Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).— С. 150–159.

Один випадок довірчості системи покриттів, породженої Q_∞-зображенням

Р. О. Нікіфоров,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. В [**5**] були отримані достатні умови довірчості при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича на систему покриттів, яка породжена Q_∞-зображенням. В даній роботі розглядається приклад системи Q_∞-циліндрів, для якого не виконуються умови з [**5**], але породженої системи покриттів досить для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної множини $E \subset 0,1)$.

Ключові слова: Q_∞-зображення дійсних чисел, довірчість системи покриттів, розмірність Хаусдорфа–Безиковича.

The example of faithful covering system generated by Q_∞-expansion

R. Nikiforov,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. In [**5**] the authors have proved sufficient conditions for the faithfulness of the covering systems generated by Q_∞-expansions. In this paper we will construct the example of the family of Q_∞-cylinders such that conditions from [**5**] does not hold, but this family is enough for determine the Hausdorff dimension of a set from the unit interval.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 28A78.

Key words: Q_∞-expansion of real numbers, faithfulness of covering system, Hausdorff dimension.

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є добре відомим поняттям, яке активно використовується в різних галузях математики. Задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з типових і основних задач, але

E-mail: rnikiforov@gmail.com, torbin7@gmail.com

розв'язати її зазвичай складно. Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича для множин та мір. Один з таких методів полягає у зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого вужчого, специфічного класу покриттів, з яким зручніше працювати.

Нагадаємо, що сімейство Φ підмножин з $[0,1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0,1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0,1] = \bigcup_j E_j$.

Нехай α — додатне число. α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\Phi),$$

де інфімум береться по всіх не більш як зліченних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\Phi)$ завжди існує.

$H^\alpha(E,\Phi)$ залежить від сімейства Φ. Сімейство всіх обмежених множин, сімейство всіх відкритих множин і сімейство всіх замкнених множин дають одну і ту саму α-мірну міру Хаусдорфа.

Означення 1. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi) = 0\}. \tag{1}$$

Означення 2. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на $[0,1]$, якщо при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної підмножини з $[0,1]$ можна обмежитись розглядом покриттів з Φ, тобто якщо

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset [0,1].$$

Прикладами довірчих систем покриттів можуть бути локально тонкі системи покриттів, що породжуються s-адичним представленням дійсних чисел [**1**]; системи покриттів, які породжуються Q-представленнями [**2**]; системи покриттів, що породжуються Q^*-представленнями, для яких $\inf\limits_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$ [**3**].

Наведені приклади є прикладами систем покриттів, породжених системами зображень дійсних чисел зі скінченним алфавітом.

В наших роботах [**5, 6, 7**] досліджувалися питання довірчості для систем зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом на прикладі системи циліндрів, породжених Q_∞-зображенням дійсних чисел.

Нагадаємо поняття Q_∞-розкладу дійсних чисел ([**2**]) та декілька альтернативних підходів до його означення. Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, ...)$ — нескінченний стохастичний вектор з додатніми координатами. При фіксованому векторі Q_∞ здійснюється злічення послідовність розбиттів одиничного відрізка за наведеними нижче правилами.

Крок 1. Розбиваємо множину $[0,1)$ (зліва направо) на зліченну кількість напіввідкритих відрізків $\Delta_{i_1}^{Q_\infty}$, $i_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$ виду $[a,b)$, довжини яких дорівнюють $\left|\Delta_{i_1}^{Q_\infty}\right| = q_{i_1}$,

$$[0,1) = \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \Delta_{i_1}^{Q_\infty}.$$

Кожен з $\Delta_{i_1}^{Q_\infty}$ називається циліндром 1-го рангу Q_∞-розкладу.

Крок $k \geq 2$. Кожен з циліндрів $(k-1)$-рангу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}^{Q_\infty}$ розбиваємо (зліва направо) на зліченну кількість напіввідкритих відрізків $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty}$ (без спільних точок)

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}^{Q_\infty} = \bigcup_{i_k=0}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty},$$

довжини яких

$$\left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty}\right| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{i_s} \tag{2}$$

відносяться як

$$\left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 0}^{Q_\infty}\right| : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1}^{Q_\infty}\right| : \cdots : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} m}^{Q_\infty}\right| : \cdots = q_0 : q_1 : \cdots : q_m : \cdots .$$

Кожен з $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty}$ називається циліндром k-го рангу Q_∞-розкладу.

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in \{0,1,2\ldots\}$ існує послідовність таких вкладених циліндрів

$$\Delta_{i_1}^{Q_\infty} \supset \ \Delta_{i_1 i_2}^{Q_\infty} \supset \cdots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty} \supset \cdots,$$

що $|\Delta_{i_1 \ldots i_k}^{Q_\infty}| \to 0$, $k \to \infty$. Тому існує єдина точка $x \in [0,1)$, яка належить усім цим циліндрам $\Delta_{i_1}^{Q_\infty}$, $\Delta_{i_1 i_2}^{Q_\infty}$, ..., $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{Q_\infty}, \ldots$.

І навпаки, для кожної точки $x \in [0,1)$ існує єдина (оскільки кожна точка з множини $[0,1)$ належить рівно одному циліндру n-го рангу) послідовність вкладених циліндрів $\Delta_{i_1(x)}^{Q_\infty} \supset \Delta_{i_1(x) i_2(x)}^{Q_\infty} \supset ... \supset \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)}^{Q_\infty} \supset ...$, які містять x, тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)}^{Q_\infty} =: \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}^{Q_\infty}.$$

Останній вираз називається Q_∞-розкладом точки x. Основи метричної та ймовірнісної теорії Q_∞-розкладів розвивались М. В. Працьовитим у 90-х роках XX-го століття і викладені в монографіях [**4, 2**], де і було вперше вжито термін Q_∞-представлення (зображення, розклад).

Відзначимо, що Q_∞-розклад дійсних чисел є частковим випадком так званих f-розкладів ([**8, 9**]) і породжується наступною строго зростаючою неперервною функцією f, яка визначена на $[0,+\infty)$ умовами: $f(0)=0$ і f зростає лінійно на кожному відрізку $[n,n+1]$ з $f(n+1)-f(n)=q_n$ для кожного $n\in\{0,1,2,...\}$.

Зауважимо також, що Q_∞-розклад можна означити за допомогою систем ітеруючих функцій (IFS, див. [**10, 11**]). Справді, розглянемо систему ітеруючих функцій, що породжується наступною зліченною системою стискаючих перетворень подібності:

$$F_0(x)=q_0\cdot x, F_i(x)=q_i\cdot x+(q_0+...+q_{i-1}), \quad \forall i\in N.$$

Очевидно, що множина $[0,1)$ є інваріантною відносно даної IFS, оскільки $[0,1)=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}F_i([0,1))$. При цьому для вищеозначених циліндрів Q_∞-розкладу має місце рівність: $\Delta^{Q_\infty}_{i_1i_2...i_k}=F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ...\circ F_{i_k}([0,1))$. Тому для довільного $x\in[0,1)$ існує єдина послідовність $(i_1(x),i_2(x),...,i_k(x),...)\in\{0,1,2,...\}^\infty$ така, що

$$x=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ...\circ F_{i_k}([0,1))=\Delta^{Q_\infty}_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)...}.$$

Дослідженням метричних, топологічних та фрактальних властивостей Q_∞-зображення дійсних чисел та об'єктів, з ним пов'язаних, займались М. В. Працьовитий, О. Л. Лещинський, Г. М. Торбін (див. [**12, 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19**]).

Q_∞-зображення дійсних чисел дозволяє формально просто задавати і досліджувати широкий клас одновимірних фракталів та інших об'єктів з фрактальними властивостями.

Надалі будемо використовувати позначення $\Phi=\Phi(Q_\infty)$ для сімейства всіх циліндрів Q_∞-розбиття інтервалу $[0,1)$.

В роботі [**5**] були отримані достатні умови довірчості системи Φ.

Теорема 1 ([**5**]). *Якщо існують такі числа q_* та q^*, що для всіх $i\in\mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$0<q_*\le\frac{q_i}{q_{i-1}}\le q^*<1,$$

то $\dim_H(E)=\dim_H(E,\Phi)$, $\forall E\subset[0,1)$.

В роботі [**7**] було показано, що Φ не обов'язково має бути довірчою і умова $\frac{q_i}{q_{i-1}}\le q^*<1$ є суттєвою умовою довірчості.

Теорема 2 ([7]). *Якщо існує додатне ціле число m_0 і дійсні числа A та B, що для всіх натуральних чисел i виконується нерівність*

$$\frac{A}{(i+1)^{m_0}} \leq q_i \leq \frac{B}{(i+1)^{m_0}},$$

то система покриттів породжена Q_∞-зображенням є недовірчою.

Дана робота присвячена вивченню окремого випадку порушення умови $0 < q_* \leq \frac{q_i}{q_{i-1}}$.

Теорема 3. *Нехай $q_i = \frac{A}{2^{2^i}}$, де $\frac{1}{A} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^i}}$. Тоді $\Phi(Q_\infty)$ — довірча.*

Доведення. Для визначення розмірності Хаусдорфа–Безиковича досить розглядати покриття множини інтервалами, кінці яких належать всюди щільній множині. Тому досить розглянути покриття інтервалами, кінці яких є Q_∞-раціональними точками.

Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E інтервалами (a_j, b_j), де a_j і b_j — Q_∞-раціональні точки:

$$a_j = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(a_j))\ldots\alpha_{n_j+l_j}(a_j)(0)},$$

$$b_j = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(b_j))\ldots\alpha_{n_j+g_j}(b_j)(0)}.$$

Для довільного $j \in \mathbb{N}$ існує циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}}$, який містить (a_j, b_j) і жоден з циліндрів (n_j+1)-го рангу не містить цілком E_j.

Тоді між точками a_j і b_j буде хоча б одна Q_∞-раціональна точка (n_j+1)-рангу. Найлівішу таку точку позначимо c_j.

Тоді

$$c_j = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(a_j)+1)(0)}.$$

Позначимо $\alpha_{n_j+k}(a_j) = m_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, l_j\}$.

Покриття множини E_j будемо здійснювати в два етапи: покриття (a_j, c_j) та покриття $[c_j, b_j)$. Спочатку розглянемо покриття $[c_j, b_j)$.

Якщо циліндр $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(a_j)+1)}$ цілком належить до $[c_j, b_j)$ (тобто наступна точка поділу (n_j+1)-го рангу належить до $[c_j, b_j)$), то $[c_j, b_j)$ покривається за допомогою циліндрів

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(a_j)+i)}, \quad i \in \{1, 2, 3, \ldots\},$$

які мають довжину меншу за $|E_j|$ і α-об'єм такого покриття півінтервалу $[c_j, b_j)$ дорівнює

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}}|^\alpha \cdot \left(\frac{A}{2^{2^{m_1+i}}}\right)^\alpha \leq \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^\alpha} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1+1}|^\alpha \leq \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^\alpha} |E_j|^\alpha.$$

Позначимо $C(\alpha) = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^\alpha}$.

Можлива й інша ситуація: півінтервал $[c_j, b_j)$ не містить інших точок поділу $(n_j + 1)$-го рангу, відмінних від c_j.

У цьому випадку знайдеться такий циліндр $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(\alpha_{n_j+1}(a_j)+1)\underbrace{0\ldots0}_{t_j}}$, який містить півінтервал $[c_j, b_j)$ і довжина його не перевищує $2|E_j|$. Тому α-об'єм такого покриття не перевищує $2^\alpha|E_j|^\alpha$.

Перейдемо до покриття інтервалу (a_j, c_j). Півінтервал $[a_j, c_j)$ містить циліндри наступних рангів:

$(n_j + 1)$-го рангу: $\bigcup\limits_{i=m_1+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}i}$,

$(n_j + 2)$-го рангу: $\bigcup\limits_{i=m_2+1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1 i}$,

$\vdots$

$(n_j + l_j)$-го рангу: $\bigcup\limits_{i=m_{l_j}}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1 m_2\ldots m_{l_j-1}i}$ і повністю покривається їх об'єднанням.

α-об'єм сукупності вище означених циліндрів (n_j+k)-го рангу при $k < l_j$ дорівнює

$$\sum_{i=m_k+1}^{\infty} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{k-1}i}|^\alpha \leq C(\alpha)|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{k-1}(m_k+1)}|^\alpha.$$

α-об'єм сукупності циліндрів $(n_j + l_j)$-го рангу дорівнює

$$\sum_{i=m_{l_j}}^{\infty} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{l_j-1}i}|^\alpha \leq C(\alpha)|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{l_j-1}m_{l_j}}|^\alpha.$$

Отже, $[a_j, c_j)$ можна покрити зчисленною кількістю циліндрів рангів від $(n_j + 1)$ до $(n_j + l_j)$, загальний α-об'єм яких не перевищує

$$S_j(\alpha) = C(\alpha)(|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(m_1+1)}|^\alpha + \ldots + |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{l_j-2}(m_{l_j-1}+1)}|^\alpha + \\ +|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{l_j-1}m_{l_j}}|^\alpha).$$

Якщо виконується нерівність

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_{l_j-1} > m_{l_j}, \tag{3}$$

то буде виконуватись

$$|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(m_1+1)}| < |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1(m_2+1)}| < \ldots < |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}m_1\ldots m_{l_j}}|.$$

Тому

$$
\begin{aligned}
&S_j(\alpha) \leq C(\alpha) l_j |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\alpha} = \\
&= C(\alpha) l_j |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\delta} \cdot |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\alpha-\delta} = \\
&= C(\alpha) l_j \left| \frac{A}{2^{2^{m_1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{2^{2^{m_{l_j}}}} \right|^{\delta} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}}|^{\delta} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\alpha-\delta} \leq \\
&\leq C(\alpha) l_j \Big(\big(\frac{A}{2}\big)^{l_j} \Big)^{\delta} |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\alpha-\delta}.
\end{aligned}
$$

Для фіксованого $\delta \in (0, \alpha)$ отримаємо, що $l\big(\frac{A}{2}\big)^{\delta l} \to 0$ $(l \to \infty)$.

Тому існує $n_0(\delta)$ таке, що $l\big(\frac{A}{2}\big)^{\delta l} \leq 1$ для всіх $l > n_0(\delta)$.

Отже, якщо $l_j > n_0(\delta)$, то

$$S_j(\alpha) \leq C(\alpha) |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{l_j}}|^{\alpha-\delta} \leq C(\alpha) |E|^{\alpha-\delta}.$$

Якщо $l_j \leq n_0(\delta)$, то $S_j(\alpha) \leq C(\alpha) n_0(\delta) |E_j|^{\alpha-\delta}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Якщо умова (3) порушується, то існує таке $k \in \mathbb{N}$, $k < l_j$, що

$$\begin{cases} m_1 > m_2 > \ldots > m_{k-1}, \\ m_{k-1} \leq m_k. \end{cases}$$

Тоді множину $[a_j, c_j)$ можна покрити об'єднанням вказаних вище циліндрів рангів (n_j+1), $(n_j+2), \ldots,$ (n_j+m_{k-1}), які повністю містяться в $[a_j, c_j)$ і циліндром $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{k-1} m_k}$. Останній циліндр не міститься в $[a_j, c_j)$, але його довжина не перевищує $2|E_j|$, бо

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_k}| &= |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{k-1}}| \frac{A}{2^{2^{m_k}}} \leq \\
&\leq 2 |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots (m_{k-1}+1)}|
\end{aligned}
$$

і $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots (m_{k-1}+1)} \subset [a_j, c_j)$.

У цьому випадку α-об'єм системи вказаних відрізків не перевищує

$$
\begin{aligned}
&C(\alpha)(|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j}(m_1+1)}|^{\alpha} + |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1 (m_2+1)}|^{\alpha} + \ldots + \\
&+ |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots (m_{k-1}+1)}|^{\alpha}) + |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{k-1} m_k}|^{\alpha} \leq \\
&\leq C(\alpha)(k-1) |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_j} m_1\ldots m_{k-2}(m_{k-1}+1)}|^{\alpha} + 2^{\alpha} |E_j|^{\alpha} \leq \\
&\leq C(\alpha) n_0(\delta) |E_j|^{\alpha-\delta} + 2^{\alpha} |E_j|^{\alpha-\delta} = (C(\alpha) n_0(\delta) + 2^{\alpha}) |E_j|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Отже, $\sum\limits_j S_j(\alpha) \leq (C(\alpha) n_0(\delta) + 2^{\alpha}) \sum\limits_j |E_j|^{\alpha-\delta}$.

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$, для довільного $\alpha > 0$, для довільного $\delta \in (0, \alpha)$ і для довільного покриття $\{E_j\} = \{a_j, b_j\}$ існує сукупність циліндрів різних рангів така, що вони покривають множину $(\cup_j E_j)$ і відповідний α-об'єм цього покриття циліндрами не перевищує

$$(2^\alpha + C(\alpha)n_0(\delta))\sum_j |E_j|^{\alpha-\delta} + C(\alpha)|E_j|^\alpha \leq (2^\alpha + C(\alpha)(n_0(\delta)+1))\sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Позначимо $d(\alpha) = 2^\alpha + C(\alpha)(n_0(\delta)+1)$.

Тоді $H^\alpha_{2\varepsilon}(E,\Phi) \leq d(\alpha)\sum\limits_j |E_j|^{\alpha-\delta}$ для довільних $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1]$, $\delta \in (0,\alpha)$ та довільного покриття $\{E_j\}$.

Тому $H^\alpha_{2\varepsilon}(E,\Phi) \leq d(\alpha)H^{\alpha-\delta}_\varepsilon(E)$ для довільних $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1]$, $\delta \in (0,\alpha)$.

При $\varepsilon \to 0$ отримаємо $H^\alpha(E,\Phi) \leq d(\alpha)H^{\alpha-\delta}(E)$ для довільних $\alpha \in (0,1]$ і $\delta \in (0,\alpha)$. Тому $\dim_H(E,\Phi) \leq \dim_H E + \delta$ для довільного $\delta \in (0,\alpha)$.

Отже, $\dim_H(E,\Phi) \leq \dim_H E$. □

Література

[1] *Billingsley P.* Ergodic theory and information / P. Billingsley. — New York : John Willey and Sons, 1965.

[2] *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

[3] *Albeverio S.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits / S. Albeverio, G. Torbin // *Bull. Sci. Math.* — 2005. — Vol. 129, № 4. — P. 356–367.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] *Нікіфоров Р.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами / Р. Нікіфоров, Г. Торбін // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2012. — № 86. — С. 150–162.

[6] *Нікіфоров Р. О.* Про розмірність Хаусдорфа–Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS / Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2012. — № 13 (1). — С. 151–162.

[7] *Albeverio S.* On fractal phenomena connected with infinite linear IFS and related singular probability measures // S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin // подано до друку Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.

[8] *Everett C. I.* Representations for real numbers / C. I. Everett // *Bull. Amer. math. Soc.* — 1946. — Vol. 52. — P. 861–869.

[9] *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties / A. Rényi // *Acta Math. Sci. Hungar.* — 1957. — Vol. 8. — P. 477–493.

[10] *Falconer K.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. Falconer. — New York : John Willey and Sons, 1990.

[11] *Hutchinson J. E.* Fractals and self similarity / J. E. Hutchinson // *Indiana Univ. Math. J.* — 1981. — Vol. 30. — P. 713–747.

[12] *Працьовитий М. В.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // *Доповіді НАН України.* — 1998. — Т. 4. — С. 48–54.

[13] *Торбін Г.* Критерії належності випадкової величини з незалежними Q^*-знаками до кожного з чистих типів / Г. Торбін // *Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.* — 1999. — Т. 1. — С. 152–166.

[14] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова / М. В. Працьовитий // *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* — 1998. — Т. 2. — С. 36–48.

[15] *Працьовитий М. В.* Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані / М. В. Працьовитий // *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* — 1998. — Т. 2. — С. 14–35.

[16] *Працьовитий М. В.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення / М. В. Працьовитий, О. Л. Лещинський // *Теорія ймовірностей та мат. статистика.* — 1997. — № 57. — С. 134–140.

[17] *Torbin G.* On Γ-normality and non-normality of real numbers in different systems of numeration / G. Torbin // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2005. — Т. 6. — С. 197–209.

[18] *Albeverio S.* Spectral properties of image measures under the infinite conflict interactions / S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // *Positivity.* — 2006. — Vol. 10, № 1. — P. 39–49.

[19] *Albeverio S.* On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions / S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin // *Bull. Sci. Math.* — 2014. — Vol. 138, № 3. — P. 440–455.

References

[1] Billingsley P., *Ergodic theory and information.* — New York : John Willey and Sons, 1965.

[2] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, 1992, 208 p.

[3] Albeverio S., Torbin G., *Bull. Sci. Math.*, 2005, Vol. 129, № 4, P. 356–367.

[4] Pratsiovytyi M., *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, 1998, 296 p.

[5] Nikiforov R., Torbin G., *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2012, № 86, pp. 150–162.

[6] Nikiforov R., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences).* 2012, **13** (1), pp. 151–162.

[7] Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G., *On fractal phenomena connected with infinite linear IFS and related singular probability measures* submitted to *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*

[8] Everett C. I., *Bull. Amer. math. Soc.*, 1946, Vol. 52, pp. 861–869.

[9] Rényi A., *Acta Math. Sci. Hungar.*, 1957, Vol. 8, pp. 477–493.

[10] Falconer K., *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, New York : John Willey and Sons, 1990.

[11] Hutchinson J. E., *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, Vol. 30, pp. 713–747.

[12] Pratsiovytyi M., Torbin G., *Dopovidi NAN Ukrainy (Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine)*, 1998, №4, pp. 48–54.

[13] Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 1999, **1**, pp. 152–166.

[14] Pratsiovytyi M., *Fraktal'nyj analiz ta sumizhni pytannja (Fractal analysis and related problems*, 1998, T. 2, pp. 36–48.

[15] Pratsiovytyi M., *Fraktal'nyj analiz ta sumizhni pytannja (Fractal analysis and related problems*, 1998, T. 2, pp. 14–35.

[16] Pratsiovytyi M., Leschinskyi O., *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 1997, № 57, pp. 134–140.

[17] Torbin G. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2005, T. 6, pp. 197–209.

[18] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Positivity*, 2006, Vol. 10, № 1, P. 39–49.

[19] Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G. *Bull. Sci. Math.*, 2014, Vol. 138, № 3, pp. 440–455.