Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 128–138.

Про суперпозиції сингулярно неперервних та абсолютно неперервних функцій розподілу

М. Л. Лупаїн,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. У роботі розглядаються питання про суперпозиції абсолютно неперервних та сингулярно неперервних функцій розподілу. Показано, що суперпозиція абсолютно неперервної та сингулярно неперервної функцій розподілу $F_{sc}(F_{ac})$ буде сингулярно неперервною, якщо функція F_{ac}^{-1} також буде абсолютно неперервною; а суперпозиція $F_{ac}(F_{sc})$ завжди буде сингулярно неперервною. Встановлено деякі достатні умови сингулярності суперпозиції двох сингулярно неперервних, строго монотонних функцій розподілу.

Ключові слова: функція розподілу, суперпозиція функцій, абсолютно неперервна функція, сингулярно неперервна функція.

The superpositions of absolutely continuous and singular continuous distribution functions

M. Lupain,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The superpositions of absolutely continuous and singular continuous distribution functions are studied in this paper. It is also proven if F_{ac}^{-1} is absolutely continuous, then superposition $F_{sc}(F_{ac})$ is singularly continuous; the superposition $F_{ac}(F_{sc})$ is singularly continuous. Some sufficient conditions for the singularity of superposition of two singularly continuous, strictly monotonic distribution functions are found.

AMS Subject Classifications (2010): 26A30, 26B40.

Key words: superposition of functions, absolutely continuous function, singular continuous function, distribution function.

Вступ

Нагадаємо що функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$ називається абсолютно неперервною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якої

E-mail: marinalupain@mail.ru

скінченної системи інтервалів $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$, які взаємно не перетинаються і таких що

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

і виконується нерівність

$$|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k))| < \varepsilon.$$

Ще одним класом функцій обмеженої варіації є клас сингулярних функцій. Відмінна від сталої неперервна функція обмеженої варіації, похідна якої майже всюди дорівнює нулю називається сингулярною функцією [**2**].

У першому розділі даної роботи розглядаються суперпозиції двох абсолютно неперервних функцій. Г. М. Фіхтенгольц встановив критерій абсолютної неперервності суперпозиції двох абсолютно неперервних функцій. В цьому ж напрямку працювали і його учні М. А. Зарецький та Н. К. Барі, яка разом з Д. Є. Меньшовим повністю охарактеризували клас функцій, які є суперпозиціями абсолютно неперервних функцій [**4**].

Суперпозиції абсолютно неперервної та сингулярно неперервної та двох сингулярно неперервних функцій досліджені значно менше.

Оскільки будь-яку неспадну обмежену функцію $f(x)$ шляхом елементарних перетворень виду $y = f(x) + a$, $y = k_1(f(x))$ і $y = f(k_2 x)$, які не вплинуть на суттєві властивості $f(x)$, можна представити як функцію розподілу, то для доведення деяких теорем будемо розглядати замість абсолютно неперервних, сингулярно неперервних функцій, відповідні функції розподілу.

Нагадаємо, що ймовірнісна міра μ називається абсолютно неперервною (відносно міри Лебега λ), якщо $\mu(E) = 0$, для кожної множини, для якої має місце умова $\lambda(E) = 0$. Відповідна функція розподілу називається абсолютно неперервною. В деяких випадках зручніше користуватися еквівалентним означенням: функція розподілу є абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли вона володіє N-властивістю, тобто вона довільну нуль-множину (в сенсі міри Лебега) відображає в множину нульової міри Лебега.

Ймовірнісна міра μ називається сингулярно неперервною (відносно міри Лебега λ), якщо вона є неперервною (тобто міра кожної одноточкової множини дорівнює нулю) та існує вимірна множина E така, що $\lambda(E) = 0$ і при цьому $\mu(E) = 1$. Аналогічно, відповідна функція розподілу називається сингулярно неперервною.

Суперпозиція функцій розподілу є функцією обмеженої варіації, то очевидно, що суперпозиція двох абсолютно неперервних функцій розподілу буде абсолютно неперервною функцією розподілу.

У третьому розділі показано, що для суперпозиції $F_{sc}(F_{ac})$ умова абсолютної неперервності функції F_{ac}^{-1} є суттєвою, а суперпозиція $F_{ac}(F_{sc})$ завжди буде сингулярною. У четвертому розділі розкрито питання про суперпозицію двох сингулярно неперервних функцій розподілу. А саме, показано, що така суперпозиція може бути абсолютно неперервною, сингулярно неперервною функцією розподілу та їх сумішшю. В п'ятому розділі в термінах носіїв щільності представлені деякі достатні умови сингулярності суперпозиції двох строго монотонних сингулярних функцій.

1. Суперпозиція двох абсолютно неперервних функцій

Давно відомо, що суперпозиція двох абсолютно неперервних функцій не завжди буде абсолютно неперервною. Вперше приклад такої суперпозиції був побудований Г. М. Фіхтенгольцом у 20-х роках XX століття [**5**].

Ще одним прикладом такої суперпозиції є наступний: розглянемо на відрізку $[0;1]$ дві абсолютно неперервні функції: $f(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ і $g(x) = \sqrt{x}$. Їх суперпозиція $g(f(x)) = |x \sin \frac{1}{x}|$ не є функцією обмеженої варіації, а отже не буде абсолютно неперервною.

В курсі теорії функцій дійсної змінної є наступна теорема про інтегрування частинами. Нехай функції f і g абсолютно неперервні на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b f^{'} g dx = fg|_a^b - \int_a^b fg' \, dx.$$

Операція інтегрування частинами дуже часто використовується при вивченні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Причому у багатьох випадках дана теорема незастосовна. Наприклад, нерідко доводиться інтегрувати частинами

$$\int_a^b u^{''} v \, dx,$$

де $u = u(x)$ — двічі неперервно диференційовна функція однієї змінної x, а функція $v = v(x)$ вибрана в залежності від u, наприклад $v = \varphi(u)$, де φ — абсолютно неперервна. Ми не можемо застосувати у цьому випадку теорему інтегрування частинами, оскільки суперпозиція $\varphi(u)$, взагалі кажучи, може не бути абсолютно неперервною [**1**]. Постає задача знаходження класу функцій, які є суперпозиціями абсолютно неперервних функцій.

Теорема 1 (Г. М. Фіхтенгольц, [**2**],[**5**]). *Для того, щоб суперпозиція двох абсолютно неперервних функцій була абсолютно неперервною необхідно і достатньо, щоб вона була функцією обмеженої варіації .*

Суперпозиціями абсолютно неперервних функцій займалась Н. К. Барі. Вона досліджувала питання про представлення неперервної функції суперпозицією абсолютно неперервних функцій. Їй належать наступні теореми:

Теорема 2 ([**4**]). *Довільна неперервна функція є сумою трьох суперпозицій абсолютно неперервних функцій, і існує неперервна функція, яка не може бути представлена у вигляді суми двох таких суперпозицій.*

Теорема 3 ([**4**]). *Будь-яка функція, що задовольняє умові (N), чи точніше, довільна неперервна функція, диференційовна в точках множини додатної міри на кожному інтервалі, є сумою двох суперпозицій абсолютно неперервних функцій, і існує неперервна функція, яка задовольняє умову (N), але не представляється у вигляді однієї суперпозиції абсолютно неперервних функцій.*

2. Суперпозиція абсолютно неперервної та сингулярно неперервної функцій розподілу

Відомо, що для неперервної строго зростаючої функції обернена функція теж неперервна. З'ясуємо, якою буде обернена функція до строго зростаючої абсолютно неперервної функції.

Твердження 1. *Існують абсолютно неперервні функції, обернені до яких не є абсолютно неперервними.*

Приклад 1. Нехай F строго зростаюча абсолютно неперервна функція, така що $F'(x) = 0$ на множині додатної міри Лебега.

Розглянемо Q^* розклад дійних чисел:

$$Q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \dots \end{pmatrix}.$$

Тобто $q_{0n} = q_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, q_{1n} = \frac{1}{2^n}, \forall n \in N$. Тоді множина канторівського типу $C_0 = C_0(Q^*, \{0,2\}) = \{x : x = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)\dots}, \alpha_j(x) \in \{0,2\}\}$ матиме додатню міру Лебега

$$\lambda(C_0) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q_{1k}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) > 0.$$

Нехай F зростає лінійно на

$$\Delta_1^{Q^*}, \Delta_{01}^{Q^*}, \Delta_{21}^{Q^*}, \Delta_{001}^{Q^*}, \Delta_{021}^{Q^*}, \Delta_{201}^{Q^*}, \Delta_{221}^{Q^*}, \dots$$

і

$$F(\Delta_1^{Q^*}) = \Delta_1^3, F(\Delta_{01}^{Q^*}) = \Delta_{01}^3, F(\Delta_{21}^{Q^*}) = \Delta_{21}^3, \dots.$$

Нехай $C_1 = [0,1]\backslash C_0, A_0 = F(C_0), A_1 = F(C_1)$.

$$\lambda(A_1) = \lambda(F(\Delta_1 \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{21} \cup \Delta_{001} \cup \ldots) = \frac{1}{1} + 2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} + \ldots = 1.$$

Тому $\lambda(A_0) = 0$.

Доведемо абсолютну неперервність функції F.

Розглянемо множну E нульової міри Лебега

$$E_0 = E \cap C_0, E_1 = E \cap C_1.$$

Оскільки $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ і $E_1 \subseteq C_1$, тому $\lambda(F(E_1)) = 0$.

$\lambda(F(E_0)) = 0$, оскільки $F(E_0)$ є не більш як зчисленним об'єднанням гомотетичних копій підмножин E_0. Отже, $\lambda(F(E)) = 0$, звідки і випливає абсолютна неперервність функції F.

Оскільки F строго зростаюча функція, то існує обернена функція $\varphi = F^{-1}$.

$$\varphi(A_1) = F^{-1}((F(C_1)) = C_1.$$

$\lambda(A_1) = 0$ і $\lambda(C_1) > 0$, а це означає, що φ не є абсолютно неперервною. При цьому $F'(x) = 0$ для майже всіх $x \in C_0$ (в смислі міри Лебега). Тому, $F'(x) = 0$ на множині додатної міри Лебега.

Сума приростів на множині C_0 рівна 1, тому $\lambda(F(C_0)) = 0$.

Нехай x належить множині, похідна якої $F'(x)$ існує і $x_0 \notin C_0$. Тоді,

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(\Delta_n(x))}{|\Delta_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})\ldots(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2^{n-1}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2^k})}.$$

Теорема 4. *Нехай $F_1(x)$ абсолютно неперервна і $F_2(x)$ сингулярно неперервна строго зростаючі функції розподілу. Якщо $F^{-1}(x)$ абсолютно неперервна, то суперпозиція $F = F_2(F_1)$ є сингулярно неперервною.*

Доведення. Нехай $F_1(x)$ — абсолютно неперервна і $F_2(x)$ — сингулярно неперервна строго зростаючі функції на відрізку $[0,1]$.

Знайдемо похідну суперпозиції $F(x) = F_2(F_1(x))$ в $x_0 \in [0,1]$.

$F'(x_0) = F_2'(F_1(x_0))F_1'(x_0)$ або $F'(x_0) = F_2'(y_0)F_1'(x_0)$, де $y_0 = F_1(x_0)$. Позначимо $M_{F_2} = y : F_2'(y) = 0$. Тоді $\lambda(M_{F_2}) = 1$.

Розглянемо множину $F_1^{-1}(M_{F_2}) = \widetilde{M_{F_2}}$. Функція $F_1(x)$ — абсолютно неперервна і строго зростаюча, то і $F_1^{-1}(x)$ також буде абсолютно неперервною функцією. Доповнення $\overline{M_{F_2}}$ матиме нульову міру Лебега: $\lambda(M_{F_2}) = 0$.

Оскільки абсолютно неперервні функції множину нульової лебегової міри, переводять у множину міри нуль (властивість N), то $\lambda(F_1^{-1}(\overline{M_{F_2}})) = 0$, а тому і $\lambda(F_1^{-1}(M_{F_2})) = 1$.

Отже, $\lambda(\widetilde{M_{F_2}}) = 1$. Тоді для $\forall x_0 \in \widetilde{M_{F_2}}, F_2^{'}(F_1(x_0)) = 0$. Нехай K_{F_1} множина всіх x, для яких похідна $F_1^{'}(x)$ існує і є обмеженою: $K_{F_1} = x : F_1^{'}(x) < +\infty$. Функція абсолютно неперервна, тому $\lambda(K_{F_1}) = 1$. Тоді $\lambda(K_{F_1}) \cap \widetilde{M_{F_2}} = 1$ і для $\forall x_0 \in K_{F_1} \cap \widetilde{M_{F_2}}$: $\begin{cases} F_1^{'}(x_0) < +\infty \\ F_2^{'}(F_1(x_0)) = 0 \end{cases}$. $F^{'}(x) = F_2^{'}(F_1(x_0))F_1^{'}(x_0) = 0$ майже всюди. Отже, $F(x)$ — сингулярно неперервна. □

Зауваження 1. *Умова абсолютної неперервності функції F^{-1} є суттєвою, оскільки суперпозиція $F = F_2(F_1)$ не завжди сингулярно неперервна.*

Приклад 2. Нехай F_{ac} строго зростаюча абсолютно неперервна функція розподілу на відрізку $[0, 1]$, що описана у прикладі 1; нехай F_{sc} строго зростаюча сингулярно неперервна функція розподілу на $[0, 1]$.

Розглянемо Q^*-представлення дійсних чисел

$$q_{0n} = q_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, q_{1n} = \frac{1}{2^n}.$$

Означимо функцію F_{sc} так:

1) $F_{sc}(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k 1(x)}) = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k 1(x)}, \alpha_j \in \{0, 2\}$;

2) Графік F_{sc} є афінною копією класичної функції Салема на $\Delta^3_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k 1(x)}$.

Для інших $x \in C_0$ означимо функцію F_{sc} за неперервністю.

Розглянемо суперпозицію $F = F_{sc}(F_{ac}(x))$. Оскільки F_{ac} лінійна на циліндрах $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k 1(x)}$ і графік функції F_{sc} є афінною копією класичної функції Салема на $\Delta^3_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k 1(x)}$, то суперпозиція $F = F_{sc}(F_{ac}(x))$ володіє властивостями 1) та 2). Але $F'(x) = 1$ для майже всіх $x \in C_0 = \{x : x = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_j \in \{0, 2\}\}$ (в смислі міри Лебега).

Нехай a_1 міра Лебега множини C_0, $a_2 = \lambda([0, 1] \setminus C_0), (a_1 + a_2) = 1$. Тоді, $F = a_1F_1 + a_2F_2$, де F_1 — функція розподілу ймовірнісної міри μ_{F_1}, F_2 — функція розподілу ймовірнісної міри μ_{F_2}. Легко бачити, що F_1 є абсолютно неперервною ($S_{F_1} = C_0$) і F_2 є сингулярно неперервною ($S_{F_2} = C_1$).

Теорема 5. *Нехай $F_1(x)$ абсолютно неперервна, $F_2(x)$ — сингулярно неперервна функції розподілу. Суперпозиція $F = F_1(F_2)$ є сингулярно неперервною.*

Доведення. Розглянемо суперпозицію $F(x) = F_1(F_2(x))$.

$F_2(x)$ — сингулярно неперервна, а отже існує така множина $M : \begin{cases} \lambda(M) = 0 \\ \lambda(F_2(M)) = 1 \end{cases}$. Тоді, для множини $M : \lambda(F(M)) = \lambda(F_1(F_2(M))) = 1$. Показали, що $F(x)$ множину міри нуль, перевела у множину повної міри Лебега. Отже, $F(x)$ — сингулярно неперервна функція. □

3. Суперпозиція двох сингулярно неперервних функцій розподілу

Перш ніж розглядати суперпозицію двох сингулярно неперервних функцій розподілу, з'ясуємо якою буде функція обернена до сингулярної строго монотонної функції розподілу.

Теорема 6. *Якщо F — строго зростаюча сингулярно неперервна функція на відрізку $[0,1]$, то обернена функція F^{-1} також буде сингулярною і строго зростаючою функцією на цьому відрізку.*

Доведення. Оскільки F — строго зростаюча і неперервна функція на $[0,1]$, то у відповідному проміжку значень цієї функції існує обернена функція F^{-1}, яка також буде строго монотонною.

F — сингулярна,тоді існує така множина E, що $\lambda(E) = 0$ і $\lambda(F(E)) = 1$. Позначимо $g = F^{-1}$ і доведемо існування множини $M_0 \subset [0,1]$, для якої $\lambda(M_0) = 0$ і $\lambda(g(M_0)) = 1$, інакше кажучи, доведемо сингулярність функції g .

Виберемо множину M_0 так, що $M_0 = [0,1] \setminus F(E) = \overline{F(E)}$. Очевидно, що в такому випадку міра Лебега множини рівна нулю $(\lambda(M_0)) = 0$. $[0,1] \setminus E = \overline{E}$ бачимо, що $E \cap \overline{E} = \emptyset$ і $E \cup \overline{E} = [0,1]$, причому $\lambda(E) = 1$. Образом множини E під дією функції F є множина $F(E)$, а образом $\overline{E}$ — множина $F(\overline{E})$. Тоді множини $F(\overline{E})$ і $F(E)$ такі: $F(\overline{E}) \cap F(E) = \emptyset$ і $F(\overline{E}) \cup F(E) = [0,1]$. Отже, правильним буде

$$F(\overline{E}) = [0,1] \setminus F(E) = \overline{F(E)}.$$

Тоді $\lambda(g(M_0)) = \lambda(F^{-1}(\overline{F(E)}) = \lambda(F^{-1}(F(\overline{E}))) = \lambda(\overline{E}) = 1$. Отже, функція F^{-1} сингулярна. □

Розглянемо випадки:

а) Нехай $F(x)$ — строго монотонна сингулярно неперервна функція на $[0,1]$. Тоді $F(F^{-1}(x))$ — суперпозиція двох сингулярних функцій. Очевидно, що $F(F^{-1}(x)) = x$, тобто суперпозиція є абсолютно неперервною функцією.

б) Нехай $F_S(x)$ — функція Салема, $F_C(x)$ — функція Кантора. Суперпозицію визначимо так: $F(x) = F_S(F_C(x))$. Розглянемо множину $M = [0,1] \setminus C_0$.

$$M \cup C_0 = [0,1], M \cap C_0 = \emptyset,$$

де C_0 — множина Кантора. Відомо, що C_0 має нульову міру Лебега, тоді $\lambda(M) = 1$.

Нехай образом множини M при дії функції Кантора буде множина $M^* = F_C(M)$, при цьому множина Кантора C_0 перейде в деяку множину $F_C(C_0)$. Множини $F_C(M)$ і $F_C(C_0)$ такі, що

$$F_C(M) \cup F_C(C_0) = [0,1] \quad \text{і } F_C(M) \cap F_C(C_o) = \emptyset. \tag{1}$$

Оскільки

$$F_C([\frac{1}{3},\frac{2}{3}]) = \{\frac{1}{2}\}, F_C([\frac{1}{9},\frac{2}{9}]) = \{\frac{1}{4}\}, F_C([\frac{7}{8},\frac{8}{9}]) = \{\frac{3}{4}\}\dots,$$

то множина $M^* = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, ...\}$ — це множина двійково-раціональних точок виду $\frac{k}{2^m}$, $(k, m \in N)$, а отже є зліченною. В силу того, що довільна зчисленна множина є множиною нульової міри Лебега, то $\lambda(M^*) = 0$. З (1) випливає, що міра образу множини Кантора $\lambda(F_C(C_0)) = 1$.

При дії функції Салема $F_S(x)$ множина M^* перейде в множину $M^{**} = F_S(M^*)$, $F_C(C_0)$ перейде в множину — $F_S(F_C(C_0))$. І аналогічно до (1), отримаємо

$$F_S(M^*) \cup F_S(F_C(C_0)) = [0,1] \text{ і } F_S(M^*) \cap F_S(F_C(C_0)) = \emptyset. \tag{2}$$

Функція F_S — строго зростаюча. Тоді для $\forall x \in M^*$ існує єдине $y \in M^{**} : y = F_S(x)$, тобто $F_S : M^* \leftrightarrow M^{**}$. Оскільки множина M^* — зчисленна, то її образ M^{**}, при дії функції Салема, також буде зліченною множиною і $\lambda(M^{**}) = 0$. З (2) отримаємо, що $\lambda(F_S(F_C(C_0))) = 1$.

Отже, $\lambda(C_0) = 0$, а $\lambda(F_S(F_C(C_0))) = \lambda(F(C_0)) = 1$. Тобто знайшлася така множина міри нуль, яку функція $F(x)$ переводить у множину повної міри Лебега. Отже функція $F(x)$ — сингулярна. Її неперервність випливає з неперервності суперпозиції двох неперервних функцій.

в) Нехай $F_1(x) = \frac{1}{2}F_C(2x), x \in [1, \frac{1}{2}]$ і $F_1(x) = \frac{1}{2}F_S^{-1}(2x-1) + \frac{1}{2}, x \in [\frac{1}{2}, 1]$, де F_C — функція Кантора, а$F_S^{-1}(x)$ — функція, яка обернена до функції Салема. ($F_S^{-1}(x)$ існує і є сингулярною строго зростаючою функцією за теоремою 6. Візьмемо функцію

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_S(2x), x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}F_S(2x-1) + \frac{1}{2}, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Розглянемо суперпозицію $G(x) = F_2(F_1(x))$. З вище проведених в пунктах а) та б) міркувань випливає, що на відрізку $[\frac{1}{2}, 1]$ функція $G(x)$ співпадає з функцією $y = x$, а на проміжку $[0, \frac{1}{2}]$ дана функція є сингулярно неперервною, оскільки вона неперервна як суперпозиція двох неперервних функцій і відображає підмножину повної міри Лебега з $[0, \frac{1}{2}]$ в зліченну множину.

Отже, суперпозиція двох сингулярно неперервних функцій може бути абсолютно неперервною, сингулярно неперервною функцією та їх сумішшю.

4. Достатні умови сингулярності суперпозиції двох сингулярно неперервних функцій розподілу

Множину
$$N_\xi := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} > 0\}$$
називають носієм щільності розподілу випадкової величини ξ. Для сингулярно неперервної функції F носій щільності N_F є множиною нульової міри Лебега, а $\lambda(F(N_F)) = 1$.

Теорема 7. *Нехай F_1, F_2 — сингулярно неперервні функції розподілу,*
$$N_1 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_1(x+\varepsilon) - F_1(x)}{\varepsilon} > 0\},$$
$$N_2 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_2(x+\varepsilon) - F_2(x)}{\varepsilon} > 0\}.$$
Якщо $F_1(N_1) \supset N_2$, то суперпозиція $F_2(F_1)$ — сингулярно неперервна.

Доведення. Оскільки N_1 — носій щільності функції F_1, N_2 — носій щільності функції F_2, то міра Лебега множин N_1, N_2 рівна нулю, тоді $\lambda(F_1(N_1)) = 1$ і $\lambda(F_2(N_2)) = 1$.

За умовою теореми :
$$F_1(N_1) \supset N_2 \Rightarrow F_2(F_1(N_1)) \supset F_2(N_2).$$
Тоді $\lambda(F_2(F_1(N_1))) \geq \lambda(F_2(N_2))$. Оскільки $\lambda(F_2(N_2)) = 1$, то $\lambda(F_2(F_1(N_1))) = 1$. $\lambda(N_1) = 0, \lambda(F_2(F_1(N_1))) = 1$, отже суперпозиція $F_2(F_1)$ — сингулярно неперервна. □

Теорема 8. *Нехай F_1, F_2 — сингулярно неперервні строго зростаючі функції розподілу,*
$$N_1 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_1(x+\varepsilon) - F_1(x)}{\varepsilon} > 0\},$$
$$N_2 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_2(x+\varepsilon) - F_2(x)}{\varepsilon} > 0\}.$$
$$\widetilde{N_2} = F_1^{-1}(N_2).$$
Якщо $\lambda(\widetilde{N_2}) = 0$, то суперпозиція $F_2(F_1)$ — сингулярно неперервна.

Доведення. N_1 — носій щільності для функції F_1, тоді
$$\lambda(N_1) = 0; \lambda(F_1(N_1)) = 1;$$
N_2 — носій щільності для функції F_2:
$$\lambda(N_2) = 0; \lambda(F_2(N_2)) = 1.$$

За властивостями сингулярно неперервних функцій розподілу F_1^{-1} буде теж сингулярно неперервною функцією розподілу.

За умовою теореми $\lambda(\widetilde{N_2}) = 0$.

Розглянемо суперпозицію $F_2(F_1)$:

$$F_2(F_1(\widetilde{N_2})) = F_2(F_1(F_1^{-1}(N_2))) = F_2(N_2).$$

$$\lambda(\widetilde{N_2}) = 0, \lambda(F_2(F_1(\widetilde{N_2})) = 1.$$

Отже, суперпозиція $F_2(F_1)$ буде сингулярно неперервною функцією розподілу. □

Теорема 9. *Нехай F_1, F_2 — сингулярно неперервні строго зростаючі функції розподілу,*

$$N_1 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_1(x+\varepsilon) - F_1(x)}{\varepsilon} > 0\},$$

$$N_2 := \{x : \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{F_2(x+\varepsilon) - F_2(x)}{\varepsilon} > 0\}.$$

$$\widetilde{N_2} = F_1^{-1}(N_2), A = [0,1]\ \{N_1 \cup \widetilde{N_2}\}.$$

Якщо $0 < \lambda(A) < 1$, то суперпозиція $F_2(F_1)$ містить сингулярну компоненту.

Доведення. $A = [0;1]\{N_1 \cup \widetilde{N_2}\}$. За умовою $0 < \lambda(A) < 1$, тоді

$$\lambda(F_1(A)) = 1 - \lambda(F_1(N_1 \cup \widetilde{N_2})) = 1 - 1 = 0.$$

$$\lambda(F_2(F_1(A))) = 1 - \lambda(F_2(F_1(N_1 \cup \widetilde{N_2}))) = 1 - 1 = 0.$$

$$\lambda(F_2(F_1(A))) = 0.$$

Позначимо $A_2 = F_2(F_1(A))$ і розглянемо $F = (F_2(F_1))^{-1})$. Тоді $F(A_2) = A$, тому $0 < \lambda(F(A_2)) < 1$. А це означає, що функція F не може бути абсолютно неперервною, вона містить сингулярну компоненту. Тоді суперпозиція $F_2(F_1)$ також не є абсолютно неперервною і містить сингулярну компоненту.

□

Література

[1] *Буренков В. И.* Об интегрировании по частям и возникающей в связи с этим задаче о суперпозиции абсолютно неперерывних функций // Труды Мат. института АН СССР, — 1975. — 134. С. 38-46.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

[3] *Лупаїн М. Л.* Суперпозиція абсолютно неперервної і сингулярно неперервної функцій та двох сингулярно неперервних функцій // Студенські фізико-математичні етюди. — 2012. — К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова , № 11.

[4] *Сакс С.* Теория интеграла. — М: Издательство иностранной литературы,1949. — 496 с.

[5] *Фихтенгольц Г. М.* Об абсолютно непрерывных функциях // Матем.сб., — 1923. — 286-296 , № 31.

References

[1] Burenkov V, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1975, **134**, 38 – 46.

[2] Kolmogorov A., Fomin S., *Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, 2004, 572 p.

[3] Lupain M., *Studenski fizyko-matematychni etudy (Student's etudes on Physics and Mathematics)*, 2012, **11**.

[4] Saks S., *Teorija integrala (Theory of the Integral)*, 1949, 496 p.

[5] Fichtenholz G., *Matem. Sb.*, 1923, **31**, №2, pp. 286 – 296.