Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 233–247.

УДК 517.9

Максимальні напівгрупи стиску та дисипативні оператори в просторах $L^p(R^l, d^lx)$

М. І. Яременко

Інститут математики НАН України

Анотація. В статті вивчаються нелінійні напівгрупи стиску в просторі $L^p(R^l, d^lx)$. В роботі доведено, що максимальна напівгрупа стиску має щільно визначений генератор і вона є породженою максимальним дисипативним оператором, і навпаки, якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Ключові слова: нелінійна напівгрупа стиску, максимальний дисипативний оператор.

Maximum semigroup of contractions and dissipative operators in $L^p(R^l, d^lx)$ spaces

M. I. Yaremenko

Institute for Mathematics of NASU

Abstract. In this article we study nonlinear semigroups of contraction in $L^p(R^l, d^lx)$ spaces. It is proved that the maximum semigroup of contraction has generator is densely defined and that generator is the maximal dissipative operator, and conversely, if the maximum dissipative operator is unique, then semigroup generated by this operator is maximal semigroup of contraction.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

Key words: nonlinear semigroup of contraction, maximal dissipative operator.

1. Вступ

В роботі вивчаються нелінійні напівгрупи стиску в просторі $L^p(R^l, d^lx)$. Теорія напівгруп бурхливо розвивалася в другій половині 20-го століття в працях Хілле, Філліпса [8], Като [9 – 11], К.Іосіди, Браудера [4 – 6], Мінті [14, 15], Комури [12, 13]

E-mail: math.kiev@gmail.com

© М. І. Яременко, 2012

та інших і була пов'язана з потребами квантової механіки, де генератором напівгрупи є гамільтоніан деякої динамічної системи.

Серед напівгруп особливе значення мають стискуючі напівгрупи. У випадку так званих “m-диссипативних” операторів стискуючим напівгрупам відповідають саме m-диссипативні оператори, теорія яких зараз є достатньо глибокою і багатою на результати, зокрема, стосовно застосування до задачі Коші.

Аналогічна ситуація має місце для квазідисипативних операторів, тобто операторів $Diss(E, \omega)$, і нелінійних напівгруп типу ω. Основи цієї теорії було завершено в 1967 р. в працях Комури, Като, Браудера, Охару, Крендалла, Пазі , Брезіса, Барбю [1]. Низку важливих результатів про неперервність і гладкість напівгруп одержали Хілле, Філліпс, Като, К.Іосіда [8 – 16] та інш.

Проте слід зауважити, що скільки-небудь повної теорії, що встановлює зв'язок між напівгрупами довільних неперервних операторів і відповідними задачами Коші на даний час не існує. Дана робота хоча і не має своєю метою розробку повної теорії, але в ній досліджено нові важливі моменти теорії напівгруп стиску та зв'язку цих напівгруп з дисипативними операторами.

В роботі показано, що максимальна напівгрупа стиску завжди має щільно визначений генератор і навпаки.

2. Постановка задачі

Мета роботи показати — що максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і вона є породженою максимальним дисипативним оператором; якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Означення 1. Напівгрупа T_t називається максимальною напівгрупою стиску якщо не існує напівгрупи стиску з більш широкою областю визначення до якої вона може бути продовженою.

Означення 2. Відображення $\mathrm{A} : L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо

$$\left\langle f^{'} - g^{'}, (f-g)\,|f-g|^{p-2} \right\rangle \leq 0 \forall f^{'} \in \mathrm{A}f, g^{'} \in \mathrm{A}g,$$

де $\mathrm{A}f, \mathrm{A}g$ – множина значень відображення A елементів f і g відповідно.

Якщо A – однозначний оператор, то умова 2 набуває вигляду

$$\left\langle \mathrm{A}f - \mathrm{A}q, (f-g)\,|f-g|^{p-2} \right\rangle \leq 0 \forall f, g \in L^p\left(R^l, d^l x\right).$$

Зауваження 1. *Будь яка напівгрупа стиску може бути продовженою до максимальної напівгрупи стиску.*

Зауваження 2. *Максимальний дисипативний оператор необов'язково породжує максимальну напівгрупу стиску.*

3. Дослідження максимальних напівгруп стиску

Сформулюємо попередні твердження та деякі доведемо.

Твердження 1. *Нехай* $\{B_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ *і* $\{B'_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ *дві системи сфер в* $L^p(R^l, d^l x)$*:* $B_\alpha = \left\{f \in L^p(R^l, d^l x) : ||f - f_\alpha|| \le r_\alpha\right\} B'_\alpha = \left\{f \in L^p(R^l, d^l x) : ||f - f'_\alpha|| \le r'_\alpha\right\}$.

Якщо $||f_\alpha - f_\beta|| \ge ||f'_\alpha - f'_\beta||$ *і* $r_\alpha \le r'_\alpha$ $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ *тоді з того, що* $\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \ne \phi$ *випливає* $\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} B'_\alpha \ne \phi$.

Наслідок 1. *Нехай* $f_\alpha \in L^p(R^l, d^l x)$ *і* $q_\alpha \in L^p(R^l, d^l x)$, $\alpha \in \Gamma$ *і нехай* f *є довільний елемент з* $L^p(R^l, d^l x)$. *Якщо* $||f_\alpha - f_\gamma|| \ge ||q_\alpha - q_\beta||$ $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, *тоді існує елемент* $q \in L^p(R^l, d^l x)$ *такий, що вірною є нерівність* $||f_\alpha - f_\gamma|| \ge ||q_\alpha - q_\beta||$.

Твердження 2. *Нехай* Ω *випукла замкнута оболонка* $D(T_t)$. *Для будь-якого фіксованого натурального числа* k *існує відображення* $U_k : \Omega \to \Omega$ *таке, що*

$||U_k f - U_k q|| \le ||f - q||$ $\forall f, q \in \Omega$ *і* $U_k f = T_{2-k} f$ $\forall f \in D(T_t)$.

Якщо f'_0 *і* f''_0 *із* Ω *задовольняють*$||f''_0 -_{2-k} f|| \le ||f'_0 - f||\_$ $\forall f \in D(T_t)$, *тоді існує* U_k *розширення* T_{2-k} *таке, що* $U_k f'_0 = f''_0$.

Доведення. Нехай множина $\Omega - D(T_t)$ є упорядкованою як $\{f_\alpha\}$. Використовуючи трансфенітну індукцію побудуємо відображення U_k. Нехай U_k відображення стиску визначене для $\forall f_\beta : \beta < \alpha \forall q \in D(T_t) : U_k q = T_{2-k} q$.

І нехай $B(f - \varphi_1; \varphi_2) = \{f_1 : ||f_1 - \varphi_2|| \le ||f - \varphi_1||\}$.

Використовуємо твердження 1 для системи сфер

$\{B(f_\alpha - f_\beta; f_\beta), B(f_\alpha - q; q) : \beta < \alpha, q \in D(T_t)\}$ і

$\{B(f_\alpha - f_\beta; U_k f_\beta), B(f_\alpha - q; U_k q) : \beta < \alpha, q \in D(T_t)\}$, тоді

$\bigcap\limits_{\beta < \alpha} B(f_\alpha - f_\beta : f_\beta) \bigcap\limits_{y \notin D(T_t)} B(f_\alpha - q : q) \ne \phi$, оскільки до цього перетину належить f_α, випливає

$$\bigcap_{\beta < \alpha} B(f_\alpha - f_\beta : U_k f_\beta) \bigcap_{y \notin D(T_t)} B(f_\alpha - q; U_k q) \le B^0_\alpha \ne \phi$$

Позначимо через p проекцію $L^p(R^l, d^l x) \to \Omega$, тобто $pf = q$ при $||q - f|| = \inf\limits_{q_1 \in \Omega} ||q_1 - f||$.

Оскільки є вірною нерівність для норм

$||p\phi_1 - f|| \le ||\phi - f|| \forall f \in \Omega, \quad \phi_1 \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$, отже для має місце належність $\varphi_3 \in B^0_\alpha$ звідки маємо $pf_3 \in B^0_\alpha$.

Виберемо елемент $f^0_\alpha \in B^0_\alpha \bigcap \Omega$ і нехай $U_k f_\alpha = f^0_\alpha$, тоді U_k є стиском на $D(T_t) \bigcup \{f_\beta : \beta \leq \alpha\}$.

Використовуючи трансфенітну індукцію ми одержали потрібні відображення U_k. Твердження 2 доведене.

Розглянемо напівгрупи $T^\alpha = \left\{T^\alpha_t : t = \frac{j}{2^k}, \_j = 0, 1, 2, ...\right\}$, де $T^\alpha_{2-k} = U^\alpha_k$ і $T^\alpha_{t+s} = T^\alpha_t T^\alpha_s$ при $t = \frac{j}{2^k}$, $s = \frac{j}{2^k}$, а множина всіх відображень $\{U^\alpha_k : \alpha \in \Gamma\}$ із твердження 2.

Позначимо через τ_k множину $\{T^\alpha : \alpha\}$ і визначимо канонічне відображення для $n \geq k$

$J_{n,k} : \tau_n \to \tau_k$ як $J_{n,k} T^\alpha = T^\beta$ при $T^\alpha_{2-k} = T^\beta_{2-k}$, де $T^\alpha \in \tau_k$, $T^\beta \in \tau_n$.

Зауважуючи, що

$$J_{m,n} : J_{n,k} : \tau_m \to \tau_n \to \tau_k, J_{m,n} J_{n,k} T^\alpha = J_{m,n} J_{n,k} T^\beta = T^\gamma,$$

$$T^\alpha_{2-k} = T^\beta_{2-k} = T^\gamma_{2-k}, T^\alpha \in \tau_k, T^\beta \in \tau_n, T^\gamma \in \tau_m,$$

одержуємо твердження $J_{m,n} J_{n,k} = J_{m,k}, \_D(J_{n,k}) = \tau_n$.

А отже покладемо $A^\alpha_k = (T^\alpha_{2-k} - I)$ для $T^\alpha \in \tau_k$. □

Твердження 3. *При кожному фіксованому $\varphi \in \Omega$ множина $\{T^\alpha_t \varphi : \alpha\}$ неперервна по t в наступному сенсі*

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \delta > \frac{1}{2^k} \Rightarrow ||T^\alpha_{2-k} \varphi - \varphi|| < \varepsilon$ *при* $\forall T^\alpha \in \tau_k$.

Доведення. Нехай

$$\varphi = \mu_1 f_1 + ... + \mu_n f_n, \quad f_j \in D(T_t), \quad 0 \leq \mu_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1,$$

де j_i лінійно незалежні елементи в $L^p(R^l, d^l x)$.

$||T^\alpha_{2-k} \varphi - T^\alpha_{2-k} f_j|| \leq ||\varphi - f_j||$, при $j = 1, 2, ..., n$ і $T^\alpha \in \tau_k$.

Вибираючи k достатньо великим, а δ малим і так, що $\frac{1}{2^k} < \delta$ одержимо

$||T^\alpha_{2-k} f_j - f_j|| < \sigma_1$, для довільного σ_1.

Отже $||T^\alpha_{2-k} \varphi - f_j|| \leq ||\varphi - f_j|| + \sigma_1$.

Використаємо математичну індукцію. Позначимо через p_j ортогональну проекцію на лінійний многовид, що утворений елементами f_k, $\_\_k = j$, при $n = n_0 + 1$, для n_0 - твердження вірне за припущенням , тоді

$$||p_j T^\alpha_{2-k} \varphi - T^\alpha_{2-k} \varphi|| \leq ||p_j \varphi - \varphi|| + \sigma_2,$$

оскільки

$$||p_j T^\alpha_{2-k} \varphi - f_j|| \leq ||p_j \varphi - f_j|| + \sigma_1,$$

а отже $\mu'_j \geq \mu'_j - \sigma_3, \quad j = 1, 2, ..., n,$

де позначимо $pT^{\alpha}_{2-k}\varphi = \sum_{k=1}^{n} \mu'_k f_k$ і p є ортогональною проекцією на лінійний многовид утворений елементами $\{f_k : 1 \leq k \leq n\}$. Тобто $\mu_j + n\sigma_3 \geq \mu'_j \geq \mu_j - \sigma_3$, оскільки $\mu'_j \leq 1 - \sum_{k=j} \mu'_k$.

Внаслідок $||pT^{\alpha}_{2-k}\varphi - T^{\alpha}_{2-k}\varphi|| < \varepsilon$ і $||pT^{\alpha}_{2-k}\varphi - \varphi|| < \varepsilon$ одержуємо $||T^{\alpha}_{2-k}\varphi - \varphi|| \leq 2\varepsilon$, але для довільного елемента $\Psi \in \Omega$ підберемо $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j, \quad f_j \in D(T_t)$ такі, щоб із

$||\Psi - \varphi|| < \varepsilon$, випливало

$||T^{\alpha}_{2-k}\Psi - \psi|| \leq ||T^{\alpha}_{2-k}\Psi - T^{\alpha}_{2-k}\varphi|| + ||T^{\alpha}_{2-k}\varphi - \varphi|| + ||\varphi - \Psi|| \leq 4\varepsilon$. Твердження 3 доведене. □

Твердження 4. *Нехай $q^{\alpha}_{k,n} = (I - \lambda A^{\alpha}_k)^{-1} f_n$ для фіксованих $f_j \in \Omega \subset L^p(R^l, d^l x)$. Тоді множина $F_k(\lambda) \leq \left\{ \left(q^{\alpha}_{k,n}\right)^m_{n=1} \right\} \subset L^p(R^l, d^l x) \times ... \times L^p(R^l, d^l x)$*

m-раз для фіксованого $\lambda > 0$ є випуклою і замкненою і

$$\sup_{(q'_n) \in \bigcup F_k(\lambda)} \sqrt{\sum ||q'_n - f_n||^2} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0.$$

Доведення. Припустимо, що $\left(q^{\alpha_j}_{k,n}\right)^m_{n=1} \in F_k = F_k(\lambda)$, $\_q^{\alpha_j}_{k,n} \to q_{k,n}$ при $j \to \infty$.

Тоді маємо $T^{\alpha_j}_{2-k} q^{\alpha_j}_{k,n} = \left(\mathrm{I} + \frac{1}{\lambda 2^k}\right) q^{\alpha_j}_{k,n} - \frac{1}{\lambda 2^k} f_n \xrightarrow[j \to 0]{} q'_n = \left(\mathrm{I} + \frac{1}{\lambda 2^k}\right) q_{k,n} - \frac{1}{\lambda 2^k} f_n$

Оскільки, відображення $U_k = T_{2-k}$ задане на $D(T_t)$ і $U_k q_{k,n} = q'_{k,n}$ є стиском, тоді використовуючи твердження 2 одержуємо $\left(q^{\alpha_j}_{k,n}\right)^m_{n=1} \in F_k$, і F_k є замкненим.

Нехай $\left(q^{\alpha}_{k,n}\right), \left(q^{\beta}_{k,n}\right) \in F_k$, тоді

$$q^{\alpha}_{k,n} - \lambda 2^k \left(T^{\alpha}_{2-k} q^{\alpha}_{k,n} - q^{\alpha}_{k,n}\right) = f_n, q^{\beta}_{k,n} - \lambda 2^k \left(T^{\beta}_{2-k} q^{\beta}_{k,n} - q^{\beta}_{k,n}\right) = f_n,$$

або $T^{\alpha}_{2-k} = U^{\alpha}_k$, $T^{\beta}_{2-k} = U^{\beta}_k$,

отже після віднімання одержимо, що $\lambda 2^k \left(U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n}\right) = \left(\lambda 2^k + 1\right) \left(q^{\alpha}_{k,n} - q^{\beta}_{k,n}\right)$.

Приймаємо $\varphi^1_n = \frac{1}{2}\left(q^{\alpha}_{k,n} - q^{\beta}_{k,n}\right)$, $\varphi^2_n = \frac{1}{2}\left(U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n}\right)$, $1 \leq n \leq m$.

Нехай для деяких n_1 і n_2 виконується $||\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}|| > ||\varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2}||$, тоді якщо

$\left\langle q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}, \left(\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right) \left|\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right|^{p-2} \right\rangle \geq$

$\geq \left\langle q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}, \left(\varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2}\right) \left|\varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2}\right|^{p-2} \right\rangle$, тоді

$$\left\| \frac{\lambda 2^k + 1}{\lambda 2^k} \left(q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}\right) + \left(\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right) \right\| >$$
$$> \left\| \left(q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}\right) + \left(\varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2}\right) \right\|,$$

і аналогічно з

$\left\langle q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}, \left(\varphi^2_{n_1} - \varphi^1_{n_2}\right) \left|\varphi^2_{n_1} - \varphi^1_{n_2}\right|^{p-2} \right\rangle \leq$

$\leq \left\langle q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}, \left(\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right) \left|\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right|^{p-2} \right\rangle$ випливає

$$\left\| \frac{1 + 2^k \lambda}{2^k \lambda} \left(q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2}\right) + \left(\varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2}\right) \right\| >$$

$$> \left\| \left(q^{\alpha}_{k,n_1} - \varphi^1_{n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} + \varphi^1_{n_2} \right) - \left(\varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2} \right) \right\|,$$

а отже завжди вірна хоча б одна з нерівностей

$\left\| U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n_1} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_2} \right\| > \left\| q^{\alpha}_{k,n_1} - q^{\alpha}_{k,n_2} \right\|$,

$\left\| U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_1} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_2} \right\| > \left\| q^{\beta}_{k,n_1} - q^{\beta}_{k,n_2} \right\|$, а це суперечить тому що U^{α}_{k,n_1} і U^{β}_{k,n_1} є стисками.

Тобто маємо $\left\| \varphi^2_{n_1} - \varphi^2_{n_2} \right\| \le \left\| \varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_2} \right\|$, $1 \le n_1,\, n_2 \le m$.

Оскільки,

$\left\| U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n_1} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_1} \right\| \ge \left\| q^{\alpha}_{k,n_1} - q^{\beta}_{k,n_1} \right\|$ так як

$\left\| U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n_1} - U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_1} \right\| = \frac{2^k\lambda+1}{2^k\lambda} \left\| q^{\alpha}_{k,n_1} - q^{\beta}_{k,n_1} \right\|$ і

$$\left\| U^{\alpha}_k q^{\alpha}_{k,n_1} - T_{2-k} q \right\| \le \left\| q^{\alpha}_{k,n_1} - q \right\|$$

$\left\| U^{\beta}_k q^{\beta}_{k,n_1} - T_{2-k} q \right\| \le \left\| q^{\beta}_{k,n_1} - q \right\|$, при $q \in D(T_t)$

$\left\| \varphi^2_{n_1} - T_{2-k} q \right\| \le \left\| \varphi^1_n - q \right\|$, при $\forall q \in D(T_t)$.

Внаслідок твердження 2 існує стиск U^{γ}_k на $\Omega \subset L^p(R^l, d^l x)$ такий, що $U^{\gamma}_k \varphi^1_{n_1} = \varphi^2_{n_1}$ при $1 \le n \le m$, $U^{\gamma}_k = T_{2-k}$ на $D(T_t)$.

Напівгрупа $T^{\gamma}_t \in \tau_k$ визначена U^{γ}_k задовольняє

$\varphi^1_{n_1} - \lambda 2^{-k} \left(T^{\gamma}_{2-k} \varphi^1_{n_1} - \varphi^1_{n_1} \right) = f_n$, $1 \le n \le m$ це означає, що $\left(\varphi^1_{B_1} \right)^m_{n_1=1} \in F_k$, а отже F_k є випуклою і замкненою множиною.

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді існує послідовність

$\{\lambda_j \downarrow 0\}$ і $_{-}\left\{ (q^j_n)^m_{n=1} \in \bigcup\limits_k F_k(\lambda_j)_{-} \right\}$ і таке, що $||q^j_n - f|| \ge \varepsilon$.

Оскільки, $q^j_n - 2^{k_j} \lambda_j \left(T^{\gamma}_{2-k_j} q^j_n - q^j_n \right) = f_n$, де $(q^j_n)^m_n \in F_{k_j}$, це суперечить неперервності $\{T^{\alpha}_t f : \alpha\}$. Твердження 4 доведено. □

Використовуючи твердження 4 одержуємо, що множина $\left\{ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \right.$ {задовольняє в слабкій топології $\left. \left. \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} F_k \right\} \right\} = F_\infty$ є не порожнюю множина.

Твердження 5. *Для всіх $f \in F_\infty$ існує послідовність $\left\{ f^{\alpha_j}_{k_j} \in F_{k_j} : j \in \mathrm{N} \right\}$ така що $\lim\limits_{j\to\infty} ||f^{\alpha_j}_{k_j} - f|| = 0$.*

Доведення. Визначимо форму на $L^p \times ... \times L^p$ покладаючи

$$\langle (f_n), (q_n) \rangle \equiv \sum_{m=1}^{n} \langle f_m, q_m \, |q_m|^{p-2} \rangle,$$

Тоді вона породить норму $||(f_n)|| = \left(\sum_{m=1}^n ||f_m||^p_p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Позначимо

$A^{\alpha}_k = 2^k (T_{2-k} - \mathrm{I})$ і $f^{\alpha}_k = (\mathrm{I} - \lambda A^{\alpha}_k)^{-1} q$,для $T^{\alpha} \in \tau_l$ і $k \le l$.

Тоді для будь якого $\varepsilon > 0$ існує номер $k(\varepsilon)$ такий, що при $m \geq k \geq k(\varepsilon)$, $T^\alpha \in \tau_l$ виконується нерівність $||f_m^\alpha - f_k^\alpha|| < \varepsilon$.

Нехай $f_k^{\alpha_k} \in F_k$ і $||f - f_k^{\alpha_k}|| = \inf\limits_{f_1 \in F_k} ||f - f_1||$.

Існування і єдність елемента $f_k^{\alpha_k} \in F_k \subset L^p(R^l, d^l x)$ гарантує твердження 4.

Припустимо супротивне $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^{\alpha_k} = f$. Тобто існує число σ таке що $\lim\limits_{j\to\infty} ||f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}|| = \sigma > 0$ для деякої послідовності $\{k_j\}$. Можливі два випадки, або $\left\{ f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\}$ фундаментальна або ні.

Нехай $f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}$ фундаментальна, тоді покладемо $\varphi = \lim\limits_{j\to\infty} f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}$, отже $||\varphi - f|| = \sigma$, тобто $\bigcup\limits_m F_m$ - обмежена множина і $\sup\limits_{f_1 \in \bigcup\limits_m F_m} ||f_1 - f_{k_j}|| < M < \infty$.

Оскільки F_{k_j} випукла і замкнена, отже $f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \in F_{k_j}$, маємо
$\left\langle f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}, \left(\psi - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}\right) \left|\psi - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}\right|^{p-2} \right\rangle \leq 0$ для $\psi \in F_{k_j}$
і $\psi \in \bigcup\limits_{m \geq k_j} F_m$, маємо

$$\langle f - \varphi, (\psi - \varphi) |\psi - \varphi|^{p-2} \rangle \leq \left\langle f - f_{\alpha_j}^{\alpha_{k_j}}, \left(\Psi - f_{\alpha_j}^{\alpha_{k_j}}\right) \left|\Psi - f_{\alpha_j}^{\alpha_{k_j}}\right|^{p-2} \right\rangle + \varepsilon \left(||f - \varphi|| + \right.$$
$$\left. + ||\psi - \varphi|| \leq \varepsilon(\sigma + M).\right.$$

Перейдемо до слабкої границі коли $\psi \to f$.

Але це неможливо тому, що маємо протиріччя для чисел ε таких, що $\varepsilon(\sigma + M) < \frac{\sigma^p}{p}$.

Розглянемо випадок коли послідовність $\left\{ f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\}$ не фундаментальна, отже
$\exists \eta > 0\_\forall j \exists m > j : \left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} - f_{k_m}^{\alpha_{k_m}} \right\| \geq \eta$, але при $\alpha \leq \alpha_{k_m}$ маємо, що

$$\left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} - f_{k_m}^{\alpha_{k_m}} \right\| \geq \left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} - f_{k_m}^{\alpha_{k_m}} \right\| - \left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_m}} - f_{k_m}^{\alpha_{k_m}} \right\| \geq \eta - \varepsilon$$

для достатньо великих k_j одержуємо

$$\left| ||f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}}|| - \sigma \right| < \varepsilon,$$

а отже, використовуючи після того як покладемо $\psi = f_{k_j}^{\alpha_{k_m}}$, одержуємо $\left\| f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\| + \left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} - f_{k_j}^{\alpha_{k_m}} \right\| \leq \left\| f - f_{k_j}^{\alpha_{k_m}} \right\| \leq \left(\left\| f - f_{k_m}^{\alpha_{k_m}} \right\| + \varepsilon \right)$.
Нехай $m = k_j$, __$i > j$, тоді внаслідок
$\left\| f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\| \geq \sigma - \varepsilon$ і $\left\| f - f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\| \leq \sigma + \varepsilon$,
випливає

$$\left\| f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} - f_{k_i}^{\alpha_{k_i}} \right\| \leq 6\sigma\varepsilon + 2\varepsilon^2,$$

що рівносильне фундаментальності послідовності елементів $\left\{ f_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \right\}$. Твердження 5 доведене. □

Твердження 6. *Нехай множина* $\Phi \equiv \{\varphi \equiv \{(\alpha, k)\}\}$ *є ультрафільтром і* $\lim\limits_{(\alpha,k)\in\varphi\in\Phi} = \infty$*, тоді існує фільтр* $\psi \equiv \{\varphi \equiv \{(\alpha, k)\}\}$ *такий, що*

$$\lim_{\psi}(\mathrm{I} - \lambda A_k^{\alpha})^{-1} f = \omega - \lim_{\Phi}(\mathrm{I} - \lambda A_k^{\alpha})^{-1} f \forall \in \Omega.$$

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$ і довільної скінченої множини $\{f_1, ..., f_m\} \subset \Omega$, визначимо

$\varphi\{f_1, ..., f_m; f_m\varepsilon\} \equiv \{(\alpha_1, k_1) : ||\omega - \lim\limits_{\Phi}(\mathrm{I} - \lambda A_k^{\alpha})^{-1} f_n - (\mathrm{I} - \lambda A_{k_1}^{\alpha_1})^{-1}|| < \varepsilon, 1 \leq n \leq m\}$,

оскільки існує $\omega - \lim\limits_{\Phi}(\mathrm{I} - \lambda A_k^{\alpha})^{-1} f$ в Ω. Використовуючи твердження 5 кожна множина $\varphi\{f_1, ..., f_m; \varepsilon\}$ неперервна і містить послідовність $\{(\alpha_j, k_j)\}$ і $\lim\limits_{j\to\infty} k_j = \infty$. Отже множини $\varphi\{f_1, ..., f_m; \varepsilon\}$ породжують ультрафільтр Ψ. Твердження 6 доведене. □

Твердження 7. *Для всіх* $f \in \Omega$ *і* $m = 0, 1, 2, ...$*існує фільтр* Ψ_∞ *такий, що*

$$q_m(f) = \lim_{\Psi_\infty}(\mathrm{I} - 2^{-m} A_k^{\alpha})^{-1} f.$$

Доведення. Використовуючи твердження 6 при $\lambda = 1$ позначимо

$$\Psi_0 = \{\varphi = \varphi^0(f_1, ...f_n; \varepsilon) : f_1, ...f_n \in \Omega, \quad \varepsilon > 0\}.$$

Визначимо дисипативний в $L^p(R^l, d^l x)$ оператор

$$A^0 q \leq \{q - f : q \leq q_0(f)\}, q_0(f) = \lim_{\Psi_\infty}(\mathrm{I} - 2^{-m} A_k^{\alpha})^{-1} f.$$

Нехай Ψ_0^0 ультрафільтр, що містить фільтр Ψ_0, такий завжди існує, тоді для кожного $f \in \Omega$

$q_1(f) = \omega - \lim\limits_{\Psi_0^0}(\mathrm{I} - 2^{-1} A_k^{\alpha})^{-1} f$ існує в Ω, приймаючи $q_{o,k}^{\alpha}(f) = (\mathrm{I} - A_k^{\alpha})^{-1} f$, маємо

$$q_{o,k}^{\alpha}(f) = (\mathrm{I} - 2^{-1} A_k^{\alpha})^{-1}(2^{-1} f + 2^{-1} q_{o,k}^{\alpha}(f)),$$

оскільки, $q_0(f) = \lim\limits_{\Psi_0^0}(\mathrm{I} - 2^{-1} A_k^{\alpha})^{-1}(2^{-1} f + 2^{-1} q_o^{\alpha}(f))$, далі

$$A^1 q = \{2(q - f) : q \leq q_1(f)\}.$$

Оскільки $2^{-1} f + 2^{-1} q_0(f) \in \Omega$ маємо $A^o \subset A^1$, тепер $\lambda = 2^{-1}$ і $\Psi_1 = \{\varphi = \varphi^1(f_1, ...f_n; \varepsilon) : f_1, ...f_n \in \Omega, \_\_\varepsilon > 0\}$, тоді для всіх $f \in \Omega$, маємо

$q_1(f) = \lim\limits_{\Psi_1}(\mathrm{I} - 2^{-1} A_k^{\alpha})^{-1} f$ і $\Psi_0 \subset \Psi_1$.

Продовжуємо цей процес і одержуємо послідовність дисипативних операторів $\{A^n\}$ і фільтрів $\{\Psi_n\}$ індексів (α, k), отже

$$A^0 \subset A^1 \subset ...,$$

$$\Psi_0 \subset A\Psi_1 \subset ...,$$

$q_n(f) = \lim_{\Psi_n}(\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}f\_\_\forall f \in \Omega$ - існує

$$A^n q = \{2^n(q - f) : q_n(f) = q\}.$$

Фільтр $\Psi_\infty = \{\varphi > \varphi^n : \varphi^n \in \Psi_n\}$ задовольняє твердження 7. $\square$

Твердження 8. *Нехай A максимальний дисипативний оператор, тоді*

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} ||f - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}f|| = \inf_{q\in D(A)\subset L^p} ||f - q|| \forall f \in L^p(R^l, d^l x).$$

Доведення. Внаслідок $(\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}f \in D(A)$, маємо

$$||f - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}f|| = \inf_{q\in D(A)} ||f - q||, \lambda > 0$$

Якщо $q \in D(A)$ і $q_1 \in Aq$ покладемо $q_\lambda = q - \lambda q_1$, тоді $q_\lambda \to q$ при $\lambda \downarrow 0$, отже $(\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}$ стиск і $\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}$ також оператор стиску.

Отже маємо

$||\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}f - (\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1})\, q_\lambda|| \leq ||f - q_\lambda|| \underset{\lambda\downarrow 0}{\longrightarrow} ||f - q||$, тобто

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \left(\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}\right) q_\lambda = \lim_{\lambda\downarrow 0}(q_\lambda - q) = 0,$$

а також маємо

$\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} || \left(\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}\right) f|| \leq ||f - q||$, що разом з $||f - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1}f|| = \inf_{q\in D(A)} ||f - q|| \forall \lambda > 0$ задовольняє твердження 8. $\square$

Теорема 1. *Область визначення максимальної напівгрупи стиску $\{T_t\}$ є замкненою випуклою множиною, яка не міститься в будь які замкнені гіпер-площини.*

Доведення. Від супротивного, нехай $D(T_t)$ є власною підмножиною випуклої замкненої оболонки Ω.

Визначимо дисипативний оператор A щільно визначений в Ω, як

$Aq = \{2^n(q - f) : \exists_n, \_q_n(f) = q\}$, де $q_n(f) = \lim_{\Psi_\infty}(\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}f$ і Ψ_∞ - фільтр, що визначений раніше.

Множина A є об'єднанням множин A^n, де A^n оператор визначений раніше.

Внаслідок $D\left((\mathrm{I} - 2^{-n}A^n)^{-1}\right) = \Omega$, одержуємо

$$D\left((\mathrm{I} - 2^{-n}A^n)^{-1}\right) \supset \Omega, \_n \in N \bigcup \{0\}.$$

Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) \in Au(t), \\ u(t) \in \Omega, u(0) = q_o \in (\Omega \backslash D(T_t)) \bigcap D(A) \end{cases}$$

її можна наблизити послідовністю задач Коші виду

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dt}u(t)=A_nu_n(t),\\ u_n(t)\in\Omega,u_n(0)=q_o-2^{-n}q_0^0,q_0^0=\lim\limits_{\varphi\infty}(\mathrm{I}-A_k^\alpha)^{-1}f_0-f_0\end{array}\right.,$$

де f_0 є елементом q_0-Aq_0, а A_n є відображення:

$$f-2^{-n}f_1\to f_1,f\in D(A),f_1\in Af.$$

Нехай $P:L^p(R^l,d^lx)\to\Omega$ є проекцією, тобто $Pf=q\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$ і $||q-f||=\inf\limits_{q^1\in\Omega}||q^1-f||$. Визначимо послідовність $u_n^m(t)$ покладаючи за індукцією

$$u_n^0(t)=q_0-2^{-n}q_0^0,u_n^{m+1}(t)=P(q_0+\int_0^tA_nu_n^m(s)ds).$$

Тоді $u_n^m(t)\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$, і

$$\left\|u_n^{m+1}(t)-u_n^m(t)\right\|=\left\|P\left(q_0+\int_0^tA_nu_n^m(s)ds\right)-P\left(q_0+\int_0^tA_nu_n^m(s)ds\right)\right\|\le$$

$$\le\int_0^t||A_nu_n^m(s)-A_nu_n^{m-1}(s)||ds.$$

Внаслідок ліпшецевості A_n, маємо $\sum||u_n^{m+1}(t)-u_n^m(t)||<\infty$, отже існує $u_n(t)=\lim\limits_{m\to\infty}u_n^m(t)$.

Внаслідок теорем наведених раніше, $u_n(t)$ задовольняє рівняння в наближеній задачі Коші і $\{u_n(t)\}_{n=0}^\infty$ прямує до функції $u_n(t)$ рівномірно по t на $[0,t_0]$ і функція $u_n(t)$ задовольняє рівняння в початковій задачі Коші.

Покажемо, що

$$\tilde{T}_t(f)=\left\{\begin{array}{l}T_tf,f\in D(T_t)\\ u(t+s),f=u(s),s\ge0\end{array}\right.$$

є дійсно напівгрупою стиску.

Внаслідок дисипативності A із $||U_kf-U_kq||\le||f-q||$ $\forall f,q\in\Omega$ i $U_kf=T_{2-k}f$ $\forall f\in D(T_t)$, маємо

$||u(s+t)-u(s_1+t)||\le||u(s)-u(s_1)||$, при $s,s_1,t\ge0$, отже

$||u(s+t)-T_tf||\le||u(s)-f||$ при $f\notin D(T_t)$, $s,t>0$.

Нехай $s,t,s+t\in[0,r]$, $r\in R_+$. Визначимо дискритивні напівгрупи:

$T_{2-k}^{\alpha,n}=2^{-k}(\mathrm{I}-2^nA_k^\alpha)^{-1}+\mathrm{I}$, $T_0^{\alpha,n}=\mathrm{I}$, $T_{t+s}^{\alpha,n}=T_t^{\alpha,n}T_s^{\alpha,n}$, при $t=J2^{-k},s=J_12^{-k}$.

Внаслідок того, що $(\mathrm{I}-2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}$ і $2^{-k}A_k^\alpha=T_{2-k}^\alpha-\mathrm{I}$ є стиском, $\{T_t^{\alpha,n}:t=J2^{-k},J=0,1,...\}$ є напівгрупою стиску.

Оскільки $A_k^{\alpha,n}=2^{-k}(T_{2-k}^{\alpha,n}-\mathrm{I})=A_k^\alpha(\mathrm{I}-2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}$ є дисипативним, маємо

$$||A_k^{\alpha,n}T_t^{\alpha,n}f||\le||A_k^{\alpha,n}f||,f\in\Omega\subset L^p(R^l,d^lx).$$

Покажемо, що $||T_t^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_t^{\alpha,m}u_m^\alpha|| \le \varepsilon$ для

$$u_n^\alpha = q_k^\alpha - 2^{-n}q_k^{\alpha_1}, q_k^\alpha = (\mathrm{I} - A_k^\alpha)^{-1}f_0, q_k^{\alpha_1} = q_k^\alpha - f_0 = A_k^\alpha q_k^\alpha,$$

при $n, m \ge n_0$, $(\alpha, k) \in \varphi_0 \in \Psi_\infty$, $0 \le t \le J2^{-k} \le r$.

Дійсно,

$$||T_{j2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{j2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha||^p - ||u_n^\alpha - u_m^\alpha||^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1}(||\, T_{(i+1)2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{(i+1)2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha||^p - ||T_{(i+1)2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{(i+1)2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha\,||^p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} 2^{1-k}\langle A_k^{\alpha,n}T_{j2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - A_k^{\alpha,m}T_{j2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha, \left(T_{j2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{j2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha\right)\left|T_{j2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{j2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha\right|^{p-2}\rangle +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} 2^{1-k}||A_k^{\alpha,n}T_{j2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - A_k^{\alpha,m}T_{j2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha||^p.$$

Оскільки

$$\langle A^{\alpha,n}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - A_k^{\alpha,m}T_{i2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha, \left((\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - (\mathrm{I} - 2^{-m}A_k^\alpha)^{-1}T_{i2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha\right)$$
$$\left|(\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - (\mathrm{I} - 2^{-m}A_k^\alpha)^{-1}T_{i2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha\right|^{p-2}\rangle \le 0$$

і

$||T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - (\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha|| \le 2^{-n}||A^{\alpha,n}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha||$, маємо із $||A_k^{\alpha,n}T_t^{\alpha,n}f|| \le ||A_k^{\alpha,n}f||$, $f \in \Omega \subset L^p(R^l, d^l x)$, що $||T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - T_{i2^{-k}}^{\alpha,m}u_m^\alpha||^p \le 4r||q_k^{\alpha_1}||^p(2^{-n} + 2^{-m} + 2^{-k})$, при $j2^{-k} \le 2$.

Позначимо $t_k = j_k 2^{-k}$, $j_k = [t2^k]$, _$0 \le t \le r$, де n - довільне фіксоване число з N, і

$$\rho_j = ||T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha - u_n(j2^{-k})||.$$

Внаслідок того,що

$$T_{(i+1)2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha = T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha + \int_0^{2^{-k}} A^{\alpha,n}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha ds,$$

$u_n\left((j+1)2^{-k}\right) = u_n(j2^{-k}) + \int_0^{2^{-k}} A_n u_n(j2^{-k} + s)ds$ і

$\lim\limits_{\Psi_\infty} A_k^{\alpha,n}u_n(t) = A_n u_n(t)$, для $(\alpha, k) \in \varphi$,

маємо

$$\rho_{j+1} \le ||u_n(j2^{-k}) - T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha + \int_0^{2^{-k}} ||\left(A_n - A^{\alpha,n}\right)u_n(j2^{-k} + s)ds +$$

$$+ \int_0^{2^{-k}} ||A^{\alpha,n}u_n(j2^{-k} + s) - A^{\alpha,n}T_{i2^{-k}}^{\alpha,n}u_n^\alpha||ds \le$$

$$\le \rho_j + 2^{-k}\varepsilon + 2^k 2^n(\rho_j + 2^{-k}||q_0^0||) \le$$

$$\le \rho_j(1 + 2^{n-k}) + 2^{1-k}\varepsilon, \_\exists\varphi \in \Psi_\infty$$

задовольняється нерівністю $2^n||q_0^0|| < 2^k\varepsilon$.

Далі використовуючи індукцію, одержуємо

$$\rho_j \leq \rho_0 e^{r2^n} + 2re^{r2^n}\varepsilon \leq (||q_k^\alpha - q_0||2^{-n}||q_k^{\alpha_1} - q_0^0||)e^{r2^n} + 2re^{r2^n}\varepsilon,$$

при $0 \leq j2^{-k} \leq r$, отже маємо $\lim\limits_{\Psi_\infty} T_t^{\alpha,n} u_n^\alpha = u_n(t)$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} A_k^\alpha(\mathrm{I} - 2^{-n}A_k^\alpha)^{-1}q = A_k^\alpha q$ при $q \in D(A_k^\alpha) = \Omega \subset L^p(R^l, d^l x)$, для фіксованого α, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} ||T_{i2^{-k}}^{\alpha,n} u_n^\alpha - T_{i2^{-k}}^\alpha u_n^\alpha|| = 0$, отже $\{u_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ відносно компактна множина в $\Omega \subset L^p(R^l, d^l x)$.

При $s = i2^{-k}$, _$t = j2^{-k}$, _$s + t = (i + j)2^{-k} \in [0, r]$, одержуємо

$$||u(s+t) - T_t f|| \leq ||u(s+t) - u_n(s+t)|| + ||u_n(s+t) - T_{t+s}^{\alpha,n} u_n^\alpha|| +$$
$$+ ||T_{t+s}^{\alpha,n} u_n^\alpha - T_{t+s}^\alpha u_n^\alpha|| + ||T_{t+s}^\alpha u_n^\alpha - T_t f|| \leq$$
$$\leq ||T_s^\alpha u_n^\alpha - f|| + 3\varepsilon \leq ||u(s) - f|| + 6\varepsilon,$$

оскільки

$$||u(s) - T_s^\alpha u_n^\alpha|| \leq ||u(s) - u_n(s)|| + ||u_n(s) - T_s^{\alpha,n} u_n^\alpha|| + ||T_s^{\alpha,n} u_n^\alpha - T_s^\alpha u_n^\alpha|| \leq 3\varepsilon.$$

Внаслідок рівномірної неперервності $T_t f$ і $u(t)$, дійсно має місце нерівність

$||u(s+t) - T_t f|| \leq ||u(s) - f||$ при $f \in D(T_t)$, $s, t, s+t \in [0, r]$.

Тобто $\left\{\tilde{T}_t\right\}$ є напівгрупою стиску, але це призводить до протиріччя з максимальністю напівгрупи $\{T_t\}$, тобто одержали протиріччя.

Покажемо, що область $D(T_t)$ не міститься в довільній якій замкненій гіперплощині в $L^p(R^l, d^l x)$.

Нехай $D(T_t) \subset \{f \in L^p(R^l, d^l x) : \langle f, e\rangle = M\}$ при деяких $e \in L^p(R^l, d^l x)$ і $||e|| = 1$.

Нехай $S_t(f + e) = T_t f + e$ при $f \in D(T_t)$, тоді $\{S_t\}$ також напівгрупа стиску і область визначення S_t є множина $e \bigcup D(T_t)$, яка має порожній перетин з $D(T_t)$, отже

$$\tilde{T}_t f = \begin{cases} T_t f, f \in D(T_t) \\ S_t f, f \in e \bigcup D(T_t) \end{cases}$$

є розширенням $\{T_t\}$, але $\left\{\tilde{T}_t\right\}$ є напівгрупою стиску, тобто протиріччя з максимальністю $\{T_t\}$. Теорема 1 доведена. □

Теорема 2. *Замикання множини $D(A)$, де A є максимальним дисипативним оператором є випуклою в $L^p(R^l, d^l x)$ множиною.*

Доведення. Доводити будемо від супротивного. Нехай

$q, \Psi \in D(A)$ і $f = \mu q - (1 - \mu)\Psi$ при $0 < \mu < 1$.

Припустимо, що $f \notin [D(A)]$, тоді покладемо $q_\lambda = q - \lambda q_1$ при $q_1 \in Aq$,

Використовуючи твердження 8, маємо

$$\left\|(\mathrm{I} - \lambda A)^{-1} f - q\right\| = \left\|(\mathrm{I} - \lambda A)^{-1} f - (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1} q_\lambda\right\| \leq \|f - q_\lambda\|,$$

$\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}||f-q_\lambda|| = ||f-q||$, аналогічно $\overline{\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}}\,\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-\Psi\| \leq ||f-\Psi||$, оскільки $||q-\Psi|| \leq \overline{\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}}\,(\|q-(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}\,f\|+\|(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-\Psi\|) = ||q-f||+||f-\Psi|| = ||q-\Psi||$ маємо, що

$\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f = \sigma q-(1-\sigma)\Psi,\ \_\sigma\in[0,1]$ і

$\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f-q = ||f-q||$, тобто одержуємо, що $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f = f$, але це суперечить припущенню, що $f\notin[D(A)]$. Теорема 2 доведена. ☐

4. Основна теорема

Теорема 3. *(1) Максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і вона є породженою максимальним дисипативним оператором.*

(2) Якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Доведення. Твердження 1) є наслідком попередніх теорем і тверджень, дійсно локальний генератор $\{T_t\}$ A_0 щільно виражений в $D(T_t)$, максимальне дисипативне розширення A оператор A_0 породжує напівгрупу стиску $\{S_t\}$, тоді напівгрупа $\{S_t\}$ є розширенням напівгрупи $\{T_t\}$, але із максимальності $\{T_t\}$ одержуємо $\{S_t\}$=$\{T_t\}$. 1) доведено.

Твердження 2) доведемо від супротивного. Нехай оператор A породжує напівгрупу $\{T_t\}$ і $\{S_t\}$ максимальне розширення $\{T_t\}$. Припустимо супротивне $D(S_t)\supset D(T_t)$ і $D(S_t)\neq D(T_t)$, використаємо 1) генератор $\{S_t\}$ нехай $\tilde{A}$ є щільно визначеним в $D(S_t)$.

Внаслідок замкнутості $D(T_t)$ існує елемент $f\in D(\tilde{A})$ і $f\notin D(T_t)\subset L^p(R^l,d^lx)$, застосовуючи максимальну дисипативність A одержуємо, що існує

$q_\lambda = (\mathrm{I}-\lambda A)^{-1}f,\ \_\forall\lambda>0$ і $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}q_\lambda = q\in[D(A)]\subset L^p(R^l,d^lx)$.

Оскільки, $q_\lambda\in D(A)$, T_tq_λ слабо диференційована по t і $\omega-\lim\limits_{h\downarrow 0}A_hq_\lambda = Aq_\lambda$, і $Aq_\lambda = \frac{q_\lambda-f}{\lambda}$, отже

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\lambda}{h}\left\langle T_hq_\lambda-q_\lambda,(q_\lambda-f)\,|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle = ||q_\lambda-f||^p,$$

$$\left\langle S_hf-f,(q_\lambda-f)\,|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle = \left\langle S_hf-T_hq,(q_\lambda-f)\,|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle+$$
$$+\left\langle T_hq_\lambda-q,(q_\lambda-f)\,|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle++||q_\lambda-f||^p\geq\left\langle T_hq_\lambda-q_\lambda,(q_\lambda-f)\,|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle,$$

оскільки,

$$||T_hq_\lambda-S_hf|| = ||S_hq_\lambda-S_hf||\leq||q_\lambda-f||.$$

Тобто, маємо

$\lim\limits_{h\downarrow 0}\frac{\left\langle S_h f-f,(q_\lambda-f)|q_\lambda-f|^{p-2}\right\rangle}{h}\geq\frac{\|q_\lambda-f\|^p}{\lambda}$, спрямовуючи λ до нуля, одержуємо протиріччя

$$\lim_{h\downarrow 0}\left\langle\frac{S_h f-f}{h},(q_\lambda-f)\left|q_\lambda-f\right|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\left\langle\tilde{A}f,(q_\lambda-f)\left|q_\lambda-f\right|^{p-2}\right\rangle\to\left\langle\tilde{A}f,(q_\lambda-f)\left|q_\lambda-f\right|^{p-2}\right\rangle,$$

$\frac{||q_\lambda-f||^p}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\downarrow 0]{}\infty$. Теорема доведена. □

Наслідок 2. *Якщо область визначення $D(T_t)$ напівгрупа стиску $\{T_t\}$ містить відкриту множину Ω, тоді область визначення $D(A_0)$ локального генератора A_0 щільна в Ω, тобто $[\Omega\bigcap D(A_0)]=[\Omega]$.*

Доведення. Нехай $\{S_t\}$ максимальна напівгрупа стиску така що містить

напівгрупу $\{T_t\}$, отже локальний генератор $\tilde{A}_0$ напівгрупи $\{S_t\}$ щільно визначений в $D(S_t)$, отже $D(\tilde{A}_0)\bigcap\Omega$ щільна множина в $\Omega\subset L^p(R^l,d^lx)$, тобто $\tilde{A}_0=A_0$ в Ω наслідок доведений. □

5. Висновки

Одержано нові результати, щодо нелінійних максимальних напівгруп стиску в $L^p(R^l,d^lx)$- просторах, а саме, доведено, що будь-яка максимальна напівгрупа стиску $\{T_t\}$ має щільно визначений генератор і що вона породжена максимальним дисипативним оператором; крім того, якщо максимальний дисипативний оператор є однозначним, тоді напівгрупа породжена цим оператором є максимальною напівгрупою стиску.

Література

[1] Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces / V.Barbu. – Legden: Nordhoff International Publiching, 1976. – 52 p.

[2] Berlyiand A.G., Semenov Yu. A. On the L_p-theory of Schrodinger semigroups / A.G. Berlyiand, Yu.A. Semenov // Siberian Math. J. – 1990. – V.31. – P. 16 – 26.

[3] Brezis H., Pazy A. Semigroups of non-linear contractions on convex sets / H.Brezis, A. Pazy // J. Func. Anal. – 1970. –V. 6. – P. 237–281.

[4] Browder F.E. Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1965. – V. 53. – P. 1100 – 1103.

[5] Browder F.E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1965. – V. 54. – P. 1041 – 1044.

[6] Browder F.E. Nonlinear equations of evolution type and nonlinear accretive operators in Banach spaces / F.E. Browder // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V.73. – P. 867 – 874.

[7] Crandall M.G., Pazy A. Nonlinear semi-groups of contractions and dissipative sets / M.G. Crandall, A. Pazy // J. Func. Anal. – 1969. – V. 3. – P. 376 – 418.

[8] Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semi-Groups / E. Hille, R.Phillips. – Providence: Amer. Math. Society, 1957. – 720 p.

[9] Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.

[10] Kato T. Perturbation theory for linear operators / T. Kato. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980. – 578 p.

[11] Kato T. Non-linear semigroups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 508 – 520.

[12] Komura Y. Differentiability of nonlinear semigroups / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. –1969. – V. 21. – P. 375–402.

[13] Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.

[14] Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.

[15] Minty G. On the generalization of a direct method of the calculus of variations / G. Minty // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73, №3. – P. 315 – 321.

[16] Miyadera I. On perturbation theory for semi-groups of operators / I. Miyadera // Tohoku Math. J. – 1966. – V. 18. – P. 299 – 310.