Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2). — С. 61–68.

Про лебегівську структуру розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами

О. В. Іванишин,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

А. Г. Торбін,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація. Робота присвячена дослідженню лебегівської структури розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами та їх узагальнень. Основний результат статті дає необхідні і достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами без будь-яких додаткових обмежень. Запропонований метод застосовний також для дослідження лебегівської структури розподілів випадкових величин з марківськими Q-символами та їх узагальнень.

Ключові слова: ланцюги Маркова, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, абсолютно неперервні ймовірнісні міри, ергодична теорема, асимптотична частота символів.

On Lebesgue structure of distributions of random variables with markovian s-adic symbols

O. Ivanyshyn,

Taras Shevchenko National University of Kyiv

A. Torbin,

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. The paper is devoted to the study of Lebesgue structure of distributions of random variables with markovian s-adic symbols and their generalizations. The main results gives necessary and sufficient conditions for absolute continuity resp. singularity of distributions of random variables with markovian s-adic digits without any additional restrictions. Our approach is also applicable for the study of Lebesgue structure of distributions of random variables with markovian Q-symbols and their generalizations.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

Key words: Markov chains, singularly continuous probability measures, absolutely continuous probability measures, ergodic theorem, asymptotic frequency of symbols.

Вступ

Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність випадкових величин, які набувають значень 0, $1, \ldots, s-1$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями p_0, $p_1, \ldots, p_{s-1}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P^* = \|p_{ij}\|$. Основним об'єктом дослідження у даній роботі є розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{s^k}, \tag{1}$$

де s — довільне фіксоване натуральне число, $s > 1$, а означена вище послідовність $\{\xi_n\}$ утворює ланцюг Маркова.

Частковий випадок, коли $\{\xi_n\}$ є послідовністю незалежних випадкових величин, є добре вивченим. Зокрема, критерії абсолютної неперервності та сингулярної неперервності (відносно міри Лебега) відповідної ймовірнісної міри μ_ξ були знайдені S. D. Chatterji в роботах [**4, 5**] (див. також роботу G. Marsaglia [**9**], де підхід до знаходження критеріїв сингулярності та абсолютної неперервності випадкових величин з незалежними s-адичними символами є аналогічним до підходу роботи [**4**]). Зауважимо, що у більш ранній роботі [**14**] R. Salem досить повно дослідив властивості розподілів випадкових величин з незалежними двійковими символами (s=2) як для випадку однакової розподіленості, так і для випадку різнорозподіленості, знайшовши критерії абсолютної неперервності та сингулярної неперервності, дослідивши також модуль неперервності відповідної функції розподілу та асимптотику коефіцієнтів Фур'є–Стілтьєса. Зауважимо, що методи дослідження, які використовували R. Salem та S. D. Chatterji, суттєво відрізнялись. Як підкреслює A. Brown у 1969 році у своїй роботі [**3**], конструкція строго зростаючої сингулярно неперервної функції розподілу, яка відповідає розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами, вже стала математичним фольклором, хоча історично (Göttingen, 1907) вона належить Е. Хеллінгеру [**7**], в дисертації якого вона вперше з'явилась («the construction has become folkloric, though as a matter of historical fact it is properly attributed to Hellinger, in whose thesis ... it first appears»). Тонкі фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними s-адичними символами (включаючи обчислення розмірності Хаусдорфа міри $\dim_H(\mu_\xi) := \inf\{\dim_H E, \mu_\xi(E) = 1\}$) були досліджені S. D. Chatterji в роботі [**5**].

Відзначимо також, що на сьогодні відомо багато класів ймовірнісних розподілів, які містять клас розподілів випадкових величин з незалежними s-адичними символами як частковий випадок (див., наприклад, [**10, 15, 1, 2**] та посилання у вказаних роботах).

Лебегівській структурі та властивостям випадкових величин з марківськими s-адичними символами та їх узагальненням (випадковим величинам з марківськими

Q-символами, Q^*-символами, $\widetilde{Q}$-символами тощо) присвячено значно менше уваги. В роботі [**6**] (при додаткових умовах на стаціонарність ланцюга Маркова) T. E. Harris дослідив лебегівську структуру розподілу μ_ξ і показав, що при цьому μ_ξ не є мірою Райхмана, тобто перетворення Фур'є–Стілт'єса міри μ_ξ не прямує до нуля на нескінченності. Тонкі фрактальні властивості розподілу μ_ξ (включаючи обчислення розмірності Хаусдорфа міри $\dim_H(\mu_\xi)$) були досліджені J. Kinney в роботі [**8**]. Фрактальні властивості спектра (мінімального замкненого носія) міри μ_ξ досліджувались М. В. Працьовитим [**13**]. Критерій дискретності та сингулярної неперервності канторівського типу, фрактальні властивості спектрів випадкових величин з марківськими символами Q-зображення (узагальнення s-адичного зображення) знайдено в [**11, 12, 13**]. Зауважимо, що загальні критерії (зокрема, і для випадку коли всі елементи матриці перехідних ймовірностей додатні) сингулярності розподілу випадкових величин з марківськими символами Q-зображення на сьогодні відсутні.

Основним завданням даної роботи є розвиток методів дослідження лебегівської структури випадкових величин з марківськими s-адичними символами та їх узагальнень. Основний результат статті дає необхідні і достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами без будь-яких додаткових обмежень. Запропонований метод застосовний також для дослідження лебегівської структури розподілів випадкових величин з марківськими Q-символами та їх узагальнень.

Про лебегівську структуру розподілів випадкових величин з марківськими s-адичними символами

Теорема 1. *Нехай $s \in N, s > 1$, а $\{\xi_n\}$ — послідовність випадкових величин, які набувають значень з множини $A = \{0, 1, \dots, s-1\}$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_0, p_1, \dots p_{s-1}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P^* = \|p_{ij}\|$.*

Тоді розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{s^k},$$

є абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$p_{ij} = \frac{1}{s}, \forall i \in A, \forall j \in A. \tag{2}$$

У всіх інших випадках міра μ_ξ сингулярна відносно міри Лебега (включаючи дискретний випадок).

Доведення. Якщо $p_{ij} = \frac{1}{s}, \forall i \in A, \forall j \in A$, то абсолютна неперервність розподілу в.в. ξ є очевидною. Справді, у цьому випадку ξ має рівномірний розподіл на кожному з s-адичних відрізків першого рангу і відповідна функція розподілу є лінійною з кутовим коефіцієнтом $s \cdot p_i$ на кожному циліндричному відрізку $\triangle_i = [\frac{i}{s}, \frac{i+1}{s}], i \in A$.

Покажемо, що при невиконанні умови (2) розподіл в.в. ξ буде сингулярним відносно міри Лебега (включаючи дискретний випадок).

Як відомо, кожна функція розподілу диференційовна майже скрізь (в сенсі міри Лебега).

Позначимо $D = \{x : x \in [0,1] \wedge F'(x)$ існує і скінченна$\}$. Тоді $\lambda(D) = 1$.

Якщо в точці x_0 існує похідна $F'(x_0)$, то $F'(x_0)$ можна знайти не лише як границю $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{F(x_0+\triangle x)-F(x_0)}{\triangle x}$, але і наступним чином: $F'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}$, де $\{[a_n, b_n]\}$ — послідовність вкладених циліндричних s-адичних відрізків $\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)} =: \triangle_n(x_0)$, які стягуються в точку x_0, тобто $x_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k(x_0)}{s^k}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{s^n},$$

де $\alpha_k(x_0)$ — символи s-адичного розкладу числа x_0.

Очевидно, що $|\triangle_n(x)| = |b_n - a_n| = \frac{1}{s^n}$, і

$$F(a_n) - F(b_n) = P\{\xi \in \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)..\alpha_n(x)}\} =$$
$$= P\{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 = \alpha_2(x) \wedge \cdots \wedge \xi_n = \alpha_n(x)\} =$$
$$= P\{\xi_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\xi_2 = \alpha_2(x)/\xi_1 = \alpha_1(x)\}\cdot$$
$$\cdot P\{\xi_3 = \alpha_3(x)/\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 = \alpha_2(x)\} \cdots P\{\xi_n = \alpha_n(x)/\xi_1 = \alpha_1(x), \ldots, \xi_{n-1} = \alpha_{n-1}(x)\}.$$

Оскільки $\{\xi_k\}$ утворюють однорідний ланцюг Маркова, то

$$F(a_n) - F(b_n) = P_{\alpha_1(x)} \cdot P_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)} \cdots P_{\alpha_{n-1}(x)\alpha_n(x)}.$$

Отже, якщо $x_0 \in D$, то

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} P_{\alpha_1(x_0)} P_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)} \cdots P_{\alpha_{n-1}(x_0)\alpha_n(x_0)} \cdot s^n = sP_{\alpha_1}(x_0) \prod_{k=1}^{\infty} (sp_{\alpha_k(x_0)\alpha_{k+1}(x_0)}) \quad (3)$$

Нехай $N_i(x,k)$ — кількість символів «i» в s-адичному розкладі числа x до k-го місця включно. Якщо границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ існує, то її значення називають частотою символа «i» в s-адичному розкладі числа x. Застосовуючи посилений закон великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин

$$\eta_k^{(i)} = \eta_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) \neq i, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) = i. \end{cases}$$

(у цьому випадку $\Omega = [0,1], \Im = B, P = \lambda$ — міра Лебега) нескладно показати, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільного символу $i \in A$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \frac{1}{s}, \forall i \in A. \tag{4}$$

Позначимо тепер $N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k)$ — кількість разів, скільки пара $(\gamma_1\gamma_2) \in A^2$ зустрічається серед членів послідовності $(\alpha_1(x), \alpha_2(x)), (\alpha_2(x), \alpha_3(x)), \ldots, (\alpha_{k-1}(x), \alpha_k(x))$, тобто кількість разів, скільки пара $(\gamma_1\gamma_2)$ зустрічається серед перших k символів s-адичного розкладу числа x.

Доведемо, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільної пари $(\gamma_1\gamma_2) \in A^2$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k)}{k} = \frac{1}{s^2}, \forall (\gamma_1\gamma_2) \in A^2. \tag{5}$$

Для доведення (5) можна було б скористатись посиленим законом великих чисел для двох послідовностей незалежних випадкових величин

$$\psi_1, \psi_3, \psi_5, \ldots, \psi_{2n-1}, \ldots \tag{6}$$

і

$$\psi_2, \psi_4, \psi_6, \ldots, \psi_{2n}, \ldots, \tag{7}$$

де

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (\alpha_i(x), \alpha_{i+1}(x)) \neq (\gamma_1, \gamma_2), \\ 1, & \text{якщо} \quad (\alpha_i(x), \alpha_{i+1}(x)) = (\gamma_1, \gamma_2). \end{cases}$$

Ми ж застосовуємо інший підхід для доведення (5). Нехай T — перетворення одностороннього зсуву по s-адичному розкладу, тобто

$$Tx = \{s \cdot x\} = s \cdot x (mod\, 1), \forall x \in [0,1].$$

Очевидно, що міра Лебега є інваріантною і ергодичною відносно T. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \neq (\gamma_1, \gamma_2), \\ 1, & \text{якщо} \quad (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\gamma_1, \gamma_2). \end{cases}$$

Очевидно, що $f(x)$ інтегровна за Лебегом на $[0,1]$ і

$$\int_0^1 f(x) d\lambda(x) = \int_{\triangle_{\gamma_1\gamma_2}} 1 dx = |\triangle_{\gamma_1\gamma_2}| = \frac{1}{s^2}, \ \forall (\gamma_1\gamma_2) \in A^2.$$

Тому (за ергодичною теоремою Біркгофа–Хінчина):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{k-1}(x))}{k} = \int_0^1 f(x) dx$$

для λ-майже всіх $x \in [0,1]$.

Оскільки $f(x) + \dots + f(T^{k-1}(x)) = N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k)$ і $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{s^2}$, то для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ і $\forall(\gamma_1\gamma_2) \in A^2$ має місце рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_{(\gamma_1\gamma_2)}(x,k)}{k} = \frac{1}{s^2}$.

Позначимо через B множину тих $x \in [0,1]$, для яких виконується умова (5). Тоді $\lambda(B) = 1$.

Для довільного $x_0 \in D \cap B$ маємо:

$$F'(x_0) = \lim_{k\to\infty} s^k \cdot p_{\alpha_1(x_0)} \cdot p_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{k-1}(x_0)\alpha_k(x_0)} =$$
$$= p_{\alpha_1(x_0)} \cdot \lim_{k\to\infty} s^k p_{0,0}{}^{N_{(0,0)}(x,k)} \cdot \ldots \cdot p_{0,s-1}{}^{N_{(0,s-1)}(x,k)} \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot p_{s-1,0}{}^{N_{(s-1,0)}(x,k)} \cdot \ldots \cdot p_{s-1,s-1}{}^{N_{(s-1,s-1)}(x,k)} =$$
$$= p_{\alpha_1}(x_0) \cdot \lim_{k\to\infty} s^k \prod_{i=0}^{s-1}\prod_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{N_{(i,j)}(x,k)} =$$
$$= p_{\alpha_1}(x_0) \cdot \lim_{k\to\infty} \Big(s \cdot \prod_{i=0}^{s-1}\prod_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{\frac{1}{s^2}}\Big)^k =$$
$$= p_{\alpha_1}(x_0) \cdot \lim_{k\to\infty} \Big(s \cdot \sqrt[s]{\sqrt[s]{p_{00} \cdot p_{01} \cdot \ldots \cdot p_{0(s-1)}} \cdot \ldots \cdot \sqrt[s]{p_{s-1,0} \cdot \ldots \cdot p_{s-1,s-1}}}\Big)^k.$$

Оскільки $p_{i0} + p_{i1} + \ldots + p_{i,s-1} = 1$, то $\sqrt[s]{p_{i0} \cdot p_{i1} \cdot \ldots \cdot p_{i,s-1}} \le \frac{1}{s}$, причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $p_{i0} = p_{i1} = \ldots = p_{i(s-1)} = \frac{1}{s}$.

Нехай $c_i = \sqrt[s]{p_{i0} \cdot p_{i1} \cdot \ldots \cdot p_{i,s-1}}$. Тоді $c_i \le \frac{1}{s}$ і $c_i = \frac{1}{s} \Leftrightarrow p_{ij} = \frac{1}{s}$, $\forall j \in A$. Оскільки $c_i \le \frac{1}{s}, \forall i \in A$, то $\sqrt[s]{c_0 \cdot c_1 \cdot \ldots \cdot c_{s-1}} \le \frac{1}{s}$, причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $c_0 = c_1 = \ldots = c_{s-1} = \frac{1}{s}$, що рівносильно умові $p_{ij} = \frac{1}{s}, \forall i \in A, \forall j \in A$.

Отже, якщо $p_{ij} \ne \frac{1}{s}$ хоча б для однієї пари $(i,j) \in A^2$, то $c = s \cdot \prod_{i=0}^{s-1}\prod_{j=0}^{s-1} p_{ij}^{\frac{1}{s^2}} < 1$. Тоді

$$F'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \Big(s \cdot \sqrt[s]{\sqrt[s]{p_{00} \cdot p_{01} \cdot \ldots \cdot p_{0(s-1)}} \cdot \ldots \cdot \sqrt[s]{p_{s-1,0} \cdot \ldots \cdot p_{s-1,s-1}}}\Big)^k = 0, \forall x_0 \in D \cap B,$$

що і означає сингулярність розподілу в.в. ξ.

□

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math.— 2005.— **129**, no. 4.— 356–367.

[2] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Methods of Functional Analysis and Topology.— 2011.— **17**, no. 2.— 97 – 111.

[3] *Brown A.* An elementary example of a continuous singular function // Amer. Math. Monthly.— 1969.— **76**, no. 3.— 295–297.

[4] *Chatterji S. D.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc.— 1963.— **38**.— 325–331.

[5] *Chatterji S. D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports" // Z.Wahrscheinlichkeitstheorie.— 1964.— **3**.— 184–192.

[6] *Harris T. E.* On chains of infinite order //Pacific J. Math.— 1955.— **5**.— 707–724.

[7] Hellinger E. *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen* (Dissertation), Göttingen, 1907.

[8] *Kinney J. R.* Singular functions associated with markov chains // Proc. Amer. Math. Soc.— 1958.— **9**.— 603–608.

[9] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist.— 1971.— **42**.— 1922–1929.

[10] *Працевитый Н. В.* Распределения случайных величин с независимыми Q-символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1990.— 84–95.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій.— Київ: Ін-т математики АН України.— 1994.— 245 – 254.

[12] *Працьовитий М. В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика.— 1998.— **58**.— 139 – 148.

[13] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів.* — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998.

[14] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **53**. — 423–439.

[15] *Торбин Г. М., Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q^*-символами. *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи* .— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1992.— 95–104.

References

[1] Albeverio S., Torbin G. *Bull. Sci. Math.*, 2005, **129**, no. 4., pp. 356–367.

[2] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2011, **17**, no. 2, pp. 97 – 111.

[3] Brown A. *Amer. Math. Monthly*, 1969, **76**, no. 3, pp. 295–297.

[4] Chatterji S. D. *J. London Math. Soc.*, 1963, **38**, pp. 325–331.

[5] Chatterji S. D. *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1964, **3**, pp. 184–192.

[6] Harris T. E. *Pacific J. Math.*, 1955, **5**, pp. 707–724.

[7] Hellinger E. *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen* (Dissertation), Göttingen, 1907.

[8] Kinney J. R. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, **9**, pp. 603–608.

[9] Marsaglia G. *Ann. Math. Statist.*, 1971, **42**, pp. 1922–1929.

[10] Pratsiovytyi M. *Asymptoticheskie i prikladnye zadachy sluchajnykh evoljucyi (Asymptotic and applied problems of stochastic evolutions)*, Kyiv, 1990, pp. 84–95.

[11] Pratsiovytyi M. *Asymptotychnyi analiz vypadkovykh evoljucyi (Asymptotical analysis of stochastic evolutions)*, Kyiv, 1994, pp. 245 – 254.

[12] Pratsiovytyi M. *Prob. Theory and Math. Statist.*, 1998, **58**, pp. 139 – 148.

[13] Pratsiovytyi M. V. *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[14] Salem R. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943, **53**, pp. 423–439.

[15] Torbin G., Pratsiovytyi M. *Sluchajnye evoljucyi: teoret. i prykl. zadachy (Stochastic evolutions: theoretical and applied problems)*, Kyiv, 1992, pp. 95–104.