Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).— С. 47–60.

Лебегівська структура та тонкі фрактальні властивості одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями

Г. В. Іваненко,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

М. В. Лебідь,

Університет м. Білефельд, Німеччина

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. У роботі повністю поглиблено теорему Джессена–Вінтнера та досліджено тонкі фрактальні властивості розподілу випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, де ξ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірністю $\frac{1}{2}$, а збіжний знакододатній ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ задовольняє умовам: $\exists \{m_k\}: \ a_{m_k} = a_{m_k+1} + \dots + a_{m_{k+1}-1}$, причому $r_j = a_j$, при $j \notin \{m_k\}$.

Ключові слова: згортки Бернуллі, теорема Джессена–Вінтнера, фрактал, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, абсолютно неперервні ймовірнісні міри.

On Lebesgue structure and fine fractal properties of Bernoulli convolutions with essential overlaps

G. Ivanenko,

National Pedagogical Dragomanov University

M. Lebid,

Bielefeld University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. We prove necessary and sufficient conditions for absolute continuity resp. singular continuity and study fine fractal properties of the distribution of random variable $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, where ξ_k are independent random variables taking values 0 and 1 with probability $\frac{1}{2}$, and positive convergent series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ is such that $\exists \{m_k\}: \ a_{m_k} = a_{m_k+1} + \dots + a_{m_{k+1}-1}$, and $r_j = a_j$, for $j \notin \{m_k\}$.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

E-mail: torbin7@gmail.com

Key words: Bernoulli convolutions, fractal, singularly continuous probability measures, absolutely continuous probability measures.

Вступ

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які приймають значення 0 та 1 з імовірностями $p_{ik} = \frac{1}{2}$. Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — збіжний знакододатній ряд. Тоді розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{1}$$

називається *нескінченною симетричною згорткою Бернуллі.* За теоремою Джессена–Вінтнера [**8**] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто її функція розподілу буде або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або сингулярно неперервною. Теорема П. Леві [**9**] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра μ_ξ — дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \tag{2}$$

Оскільки $p_{0k} = \frac{1}{2}$, то розподіл ξ буде завжди неперервним. На сьогодні все ще невідомі критерії абсолютної неперервності (сингулярності) розподілу ξ навіть для випадку випадкових степеневих рядів, хоча дана проблема вже більше 80 років є об'єктом досліджень багатьох поколінь математиків У випадку, коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається «достатньо швидко», тобто коли $a_k \geq r_k := \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_k$ для всіх достатньо великих k, лебегівська структура та фрактальні властивості згорток Бернуллі вивчені достатньо гарно (див. [**1**] та огляд літератури в цій роботі). У той же час випадок, коли $a_k < r_k$ виконується для нескінченої кількості індексів k, є все ще мало дослідженим. Основна проблема, з якою зустрічаються дослідники на цьому шляху, є дослідження властивостей тих згорток Бернуллі, для яких «майже всі» (в смислі міри Лебега чи розмірності Хаусдорфа–Безиковича) точки спектра мають континуальну кількість різних розкладів виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k$, де $\omega_k \in \{0, 1\}$. Ймовірнісні міри такого виду належать до так званих згорток Бернуллі з «суттєвими перекриттями» ([**7**]) і дослідженню мір саме такого виду присвячена дана робота, основною задачею якої є повне поглиблення теореми Джессена–Вінтнера та дослідження тонких фрактальних властивостей розподілу випадкової величини ξ для випадку коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ задовольняє умовам: $\exists\{m_k\}: \ a_{m_k} = a_{m_k+1} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}$, причому $m_{k+1} - m_k \geq 3$, $\ r_j = a_j$, при $j \notin \{m_k\}$.

Зауважимо, що при дослідженні лебегівської структури та фрактальних властивостей розподілу ξ без порушення загальності можна вважати, що $m_1 = 1$. У іншому разі випадкову величину ξ можна представити у вигляді $\xi = \psi_1 + \psi_2$, де $\psi_1 = \sum\limits_{k=1}^{m_1-1} \xi_k a_k, \quad \psi_2 = \sum\limits_{k=m_1}^{\infty} \xi_k a_k$. Очевидно, що при цьому лебегівська структура і фрактальні властивості розподілів випадкових величин ξ та ψ_2 співпадають.

У тому випадку, коли послідовність $\{s_k\} = \{m_{k+1} - m_k - 1\}$ обмежена, розв'язання поставлених вище проблем спрощується. Зокрема, використовуючи ті ж підходи, які використовувались в роботі [**6**], можна довести сингулярну неперервність розподілу ξ. Крім того, з обмеженості послідовності $\{s_k\}$ випливає, що сімейство циліндричних відрізків $\Phi(\tilde{Q})$ відповідного $\tilde{Q}$-зображення є довірчим на одиничному відрізку, тобто

$$\dim_H E = \dim_H(E, \Phi(\tilde{Q})),\ \forall E \subset [0,1],$$

де $\dim_H(E, \Phi(\tilde{Q}))$ — розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства $\Phi(\tilde{Q})$ (у цьому випадку покриття множини E можна здійснювати лише за допомогою відрізків з $\Phi(\tilde{Q})$.

Для заданого ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ нехай $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$. Якщо для точки $x \in [0,1]$ існує послідовність $\{\alpha_k(x)\}$ така, що $\alpha_k(x) \in \{0,1\}$ і при цьому має місце рівність $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) a_k$, то формально записуватимемо

$$x = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1(x)\ \alpha_2(x)\ \dots\ \alpha_n(x)\ \dots} \tag{3}$$

Рівність (3) називається $\overrightarrow{a}$-представленням точки x зі спектру розподілу випадкової величини ξ ([**1**]).

У роботі ми показуємо декілька нових феноменів, які виникають при необмеженості $\{s_k\}$. По-перше, метричні властивості множини тих точок спектра випадкової величини ξ, які мають континуальну кількість $\overrightarrow{a}$-представлень суттєво залежать від властивостей послідовності $\{s_k\}$ (у випадку обмеженості вказаної послідовності досліджувана множина завжди має повну міру Лебега). Нами знайдено необхідні і достатні умови того, щоб майже всі (в сенсі міри Лебега) точки одиничного відрізка мали континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$-представлень. По-друге, ми показуємо, що розподіл випадкової величини ξ може бути абсолютно неперервним (у випадку обмеженості послідовності $\{s_k\}$ відповідний розподіл завжди сингулярно неперервний). У розділі 3 ми даємо повне поглиблення теореми Джессена–Вінтнера для вказаного класу мір, доводячи необхідні та достатні умови сингулярності та абсолютної неперервності. По-третє, ми показуємо, що у випадку необмеженості послідовності $\{s_k\}$ сімейство $\Phi(\tilde{Q})$ циліндричних відрізків породженого $\tilde{Q}$-представлення може бути недовірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на $[0,1]$. По-четверте, ми досліджуємо тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір вказаного типу, даючи точну формулу для обчислення розмірності Хаусдорфа мінімальних розмірнісних носіїв цих мір.

1. $\overline{a}$-представлення дійсних чисел та його метричні властивості

Нехай збіжний знакододатній ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ задовольняє означені раніше умови: існує зростаюча послідовність $\{m_k\}$ натуральних чисел така, що $m_1 = 1$ і

$$\begin{cases} a_{m_k} = a_{m_k+1} + \cdots + a_{m_k+s_k}, \\ s_k := m_{k+1} - m_k - 1 \geq 2, \quad k \in N, \\ r_j = a_j, \quad \text{при} \quad j \notin \{m_k\}. \end{cases} \tag{4}$$

$\overrightarrow{a}$-циліндром рангу m з основою $\alpha_1\alpha_1 \ldots \alpha_m$ $(\alpha_i \in \{0,1\})$ називається множина

$$\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \epsilon_k a_k, \quad \epsilon_k \in \{0,1\} \right\}. \tag{5}$$

З означення (5) та умов (4) випливають наступні властивості $\overrightarrow{a}$-циліндрів:

1. $\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = [\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k a_k, r_m + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k a_k]$;
2. $\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0} \cup \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1}$;
3. $\inf \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \inf \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0}$; $\quad \sup \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \sup \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1}$;
4. $\left|\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right| = r_m \to 0 \quad (m \to \infty)$;
5. $\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_k-1}\underbrace{1\,0\,0\,\ldots\,0}_{s_k+1}} = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_k-1}\underbrace{0\,1\,1\,\ldots\,1}_{s_k+1}}; \forall k \in N$
6. Для довільних $\gamma_j, \delta_j \in \{0,1\}$ таких, що

$$(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_k+1}) \neq (\delta_1\delta_2\ldots\delta_{s_k+1})$$

і

$$(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_k+1}) \notin \left\{ (\underbrace{1\,0\,0\,\ldots\,0}_{s_k+1}),\ (\underbrace{0\,1\,1\,\ldots\,1}_{s_k+1}) \right\}$$

має місце

$$Int(\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_k-1}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_k+1}}) \bigcap Int(\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_k-1}\delta_1\delta_2\ldots\delta_{s_k+1}}) = \varnothing,$$

7. $\frac{|\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_{k+1}}}|}{|\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_k}}|} = \frac{1}{2^{s_k+1}-1}$.

З означення та властивостей $\overrightarrow{a}$-циліндрів випливає, що для довільної послідовності α_k, $\alpha_k \in \{0,1\}$ і відповідної послідовності $\overrightarrow{a}$-циліндрів

$$\Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1} \supset \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2} \supset \ldots \supset \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \supset \ldots$$

існує єдине число $x \in [0,1]$ таке, що

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots} = x \in [0,1]. \tag{6}$$

І навпаки, для довільної точки $x \in [0,1]$ існує послідовність $\alpha_k = \alpha_k(x)$ така, що

$$x = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_m(x)\ldots}. \tag{7}$$

Представлення числа x у вигляді (7) називається $\overrightarrow{a}$-представленням числа x.

Покажемо, що розподіл випадкової величини ξ належать до класу нескінченних симетричних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями. Для цього опишемо множину точок, які мають континуальну кількість $\overrightarrow{a}$-представлень. З цією метою розглянемо $\widetilde{Q}$-представлення дійсних чисел (див. [**4**] для означення та основних властивостей $\widetilde{Q}$-представлення дійсних чисел), яке задається наступною «матрицею» $\widetilde{Q}$:

$$q_{ik} = \frac{1}{2^{s_k+1}-1}, \quad \forall i \in \{0,1,\ldots,2^{s_k+1}-2\}, \forall k \in N.$$

Зауважимо, що дане $\widetilde{Q}$-представлення дійсних чисел співпадає з розкладом дійсних чисел з одиничного відрізка в ряд Кантора при наступному виборі послідовності $\{n_k\}$, яка визначає розклад Кантора: $n_k = 2^{s_k+1}-1$ (див. [**3**] для означення розкладів Кантора та їх основних властивостей). Як відомо (див. [**4**]), при вказаній матриці $\widetilde{Q}$ для кожного числа $x \in [0,1]$ існує послідовність $\{\beta_k(x)\}$ така, що $\beta_k(x) \in \{0,1,\ldots,2^{s_k+1}-2\}$ і при цьому

$$x = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_k(x)\ldots} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(x)}{n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k}, \tag{8}$$

де $n_k = 2^{s_k+1}-1$. З властивостей $\overrightarrow{a}$-циліндрів випливає наступний зв'язок між $\overrightarrow{a}$-представленням та $\widetilde{Q}$-представленням: якщо

$$x = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{(\alpha_1(x)\ldots\alpha_{1+s_1}(x))(\alpha_{m_2}(x)\alpha_{m_2+1}(x)\ldots\alpha_{m_2+s_2}(x))\ldots(\alpha_{m_k}(x)\alpha_{m_k+1}(x)\ldots\alpha_{m_k+s_k}(x))\ldots},$$

то відповідне $\widetilde{Q}$-представлення має вигляд

$$x = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_k(x)\ldots},$$

де

$$\beta_k(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s_k} \alpha_{m_k+i}(x)\cdot 2^{s_k-i}, & \text{якщо } \ \alpha_{m_k}(x)=0; \\ -1+\sum\limits_{i=0}^{s_k} \alpha_{m_k+i}(x)\cdot 2^{s_k-i}, & \text{якщо } \ \alpha_{m_k}(x)=1. \end{cases} \tag{9}$$

Зауважимо, що існують точки з одиничного відрізка, які мають єдине $\overrightarrow{a}$-представлення. В якості прикладу можна взяти точку

$$x_0 = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{00\ldots0\ldots}$$

чи

$$x_1 = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{(\underbrace{100\ldots01}_{s_1+1})(\underbrace{100\ldots01}_{s_2+1})\ldots(\underbrace{100\ldots01}_{s_k+1})\ldots}.$$

У той же час існують точки з одиничного відрізка, які мають континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$-представлень. В якості прикладу можна вибрати точку

$$x_2 = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{(\underbrace{100\ldots00}_{s_1+1})(\underbrace{100\ldots00}_{s_2+1})\ldots(\underbrace{100\ldots00}_{s_k+1})\ldots} =$$

$$\Delta^{\overrightarrow{a}}_{(\underbrace{01\ldots11}_{s_1+1})(\underbrace{01\ldots11}_{s_2+1})\ldots(\underbrace{011\ldots11}_{s_k+1})\ldots}.$$

Позначимо через $K(\overrightarrow{a})$ множину тих точок з [0,1], які мають континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$-представлень.

Теорема 1. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} = +\infty, \tag{10}$$

то майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа мають континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$*-представлень, тобто* $\lambda(K(\overrightarrow{a})) = 1$.

Якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} < \infty, \tag{11}$$

то майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа мають скінченну кількість різних $\overrightarrow{a}$*-представлень, тобто* $\lambda(K(\overrightarrow{a})) = 0$.

Доведення. З властивостей $\overrightarrow{a}$-циліндрів та циліндрів $\widetilde{Q}$-представлення випливає, що дійсне число

$$x = \Delta^{\overrightarrow{a}}_{(\alpha_1(x)\ldots\alpha_{1+s_1}(x))(\alpha_{m_2}(x)\alpha_{m_2+1}(x)\ldots\alpha_{m_2+s_2}(x))\ldots(\alpha_{m_k}(x)\alpha_{m_k+1}(x)\ldots\alpha_{m_k+s_k}(x))\ldots}$$

має континуальну кількість $\overrightarrow{a}$-представлень тоді і тільки тоді, коли

$$(\alpha_{m_k}(x)\alpha_{m_k+1}(x)\ldots\alpha_{m_k+s_k}(x)) \in \left\{ (\underbrace{011\ldots11}_{s_k+1}),\quad \underbrace{100\ldots00}_{s_k+1}) \right\} \tag{12}$$

для нескінченної кількості значень параметра k, що, беручи до уваги формули переходу від $\overrightarrow{a}$-представлення до породженого $\widetilde{Q}$-представлення, рівносильно виконанню наступної умови:

$$\beta_k(x) = 2^{s_k} - 1 \quad \text{для нескінченної кількості значень параметра} \quad k. \tag{13}$$

Якщо ж умова (12) виконується для скінченної кількості значень параметра k, то x матиме скінченну кількість різних $\overrightarrow{a}$-представлень.

Отже,

$$K(\overrightarrow{a}) = \{x : \quad \beta_k(x) = 2^{s_k} - 1 \quad \text{для нескінченної кількості значень параметра} \quad k.\}$$

Розглянемо події $A_k = \{x : \beta_k(x) = 2^{s_k} - 1\}$. Оскільки події $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ незалежні відносно міри Лебега і $\lambda(A_k) = \frac{1}{2^{s_{k+1}-1}}$, то, беручи до уваги лему Бореля–Кантеллі, приходимо до висновку, що $\lambda(K(\overrightarrow{a})) = 1$ тоді і тільки тоді коли розбігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_{k+1}-1}}$. Остання умова, очевидно, є еквівалентною умові $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} = +\infty$, що й доводить теорему. □

Наслідок 1. *Якщо послідовність $\{s_k\}$ обмежена або містить обмежену підпослідовність, то майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа з одиничного відрізка мають континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$-зображень.*

Зауваження 1. *У наступному розділі буде встановлено тісний зв'язок метричних властивостей множини дійсних чисел з одиничного відрізка, які мають континуальну кількість різних $\overrightarrow{a}$-представлень, з лебегівською структурою розподілу вище означеної випадкової величини ξ.*

2. Лебегівська структура розподілу

Розглянемо розподіл випадкової величини ξ виду (1) з обмеженнями (4) на знакододатній ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Наступна теорема повністю поглиблює теорему Джессена–Вінтнера для випадкових величин вказаного типу.

Теорема 2. *Випадкова величина ξ має абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} < +\infty, \tag{14}$$

і сингулярно неперервний в усіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} = +\infty. \tag{15}$$

Доведення. Оскільки випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ — незалежні і набувають значень 0 та 1 з імовірностями $\frac{1}{2}$, то випадкові величини

$$\eta_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s_k} \xi_{m_k+i} \cdot 2^{s_k-i}, & \text{якщо} \quad \xi_{m_k} = 0; \\ -1 + \sum\limits_{i=0}^{s_k} \xi_{m_k+i} \cdot 2^{s_k-i}, & \text{якщо} \quad \xi_{m_k} = 1 \end{cases} \tag{16}$$

теж є незалежними і набувають значень

$$0, \quad 1, \quad \dots, \quad 2^{s_k}-2, \quad 2^{s_k}-1, \quad 2^{s_k}, \quad \dots, \quad 2^{s_k+1}-1$$

з імовірностями

$$\frac{1}{2^{s_k+1}}, \ \frac{1}{2^{s_k+1}}, \ \dots, \ \frac{1}{2^{s_k+1}}, \ \frac{2}{2^{s_k+1}}, \ \frac{1}{2^{s_k+1}}, \quad \dots, \frac{1}{2^{s_k+1}}$$

відповідно.

Беручи до уваги зв'язок між $\overrightarrow{a}$-представленням та породженим $\widetilde{Q}$-представленням, приходимо до висновку, що досліджувана випадкова величина ξ є випадковою величиною з незалежними $\widetilde{Q}$-символами. При цьому відповідні матриці $\widetilde{Q} = \|q_i k\|$ та $\widetilde{P} = \|\widetilde{p}_{ik}\|$ мають наступний вигляд:

$$q_{ik} = \frac{1}{2^{s_k+1}-1}; \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2^{s_k+1}-2\}, \ \forall k \in N.$$

$$\widetilde{p}_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{2^{s_k+1}}, \text{ якщо } i \neq 2^{s_k}-1, \ i \in \{0, 1, \dots, 2^{s_k+1}-2\}, \ \forall k \in N, \\ \frac{2}{2^{s_k+1}}, \text{ якщо } i = 2^{s_k}-1. \end{cases}$$

Як відомо [**4**], випадкова величина ξ чисто абсолютно неперервно розподілена тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i} \sqrt{\widetilde{p}_{ik} q_{ik}} > 0. \tag{17}$$

Перевіримо виконання умови (17):

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i} \sqrt{\widetilde{p}_{ik} q_{ik}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2^{s_{k+1}}-1} \cdot \frac{1}{2^{s_{k+1}}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2^{s_{k+1}}-1} \cdot \frac{1}{2^{s_{k+1}}}}}_{2^{s_k+1}-2} + \sqrt{\frac{1}{2^{s_{k+1}}-1} \cdot \frac{2}{2^{s_{k+1}}}} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{s_k+1}-2}{\sqrt{(2^{s_k+1}-1) \cdot 2^{s_k+1}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^{s_k+1} \cdot (s^{s_k+1}-1)}} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^{s_k+1}-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2^{s_k+1} \cdot (2^{s_k+1}-1)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2^{s_k+1}-2+\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1} \cdot (2^{s_k+1}-1)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4^{s_k+1} - 2 \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot 2^{s_k+1} + (2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1} \cdot (2^{s_k+1}-1)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4^{s_k+1} - 2^{s_k+1} + 2^{s_k+1} - 2 \cdot 2^{s_k+1} \cdot (2-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1} \cdot (2^{s_k+1}-1)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(4^{s_k+1} - 2^{s_k+1}) - 2^{s_k+1} \cdot (2 \cdot (2-\sqrt{2}) - 1) + (2-\sqrt{2})^2}{4^{s_k+1} - 2^{s_k+1}}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{2^{s_k+1}\left((3-2\sqrt{2}) - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1}}\right)}{2^{s_k+1} \cdot (2^{s_k+1}-1)}} =$$

$$= \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3-2\sqrt{2} - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1}}}{2^{s_k+1}-1}\right)}.$$

Як відомо,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, \quad 0 < a_k < 1.$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3-\sqrt{2} - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1}}}{2^{s_k+1}-1}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-2\sqrt{2} - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2^{s_k+1}}}{2^{s_k+1}-1} < +\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k+1}-1} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k+1}} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} < +\infty.$$

З теореми Джессена–Вінтнера випливає чистота розподілу випадкової величини ξ. Оскільки $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$, то з теореми Леві випливає, що ξ має неперервний розподіл. За доведеним, розподіл випадкової величини ξ є абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} < +\infty$. Тому розподіл ξ є сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли останній ряд розбігається. □

Наслідок 2. *Якщо послідовність $\{s_k\}$ обмежена, то ξ має сингулярно неперервний розподіл.*

Наслідок 3. *Випадкова величина ξ — має сингулярно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли майже всі (в сенсі міри Лебега) дійсні числа одиничного відрізка мають континуальну кількість $\overrightarrow{a}$-представлень.*

3. Фрактальні властивості розподілу

Як відомо, спектр є досить грубою характеристикою сингулярних розподілів ймовірностей. Зокрема, для досліджуваних в даній роботі розподілів всі спектри співпадають з одиничним відрізком. Значно тонше характеризує сингулярний розподіл сімейство його мінімальних розмірнісних носіїв (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича). Нагадаємо, що *розмірністю Хаусдорфа ймовірнісної міри* μ називається число

$$\dim_H \mu = \inf_{E \in B_\mu} \{\dim_H(E)\}$$

і B_μ сім‘я всіх носіїв ймовірнісної міри μ, тобто $B_\mu = \{E : \mu(E) = 1\}$.

Основним завданням даного розділу є знаходження явної формули для обчислення розмірності Хаусдорфа розподілу μ_ξ випадкової величини ξ. Вирішення вказаного вище завдання напряму пов'язано з проблемою довірчості системи $\widetilde{Q}$-циліндрів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Нагадаємо, що локально тонка система покриттів Φ називається довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \quad \forall E \subseteq [0,1].$$

У тому випадку, коли послідовність $\{s_k\}$ є обмеженою, використовуючи ті ж аргументи, що і в роботі [**2**], нескладно довести, що сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів породженого $\widetilde{Q}$-представлення є довірчою. У випадку необмеженості послідовності $\{s_k\}$ попередній висновок є, взагалі кажучи, неправильним. Наступна теорема встановлює необхідні і достатні умови того, щоб сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ було довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

Теорема 3. *Сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів породженого $\widetilde{Q}$-представлення є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_k}{s_1 + s_2 + \cdots + s_{k-1}} = 0. \tag{18}$$

Доведення. Як відзначалось вище, породжене $\widetilde{Q}$-представлення співпадає з розкладом Кантора, причому $n_k = 2^{s_k+1} - 1$. Проблема довірчості сімейства циліндрів розкладу Кантора досліджувалась в роботі [**3**]. Основним результатом цієї роботи був наступний: сімейство циліндрів розкладу Кантора є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{n_k\}$, яка визначає розклад Кантора, задовольняє умову $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 n_2 \ldots n_{k-1})} = 0$. Зауважимо, що на сьогодні це єдиний клас представлень, який породжує як довірчі, так і недовірчі сімейства циліндрів, для якого знайдено необхідні і достатні умови довірчості.

Тому сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів породженого $\widetilde{Q}$-представлення є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2^{s_k+1}-1)}{\ln(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\dots(2^{s_{k-1}+1}-1)} = 0. \tag{19}$$

Після перетворень отримаємо:

$$\frac{\ln(2^{s_k+1}-1)}{\ln(2^{s_1+1}-1)(2^{s_2+1}-1)\dots(2^{s_{k-1}+1}-1)} = \frac{(s_k+1)\ln 2 + \ln(1-\frac{1}{2^{s_k+1}})}{(k-1+\sum\limits_{j=1}^{k-1} s_j)\ln 2 + \sum\limits_{j=1}^{k-1}\ln(1-\frac{1}{2^{s_j+1}})} =$$

$$= \frac{\frac{s_k+1}{k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j} + \frac{\ln(1-\frac{1}{2^{s_k+1}})}{(k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j)\ln 2}}{1+\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\ln(1-\frac{1}{2^{s_j+1}})}{(k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j)\ln 2}}.$$

Оскільки $\frac{\ln(1-\frac{1}{2^{s_k+1}})}{(k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j)\ln 2} \to 0 \quad (k\to\infty)$ і величина $\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\ln(1-\frac{1}{2^{s_j+1}})}{k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j}$ є від'ємною і відділеною від -1 (бо $s_k \geq 2$), то рівність (19) має місце тоді і тільки тоді, коли $\frac{s_k+1}{k-1+\sum_{j=1}^{k-1} s_j} \to 0$ $(k\to\infty)$, що еквівалентно виконанню умови (18).

□

Теорема 4. *Якщо сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів породженого $\widetilde{Q}$-представлення є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, тобто коли виконується умова*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_k}{s_1+s_2+\dots+s_{k-1}} = 0, \tag{20}$$

то розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ дорівнює

$$\dim_H(\mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^{s_k}} - (s_k+1)\right]\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(2^{s_k+1}-1)}.$$

Якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{s_k}} < \infty, \tag{21}$$

то $\dim_H(\mu_\xi) = 1$.

Доведення. Нехай $\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x) = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — $\widetilde{Q}$-циліндр n-ого рангу, який містить точку x, μ — ймовірнісна міра, яка відповідає розподілу випадкової величини ξ. Тоді

$$\mu(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x)) = \frac{\epsilon_1}{2^{s_1+1}} \cdot \frac{\epsilon_2}{2^{s_2+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\epsilon_n}{2^{s_n+1}},$$

де $\epsilon_i = \begin{cases} 1, \alpha_i(x) \neq 2^{s_i} - 1, \\ 2, \alpha_i(x) = 2^{s_i} - 1. \end{cases}$

Нехай λ — міра Лебега на відрізку $[0,1]$.Тоді

$$\lambda(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x)) = \frac{1}{2^{s_1+1}-1} \cdot \frac{1}{2^{s_2+1}-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2^{s_n+1}-1}.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\ln \mu(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))}{\ln \lambda(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \epsilon_k - \ln 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (s_k+1)}{-\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(2^{s_k+1}-1)}.$$

Якщо $x = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ вибирається випадково так, що $\mathsf{P}(\alpha_j(x) = i) = \widetilde{p}_{ij}$ (тобто розподіл випадкової величини x співпадає з мірою $\mu = \mu_\xi$), то

$$\{\eta_j\} = \{\eta_j(x)\} := \{\ln \widetilde{p}_{\alpha_j(x)j}\}$$

є послідовністю незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$\mathsf{P}\{\eta_j = \ln \widetilde{p}_{ij}\} = \widetilde{p}_{ij}, \quad i = \overline{0, 2^{s_j+1}-2}.$$

Для застосування теореми Колмогорова, покажемо рівномірну обмеженість дисперсій.

$$\mathsf{M}\eta_j = \sum_{i=0}^{2^{s_j+1}-2} \widetilde{p}_{ij} \ln \widetilde{p}_{ij} = -\ln 2(s_k + 1 - \frac{1}{2^{s_k}}).$$

$$\mathsf{M}\eta_j^2 = \sum_{i=0}^{2^{s_j+1}-2} p_{ij} \ln^2 p_{ij} = ((s_k+1)^2 - \frac{2s_k+1}{2^{s_k}}) \cdot \ln^2 2.$$

$$\mathsf{D}\,\eta_j = \mathsf{M}\eta_j^2 - \mathsf{M}^2\eta_j = (\frac{1}{2^{s_k}} - \frac{1}{4^{s_k}}) \cdot \ln^2 2.$$

Легко бачити, що $\mathsf{D}\,\eta_j \leq \ln^2 2$. Виберемо $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(2^{s_k+1}-1)$. Очевидно, що $b_n \geq n$. Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\,\eta_n}{b_n^2} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n^2} < +\infty$.

Отже, за теоремою Колмогорова (посилений закон великих чисел) для μ-майже всіх точок $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n) - \mathsf{M}(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n)}{b_n} = 0.$$

Зауважимо, що

$$\mathsf{M}(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)=\mathsf{M}\eta_1+M\eta_2+\cdots+\mathsf{M}\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{s_k}}-(s_k+1)\right]\ln 2=H_k.$$

Позначимо $\mathbf{D}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k^{\widetilde{Q}}(x))}$,

$$\mathsf{D}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^{s_k}}-(s_k+1)\right]\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(2^{s_k+1}-1)}.$$

Нехай $\Phi=\Phi(\widetilde{Q})$-сімейство всіх $\widetilde{Q}$-циліндрів. Розглянемо множину

$$T=\left\{x:\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)-\mathsf{M}(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)}{\ln\lambda(\Delta_k^{\widetilde{Q}}(x))}\right)=0\right\}.$$

Оскільки $b_n=\ln\lambda(\Delta_n(x))$, то $\mu(T)=1$ і, отже, $\dim_\mu(T,\Phi)=1$.

Розглянемо наступні множини:

$$T_1=\left\{x:\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}-\frac{H_n}{-\ln\lambda(\Delta\widetilde{Q}_n(x))}\right)=0\right\};$$

$$T_2=\left\{x:\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))}{\ln\lambda(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))}\le\mathbf{D}\right\};$$

$$T_3=\left\{x:\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))}{\ln\lambda(\Delta_n^{\widetilde{Q}}(x))}\ge\mathbf{D}\right\};$$

Очевидно, що $T\subset T_1$. Нескладно довести по аналогії з ([**2**]), що $T_1\subset T_3$ і $T\subset T_2$.

Оскільки $T\subset T_2$, то $\dim_\lambda(T,\Phi)\le\dim_\lambda(T_2,\Phi)$. Враховуючи теорему 2.1. роботи [**5**], приходимо до висновку, що $\dim_\lambda(T_2,\Phi)\le\mathbf{D}$. Отже, $\dim_\lambda(T,\Phi)\le\mathbf{D}$.

Оскільки $T\subset T_3$, то $\dim_\lambda(T,\Phi)\le\dim_\lambda(T_3,\Phi)$. Враховуючи теорему 2.2. роботи [**5**], приходимо до висновку, що $\dim_\lambda(T,\Phi)\ge\mathbf{D}\cdot\dim_\mu(T,\Phi)=\mathbf{D}\cdot 1=\mathbf{D}$. Отже, $\dim_\lambda(T,\Phi)\ge\mathbf{D}$.

Ми показали, що $\dim_\lambda(T,\Phi)\le\mathbf{D}$ і $\dim_\lambda(T,\Phi)\ge\mathbf{D}$. Отже,

$$\dim_\lambda(T,\Phi)=\mathbf{D}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^{s_k}}-(s_k+1)\right]\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(2^{s_k+1}-1)}.$$

Доведемо, що побудована множина T є мінімальним розмірнісним носієм міри μ. Нехай C — деякий носій міри μ, тобто $\mu(C)=1$. Очевидно, що $C_1=C\cap T$ теж носій міри μ і $C_1\subset C$. Тому $\dim_\lambda(C_1,\Phi)\le\dim_\lambda(C,\Phi)$. Оскільки $C_1\subset T$, то

$$\dim_\lambda(C_1,\Phi)\le\dim_\lambda(T)=\mathbf{D}.$$

З іншого боку, $C_1 \subset T \subset T_3$.

Тому з теореми 2.2. роботи [**5**] випливає, що

$$\dim_\lambda(C_1, \Phi) \geq \mathbf{D} \cdot \dim_\mu(C_1, \Phi) = \mathbf{D} \cdot 1 = \mathbf{D}.$$

Отже, $\dim_\lambda(C_1, \Phi) = \dim_\lambda(T, \Phi) = \mathbf{D}$. Оскільки λ — міра Лебега, а сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів породженого $\widetilde{Q}$-представлення є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, то

$$\dim_H \mu = \dim_\lambda(T, \Phi) = \dim_H \lambda(T) = \mathbf{D}.$$

Останнє твердження теореми є очевидним, оскільки виконання умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}} < \infty$ гарантує абсолютну неперервність розподілу випадкової величини ξ. Тому будь-який її носій має додатну міру Лебега і, отже, повну розмірність Хаусдорфа–Безиковича. $\square$

Подяка. Ця робота частково підтримана SFB-701 (Bielefeld University).

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.,* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // Bull. Sci. Math.— 2008.— **132**, no. 8.— pp. 711–727.

[2] *Albeverio S., Torbin G.,* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math.— 2005.— Vol.129, № 4.— pp. 356–367.

[3] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorf dimension faithfulness for covering families and its application. arXiv:1305.6036 [math.PR] (submitted to Math. Res.Let.)

[4] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.,* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Methods of Functional Analysis and Topology.— 2011.— **17**, No.2.— pp. 97 – 111.

[5] *Billingsley P.*, Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math.— 1961.— **5**.— pp. 291–198.

[6] *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.,* Probability distributions on the set of incomplete sums of a convergent positive series // International Conference "Skorokhod Space. 50 years on— 17-23 June 2007, Kyiv, — Part II., — pp. 159–160.

[7] *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.,* Fractal properties of some Bernoulli convolutions // Theor. Probability and Math.Statist.— 2008.— № 79.— pp. 39–55

[8] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc.— 1935.— № 38.— pp. 48–88.

[9] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia Math.— 1931.— **3**.— pp. 119–155.