a_k t) + p_{1k}i\cos(a_k t) + p_{1k}i\sin(a_k t) =$$
$$= (p_{0k} + p_{1k})\cos(a_k t) + i(p_{1k} - p_{0k})\sin(a_k t) = \cos(a_k t) + i(p_{1k} - p_{0k})\sin(a_k t).$$

Тоді модуль характеристичної функції $f_k(t)$:

$$|f_k(t)| = \sqrt{\cos^2(a_k t) + (p_{1k}^2 - 2p_{0k}p_{1k} + p_{0k}^2)\sin^2(a_k t)} =$$
$$= \sqrt{\cos^2(a_k t) + \sin^2(a_k t) - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)} = \sqrt{1 - 4p_{1k}p_{0k}\sin^2(a_k t)}.$$

Таким чином

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)}.$$

□

Основним завданням даної роботи є дослідження двох класів нескінченних згорток Бернуллі.

Перше сімейство породжується рядами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ такими, що $|a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \dots c_k}$, де $c_j \in N$, $c_j \geq 2, j = \overline{1,k}$ і містить, як часткові випадки, нескінченні згортки Бернуллі, що породжені рядами Остроградського–Серпінського–Пірса [**2**], рядами Кантора та їх знакозмінними модифікаціями.

Для розподілів випадкових величин виду (2) досліджено асимптотичну поведінку величини $L_\xi = \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)|$ і показано, зокрема, $L_\xi = 1$ випадку необмеженості послідовності $\{c_k\}$.

Ці результати є, з одного боку, узагальненням результатів П. Ердеша по класичним згорткам Бернуллі, а з іншого боку є узагальненнями результатів роботи [**2**].

Це дає можливість будувати ймовірнісні розподіли, спектри яких мають довільну наперед задану розмірність Хаусдорфа–Безиковича, але при цьому $L_\xi = 1$.

Друге сімейство згорток Бернуллі є однопараметричним континуальним сімейством (як і класичні згортки, для яких $a_k = \lambda^k$) і для кожного значення параметра, що належить континуальній ніде не щільній множині, відповідна величина L_ξ дорівнює 1 (для класичних згорток Бернуллі множина тих значень параметра λ, для яких міра μ_ξ не є мірою Райхмана (тобто $L_\xi > 0$), є зчисленною). Дослідженню цього феномену і присвячена третя частина роботи.

1. Про асимптотичні властивості перетворення Фур'є–Стілт'єса нескінченних згорток Бернуллі. I

Розглянемо випадок, коли в (2)

$$|a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k},$$

де $c_j \in N$, $c_j \geqslant 2, j = \overline{1,k}$. Для такого випадку справедливими є наступні теореми:

Теорема 1. *Нехай послідовність $\{c_k\}$ — необмежена, тоді $L_\xi = 1$.*

Доведення. Оскільки послідовність $\{c_k\}$ необмежена, то існує така підпослідовність $\{c_{k_p}\}$ така, що $c_{k_p} \geq 2^p$, $\forall p \in N$. Нехай $f_\xi(t)$ характеристична функція випадкової величини ξ. За лемою:

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)}, \qquad \text{де} \qquad |a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k}.$$

Оскільки $0 \leq p_{0k}p_{1k} \leq \frac{1}{4}$, то:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sin^2(a_k t)\right).$$

Виберемо підпослідовність $t_p = \pi \cdot c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_{k_p - 1}$. Тоді:

$$|f_\xi(t_p)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi \cdot c_1 \cdot \ldots \cdot c_{k_p-1}}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_k}\right) =$$

$$= \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(k_p - 1)} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{c_{k_p}}\right) \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{c_{k_p} c_{k_p+1}}\right) \cdot \ldots \geq$$

$$\geq \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^p}\right) \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^p \cdot 2}\right) \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^p \cdot 2^2}\right) \cdot \ldots =$$

$$= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^{p+k}}\right) = \prod_{s=p}^{\infty} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^s}\right) = \varphi(p) < 1.$$

Нагадаємо, що якщо нескінченний добуток $\prod\limits_{k=2}^{\infty} p_k \quad (p_k \neq 0)$ збігається, то $\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k \to 1 \quad (n \to \infty)$. Розглянемо нескінченний добуток $\prod\limits_{s=2}^{\infty}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{2^s}\right)$, який є збіжним. Тому $\prod\limits_{s=p}^{\infty}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{2^s}\right) \to 1$ (при $p \to \infty$). Таким чином, $|f_\xi(t_p)| \geq \varphi(p)$ і $\varphi(p) \to 1$. Отже, $|f_\xi(t_p)| \to 1$ при $p \to \infty$.

З того, що $|f_\xi(t_p)| \to 1$ і $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| \geq \lim\limits_{p\to\infty} |f_\xi(t_p)|$ випливає, що $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| = 1$, тобто $L_\xi = 1$. □

Наслідок 1. *Якщо послідовність $\{c_k\}$ необмежена і $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} = 0$, то ймовірнісна міра μ_ξ є сингулярно неперервною.*

Теорема 2. *Якщо серед членів послідовності $\{c_k\}$ є безліч чисел, які більші за* 2, *то $L_\xi > 0$.*

Доведення. Нехай $\{c_{k_p}\}$ — підпослідовність послідовності $\{c_k\}$, така що $c_{k_p} \geq 3$ для довільного натурального p.

Нехай $f_\xi(t)$ — характеристична функція випадкової величини ξ. За лемою 1:

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)}, \qquad \text{де} \qquad |a_k| = \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k}.$$

Таким чином,

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)) \geq \prod_{k=1}^{\infty}(1-\sin^2(a_k t)) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2(a_k t) = \varphi_\xi(t).$$

Розглянемо

$$|\varphi_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos^2\left(\frac{t}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_k}\right)\right| = \left|\cos^2\frac{t}{c_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\cos^2\frac{t}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_k}\right| \cdot \ldots .$$

Виберемо підпослідовність $t_p = \pi \cdot c_1 c_2 \ldots c_{k_p - 1}$. Тоді

$$|\varphi_\xi(t_p)| = \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos^2\left(\frac{\pi \cdot c_1 c_2 \ldots c_{k_p-1}}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_k}\right)\right| =$$

$$= \left|\cos^2(\pi \cdot c_2 c_3 \ldots c_{k_p-1})\right| \cdot \left|\cos^2(\pi \cdot c_3 c_4 \ldots c_{k_p-1})\right| \cdot \ldots \cdot \left|\cos^2(\pi c_{k_p-1})\right| \times$$

$$\times \left|\cos^2\pi\right| \cdot \left|\cos^2\frac{\pi}{c_{k_p}}\right| \cdot \left|\cos^2\frac{\pi}{c_{k_p}c_{k_p+1}}\right| \cdot \ldots =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \prod_{l=0}^{\infty}\cos^2\left(\frac{\pi}{c_{k_p}c_{k_p+1} \cdot \ldots \cdot c_{k_p+l}}\right).$$

Оскільки $c_{k_p} \geq 3$, то

$$\prod_{l=0}^{\infty} \cos^2 \left(\frac{\pi}{c_{k_p} c_{k_p+1} \cdot \ldots \cdot c_{k_p+l}} \right) \geq \cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^2} \cdot \ldots \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^l} \cdot \ldots =$$

$$= \prod_{l=0}^{\infty} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^l} \right) \geq c_0 > 0,$$

бо $\prod\limits_{l=0}^{\infty} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^l} \right) = \prod\limits_{l=0}^{\infty} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^l} \right) \geq \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2}{(3 \cdot 2^l)^2} \right)$, і ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} (\frac{\pi}{3 \cdot 2^l})^2$ збігається.

Таким чином

$$|\varphi_\xi(t_p)| \geq c_0 > 0. \tag{3}$$

Легко бачити, що

$$\varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) \geq \varlimsup_{p \to \infty} \varphi(t_p). \tag{4}$$

З нерівностей (3) та (4) випливає, що $\varlimsup\limits_{t \to \infty} \varphi(t) \geq \varlimsup\limits_{p \to \infty} \varphi(t_p) \geq c_0 > 0$.

Оскільки $L_\xi := \varlimsup\limits_{|t| \to \infty} |f_\xi(t)| \geq \varlimsup\limits_{t \to \infty} \varphi(t)$ і $\varlimsup\limits_{t \to \infty} \varphi(t) > 0$, то $L_\xi > 0$. □

Виникає запитання: чи буде справедливим твердження, обернене до теореми 1? Тобто, «Якщо $L_\xi = 1$, то послідовність $\{c_k\}$ — необмежена». Розглянемо контрприклад, який демонструє хибність оберненого твердження.

Нехай $c_k = 2$, $\forall k \in N$, $p_{0k} = \frac{1}{2^k}$, $p_{1k} = 1 - \frac{1}{2^k}$. Тоді

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) > 0,$$

звідки випливає, що ξ має дискретний розподіл. Отже, $L_\xi = 1$.

Також неправильним буде і твердження обернене до теореми 2: «Якщо $L_\xi > 0$, то серед членів послідовності $\{c_k\}$ є безліч більших за 2». Наведений контрприклад ілюструє, що для послідовності $\{c_k\}$, де $c_k = 2$, $\forall k \in N$, $L_\xi = 1 > 0$.

Зауваження 1. *Якщо послідовність є стаціонарною, то теорема 2 співпадає з результатом П. Ердеша. Тому теорему 2 можна вважати узагальненням результату П. Ердеша, який показав, що для всіх раціональних значень* λ *величина* $L_\xi > 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots \right\}$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови для того, щоб $L_\xi = 0$ для симетричного випадку $p_{0k} = p_{1k}$.

Теорема 3. *Нехай* $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$, $\forall k \geq k_0$, $k \in N$. *Тоді* $L_\xi := \varlimsup\limits_{|t| \to \infty} |f_\xi(t)| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли в послідовності* $\{c_k\}$, $c_k = 2$ *для всіх достатньо великих* k.

Доведення. *Достатність*. Нехай $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$, $\forall k \geq k_0$, $k \in N$. Доведемо, що з умови $L_\xi = 0$ випливає, що $c_k = 2$, $\forall k \geq k_0$.

Припустимо супротивне. Нехай в послідовності $\{c_k\}$ є безліч чисел, які більші за 2. Тоді за теоремою 2 $L_\xi > 0$, що суперечить припущенню.

Необхідність. Нехай $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$, $\forall k \geq k_0$, $k \in N$. Доведемо, що якщо в послідовності $\{c_k\}$ $c_k = 2$ для всіх достатньо великих k, то $L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| = 0$.

Представимо випадкову величину ξ у вигляді $\xi = \eta_1 + \eta_2$, де

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{\xi_k}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_k}, \qquad \eta_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi_{k_0+l}}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_{k_0-1} \cdot 2^{l+1}}.$$

Розлянемо випадкову величину η_2

$$\eta_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi_{k_0+l}}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_{k_0-1} \cdot 2^{l+1}} = \frac{1}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_{k_0-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l}{2^{l+1}}, \qquad \text{де} \quad \varphi_l = \xi_{k_0+l}.$$

Випадкова величина η_2 має рівномірний розподіл. Оскільки випадкова величина ξ представлена як сума двох незалежних випадкових величин, одна з яких абсолютно неперервна, то ξ теж є абсолютно неперервною випадковою величиною, а звідси випливає, що $L_\xi = 0$. $\square$

2. Про асимптотичні властивості перетворення Фур'є–Стілт'єса нескінченних згорток Бернуллі. II

Нехай

$$A = \left\{n : n = 2^{k+1} - 1 \text{ або } n = 2^{k+1}, k \in N\right\} = \{3, 4, 7, 8, \ldots, 2^{k+1} - 1, 2^{k+1}, \ldots\} \subset N.$$

Розглянемо множину дійсних чисел

$$L = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k} \right\},$$

де $\alpha_k(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad k \notin A; \\ 0 \quad \text{або} \quad 1, \quad \text{якщо} \quad k \in A. \end{cases}$

Тобто кожне число x з множини L має двійковий запис

$$x = 0,00\alpha_3\alpha_4 00\alpha_7\alpha_8 000000\alpha_{15}\alpha_{16}\ldots, \quad \text{де} \quad \alpha_{2^{k+1}-1}, \alpha_{2^{k+1}} \in \{0, 1\}.$$

Зрозуміло, що множина L має потужність континуум.

Нехай L^* — множина, яка утворена з L шляхом вилучення зчисленної множини точок, які мають нуль в періоді.

Нехай a довільне число з множини L^*. Тоді фіксованому числу

$$a = 0,00\alpha_3\alpha_4 00\alpha_7\alpha_8 000000\alpha_{15}\alpha_{16}\ldots 0\ldots 0\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}} 0\ldots 0\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\ldots$$

поставимо у відповідність наступну числову послідовність:

$$a_1 = 0,000000\alpha_7\alpha_8 000000\alpha_{15}\alpha_{16}\ldots;$$

$$a_2 = 0,00000000000000\alpha_{15}\alpha_{16}\ldots;$$

$$\ldots$$

$$a_n = \frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}}.$$

Очевидно, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Нехай ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Розглянемо випадкову величину $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$.

Теорема 4. *Для довільного вибору числа a з множини L^* величина $L_\xi = 1$.*

Доведення. Нехай

$$a = 0,00\alpha_3\alpha_4 00\alpha_7\alpha_8 000000\alpha_{15}\alpha_{16}\ldots 0\ldots 0\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}0\ldots \in L^*.$$

Поставимо у відповідність числу a послідовність $\{a_n\}$, $a_n = \frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}}$.

Як і в попередньому випадку нескладно показати, що

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\sin^2(a_k t)\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2(a_k t).$$

Виберемо підпослідовність $t_n = l_n\cdot\pi$, де $l_n = 2^{2^n}$. Тоді

$$t_n\cdot a_1 = \pi\cdot[l_n a_1] + \pi\cdot 0,\underbrace{00\ldots 0}_{2^{n+1}-2}\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\ldots;$$

$$\ldots$$

$$t_n\cdot a_{n-1} = \pi\cdot[l_n a_{n-1}] + \pi\cdot 0,\underbrace{00\ldots 0}_{2^{n+1}-2}\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\ldots;$$

$$t_n\cdot a_n = \pi\cdot 2^{2^n}\cdot\frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}} = \pi\cdot\frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^n}} < \frac{\pi}{2^{2^n}};$$

$$\ldots$$

$$t_n\cdot a_{n+k} = \pi\cdot 2^{2^n}\cdot\frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+k+1}}\right\}}{2^{2^{n+k+1}}} < \frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}, \forall k\geq 0.$$

Оскільки $\{t_n a_1\} = \ldots = \{t_n a_{n-1}\}$, то

$$\cos^2(t_n a_1) = \ldots = \cos^2(t_n a_{n-1}) = \cos^2\left(\pi\cdot 0,\underbrace{00\ldots 0\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}}_{2^{n+1}}\ldots\right) \geq$$

$$\geq \cos^2\left(\pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots01}_{2^{n+1}-2}\right) = 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+1}-2}}\right)^2 \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n}}\right)^2, \forall n \in N.$$

Таким чином, $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \cos^2(t_n a_k) \geq \left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n}}\right)^2\right)^{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$.

Крім того,

$$\cos^2(t_n a_n) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n}}\right)^2;$$

$$\ldots$$

$$\cos^2(t_n a_{n+k}) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}\right)^2, \ \forall k \geq 0.$$

Оцінимо нескінченний добуток

$$\prod_{k=n}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \geq \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}\right)^2\right) = \prod_{s=n}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^s}}\right)^2\right) = P_{n-1}.$$

З цією метою розглянемо нескінченний добуток

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^k}}\right)^2\right). \tag{5}$$

Такий добуток збігається, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{2^{2^k}})^2$.

Тому $(n-1)$-й залишок добутку (5) прямує до 1. З іншого боку $(n-1)$-й залишок добутку (5) співпадає з P_{n-1}. Тому $P_{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$.

Оскільки $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \cos^2(t_n a_k) \to 1$ і $\prod\limits_{k=n}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \to 1$ при $n \to \infty$, то

$$|f_\xi(t_n)| \geq \prod_{k=1}^{n} \cos^2(t_n a_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Легко бачити, що $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_\xi(t_n)|$. Тому $L_\xi = 1$. □

Зауваження 2. *Отримані результати дають можливість будувати сингулярно неперервні ймовірнісні розподіли, спектри яких мають довільну наперед задану розмірність Хаусдорфа–Безиковича, але при цьому $L_\xi = 1$.*

На прикладі нескінченних згорток Бернуллі з першого сімейства покажемо, що навіть у випадку $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$ для довільного числа $d \in [0, 1]$ можна вибрати послідовність $\{c_k\}$ таким чином, щоб розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра S_ξ розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{\xi_1}{c_1} + \frac{\xi_2}{c_1 c_2} + \ldots + \frac{\xi_k}{c_1 c_2 \ldots c_k} + \ldots$$

дорівнювала числу d і при цьому $L_\xi = 1$.

Оскільки у нашому випадку

$$r_k := a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots = \frac{1}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_k}\left(\frac{1}{c_{k+1}} + \frac{1}{c_{k+1}c_{k+2}} + \ldots\right) \leq \frac{1}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_k} = a_k,$$

то (див. [**1**])

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{k\ln 2}{-\ln r_k}. \tag{1}$$

I) Якщо $d = 0$, то виберемо $c_n = 2^n$, $n \in N$. При цьому

$$a_n = \frac{1}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

$$r_n = \frac{1}{c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n}\left(\frac{1}{c_{n+1}} + \frac{1}{c_{n+1}c_{n+2}} + \ldots\right) < \frac{1}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Тому

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{k\ln 2}{\ln\frac{1}{r_k}} \leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{k\ln 2}{\frac{k(k+1)}{2}\ln 2} = 0.$$

При цьому очевидно, що $L_\xi = 1$, бо $\{c_k\}$ — необмежена.

II) Якщо $d = 1$, то виберемо

$$c_n = \begin{cases} 2, & \text{якщо} \quad n \neq 10^s, s \in N; \\ s+1, & \text{якщо} \quad n = 10^s, s \in N. \end{cases}$$

Тобто, $c_{10} = 2, c_{100} = 3, \ldots, c_{10^s} = s+1$, а всі інші значення c_n дорівнюють 2. У цьому випадку

$$r_n = \frac{1}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n c_{n+1}}\left(1 + \frac{1}{c_{n+2}} + \frac{1}{c_{n+2}c_{n+3}} + \ldots\right) > \frac{1}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n c_{n+1}}.$$

Для довільного натурального числа k існує натуральне $s_0 = s_0(k)$ таке, що

$$10^{s_0-1} \leq (k+1) < 10^{s_0}.$$

Оцінимо величину r_k:

$$r_k > \frac{1}{c_1 \ldots c_k c_{k+1}} = \frac{1}{2^{(k+1)-(s_0-1)} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot s_0} = \frac{1}{2^{k-s_0+1} \cdot s_0!}.$$

Отже,

$$\frac{k\ln 2}{\ln\frac{1}{r_k}} \geq \frac{k\ln 2}{\ln\left(2^{k-s_0+1} \cdot s_0!\right)} = \frac{k\ln 2}{(k-s_0+1)\ln 2 + \ln(s_0!)}.$$

Оскільки $s_0 \leq \log_{10}(k+1) - 1$, то

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{k\ln 2}{\ln\frac{1}{r_k}} \geq 1.$$

З іншого боку, $\dim_H S_\xi \leq 1$, бо $S_\xi \subset \mathbb{R}^1$. Отже, $\dim_H S_\xi = 1$.

При цьому спектр є ніде не щільною множиною, бо умова $a_k > r_k$ виконується для всіх $k \in N$, і $L_\xi = 1$, бо послідовність $\{c_n\}$ — необмежена.

III) Нехай $d \in (0,1)$. Позначимо $A := 2^{\frac{1}{d}}$.

Оцінимо r_n

$$\frac{1}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_n c_{n+1}} < r_n < \frac{2}{c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_n c_{n+1}}.$$

Тому

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \ln c_k}{n+1} - \frac{\ln 2}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \ln \frac{1}{r_n} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \ln c_k}{n+1}.$$

Покажемо, що послідовність c_n можна вибрати такою, щоб

$$\frac{\ln c_1 + \ln c_2 + \ldots + \ln c_n}{n} \to \ln A \quad (n \to \infty),$$

і при цьому щоб мала місце рівність $L_\xi = 1$.

З цією метою побудуємо допоміжну обмежену послідовність $\{c^*_n\}$ таку, що $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln c^*_k \to \ln A$ $(n \to \infty)$.

Для вибраного числа $d \in (0,1)$ існує єдине натуральне число $m_0 = m_0(d)$ таке, що

$$m_0 \le 2^{\frac{1}{d}} < m_0 + 1.$$

Якщо $2^{\frac{1}{d}} \in N$, то покладемо $c^*_k = 2^{\frac{1}{d}} = A$.

Якщо $2^{\frac{1}{d}} \notin N$, то $\{c^*_k\}$ вибираємо за таким алгоритмом: нехай $k_1 = 1$, $c^*_{k_1} = m_0$; $c^*_{k_1+1} = c^*_{k_1+2} = \ldots = c^*_{k_1+s_1} = m_0 + 1$, де s_1 — найменше натуральне число j, для якого виконується умова

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_1+j} \ln c^*_j}{k_1 + j} \ge \ln A.$$

Покладемо $k_2 = k_1 + s_1$ і $c^*_{k_2+1} = c^*_{k_2+2} = ... = c^*_{k_2+s_2} = m_0$, де s_2 — найменше натуральне число j, для якого виконується умова

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_2+j} \ln c^*_j}{k_2 + j} < \ln A.$$

Для $n > 1$ покладаємо

$$c_{k_{2n-1}+1} = \ldots = c_{k_{2n-1}+s_{2n-1}} = m_0 + 1,$$

де s_{2n-1} — найменше натуральне число j, для якого

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_{2n-1}+j} \ln c^*_j}{k_{2n-1} + j} \ge \ln A;$$

$$k_{2n} := k_{2n-1} + s_{2n-1},$$

$$c_{k_{2n}+1} = c_{k_{2n}+2} = \ldots = c_{k_{2n}+s_{2n}} = m_0,$$

де s_{2n} — найменше натуральне число j, для якого виконується умова

$$\frac{1}{k_{2n}+j} \cdot \sum_{j=1}^{k_{2n}+j} \ln c_j^* < \ln A.$$

З побудови послідовності $\{c_k^*\}$ випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln c_j^*}{k} = \ln A.$$

На основі послідовності $\{c_k^*\}$ побудуємо послідовність $\{c_k\}$

$$c_k = \begin{cases} c_k^*, & \text{якщо} \quad k \neq 10^n, n \in N; \\ n+1, & \text{якщо} \quad k = 10^n, n \in N. \end{cases}$$

Використовуючи ті ж аргументи, що і в пункті II) нескладно показати, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln c_j = \ln A.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \ln \frac{1}{r_n} = \ln A$, і отже,

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n \ln 2}{\ln \frac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\frac{1}{n+1} \ln \frac{1}{r_n}} = d.$$

Оскільки $\{c_n\}$ — необмежена, то $L_\xi = 1$. Що і потрібно було довести.

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.*, On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions, Bull. Sci. Math. 132 (2008), no. 8, 711 – 727.

[2] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 54 (2009) no. 2, 85 – 115.

[3] *Erdos P.*, On a family of symmetric Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 61 (1939), pp. 974 – 976.

[4] *Garsia A. M.*, Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. Trans. Amer. Math. Soc., 102 (1962), 409 – 432.

[5] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.*, Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовірностей та математична статистика, 79(2008), 34 – 49.

[6] *Jessen B., Wintner A.*, Distribution function and Riemann Zeta-function. Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935) , 48 – 88 .

[7] *Levy P.* Surles series dont les termes sont des variables independantes, Studia Math. 3 (1931), 119 – 155 .

[8] *Лукач Е.*, Характеристические функции. М.: Наука, 1979. - 424 с.

[9] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.*, Sixty years of Bernoulli convolutions, Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), 39 – 65, Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel, 2000.

[10] *Peres Y., Solomyak B.*, Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof. Math. Res. Lett., 3 (1996), no.2, 231 – 239.

[11] *Peres Y., Solomyak B.*, Self-similar measures and intersections of Cantor sets. Trans.Amer.Math.Soc., 350(1998), no.10 , 4065 – 4087.

[12] *Solomyak B.*, On the random series $\sum \pm\lambda$(an Erdos problem), Ann. of Math., 142 (1995), no. 3, 611 – 625.

References

[1] Albeverio S., Torbin G., *Bull. Sci. Math.*, 132 (2008), no. 8, 711–727.

[2] Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 54 (2009) no. 2, 85-115.

[3] Erdos P., *Amer. J. Math.* 61 (1939), pp. 974 - 976.

[4] Garsia A. M., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 409-432.

[5] Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Teoriya imovirnostey ta matematychna statystyka (Theory of Probability and Mathematical Statistics)*, 79(2008), 34-49.

[6] Jessen B., Wintner A., *Trans. Amer. Math. Soc.* 38 (1935) , 48-88 .

[7] Levy P., *Studia Math.*, 3 (1931), 119- 155 .

[8] Lukacs E., *Harakteristicheskie funkcii (Characteristic functions)*, 1979, 424 p.

[9] Peres Y., Schlag W., Solomyak B., *Fractal geometry and stochastics, II* (Greifswald/Koserow, 1998), 39–65, Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel, 2000.

[10] Peres Y., Solomyak B., *Math. Res. Lett.*, 3 (1996), no.2, 231–239.

[11] Peres Y., Solomyak B., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(1998), no.10 , 4065-4087.

[12] Solomyak B., *Ann. of Math.*, 142 (1995), no. 3, 611–625.