Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 68–77.

Асимптотика розв'язку багатоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідній

М. Б. Віра

Ніжинський державний університет імені М. Гоголя

Анотація. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку багатоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженнями.

Ключові слова: Лінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, асимптотичний розв'язок, багатоточкова крайова задача.

An asymptotic solution of multi-pointed boundary-value problem for the linear singular perturbed system of differential equations with degenerations

M. Vira,

Nizhyn Mykola Gogol State University

Abstract. The algorithm of constructing of the asymptotic solution of multi-pointed boundary-value problem for the linear singular perturbed system of differential equations with degenerations is proposed.

Key words: Linear singular perturbed differential equations system, asymptotical solution, many points boundary value problem.

AMS Subject Classification: 34B05.

У даній статті розглянемо крайову задачу для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з багатоточковою крайовою умовою виду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i x(t_i,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [t_1; t_p]$; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малий параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ — $(n \times n)$-матриці, $d(\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори-стовпці, M_i, $i = \overline{1,p}$ — квадратні матриці зі сталими елементами $n-$го порядку; $t_i < t_{i+1}$, $i = \overline{1, p-1}$.

Крайові задачі типу (1),(2) для випадку $B_0(t) = E$, де E — одинична матриця, досліджувались у роботах [1-3]. При цьому в [1], [2] для побудови асимптотики їх розв'язків було використано метод регуляризації, а в [3] — метод примежових функцій.

Використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), здійсненого в [5], у роботі [4] авторами побудована асимптотика розв'язку двоточкової крайової задачі у випадку, коли гранична в'язка матриць має простий спектр.

У даній статті розглянемо питання про відшукання асимптотики розв'язку $x(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2), узагальнивши результати статті [4] на випадок багатоточкової крайової задачі.

Знову ж таки будемо припускати, що гранична в'язка матриць має на відрізку $[t_1; t_p]$ простий спектр, а саме: $n-1$ скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1(t), ..., \lambda - \lambda_{n-1}(t)$ і один нескінченний. Тоді [5, с.32] матриця $A_0(t)$ матиме $n-1$ власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ відносно матриці $B_0(t)$, що відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, а матриця $B_0(t)$ — один власний вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню. Якщо $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ — нулі матриць $(A_0 - \lambda_i B_0)^*$, а $\widetilde{\psi}(t)$ — нуль матриці $B_0^*(t)$, то їх можна визначити так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B_0\varphi_i, \psi_i) = 1, i = \overline{1, n-1}, \tag{4}$$

$$(A_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1. \tag{5}$$

Припустимо також виконання умови

$7^\circ \quad (B_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \neq 0, \forall t \in [t_1; t_p]$,

яка, як показано в [5], забезпечує невиродженість матриці $B(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$.

Розглянемо стійкий випадок, коли

8° $Re\lambda_i(t) < 0$, $i = \overline{1, n-1}, Re\xi_0(t) < 0$, $\forall t \in [t_1; t_p]$.

Виходячи зі структури загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь (1) з вироджуваною матрицею при похідній, встановленої в роботі [5], формальний розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді лінійної комбінації розв'язків відповідної однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x,$$

що відповідають скінченним та нескінченному елементарним дільникам:

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n-1}u_j(t,\varepsilon)c_j(\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\lambda_j\,(\tau,\varepsilon)d\tau)+$$

$$+v(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_1}^{t}\xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau)+\widetilde{v}(t,\varepsilon) \qquad (6),$$

де $u_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $v(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}(t,\varepsilon)$ - $n-$вимірні вектор-функції; $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, що зображаються розвиненнями:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t),i=\overline{1,n-1}, \qquad (7)$$

$$v(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t),\xi(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t), \qquad (8)$$

$$\widetilde{v}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(t), \qquad (9)$$

коефіцієнти яких визначаються за рекурентними формулами, наведеними в роботі [5]:

$$u_0^{(i)}(t)=\varphi_i(t),u_k^{(i)}(t)=H_i(t)b_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n-1}, \qquad (10)$$

де $H_i(t)=(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B_0(t))^-$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t)-\lambda_iB_0(t)$,

$$b_k^{(i)}(t)=\lambda_k^{(i)}(t)B_0(t)\varphi_i(t)+g_k^{(i)}(t),k=1,2,...,\ i=\overline{1,n-1},$$

$$g_k^{(i)}(t)=\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-l}\lambda_l^{(i)}B_ju_{k-l-j}^{(i)}+\lambda_i\sum_{j=1}^{k}B_ju_{k-j}^{(i)}-\sum_{l=1}^{k}A_lu_{k-l}^{(i)}+\sum_{l=0}^{k-h}B_l(u_{k-h-l}^{(i)})',$$

$$\lambda_k^{(i)}(t)=-(g_k^{(i)}(t),\psi_i(t)),k\ge1, \qquad (11),$$

$$v_0(t)=\widetilde{\varphi}(t),v_k(t)=G(t)a_k(t),k\ge1, \qquad (12),$$

де $G(t)$ — напівобернена матриця до матриці $B_0(t)$,

$$a_k(t)=\xi_{k-1}A_0(t)\widetilde{\varphi}+d_k,k=1,2,...,$$

$$d_k(t)=\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-1-j}\xi_iA_jv_{k-1-i-j}-\sum_{i=0}^{k-h-1}\sum_{j=0}^{k-h-1-i}\xi_iB_jv'_{k-h-1-i-j}-\sum_{i=1}^{k}B_iv_{k-i},k\ge1,$$

$$\xi_0(t)=(B_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}), \qquad (13)$$

$$\xi_k(t)=-(d_{k+1}(t),\widetilde{\psi}),k=2,3,..., \qquad (14)$$

$$\widetilde{v}_0(t)=-A_0^{-1}(t)f_0(t), \qquad (15)$$

$$\widetilde{v}_k(t)=A_0^{-1}(t)[\sum_{i=0}^{k-h}B_i(t)(\widetilde{v}_{k-h-i}(t))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t)-f_k(t)],k=1,2,.... \qquad (16)$$

Скалярні множники $c_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,...$ зображаються аналогічними розвиненнями за степенями ε:

$$c_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k c_k^{(i)}, i=\overline{1,n}, \tag{17}$$

коефіцієнти яких будуть визначатися із крайової умови (2). Для їх відшукання підставимо вектор (6) у крайову умову (2):

$$M_1\sum_{j=1}^{n-1}u_j(t_1,\varepsilon)c_j(\varepsilon)+M_1 v(t_1,\varepsilon)c_n(\varepsilon)+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}M_i u_j(t_i,\varepsilon)c_j(\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t_i}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau)+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}M_i v(t_i,\varepsilon)c_n(\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_1}^{t_i}\xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau)+\sum_{i=1}^{n}M_i\widetilde{v}(t_i,\varepsilon)=d(\varepsilon). \tag{18}$$

Взявши до уваги 8°, можна стверджувати, що доданки, які містять експоненти, є експоненціально малими. Знехтуємо цими доданками і замість (18) будемо розглядати рівняння

$$M_1\sum_{j=1}^{n-1}u_j(t_1;\varepsilon)c_j(\varepsilon)+M_1 v(t_1;\varepsilon)c_n(\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}M_i\widetilde{v}(t_i;\varepsilon)=d(\varepsilon). \tag{19}$$

Прирівнявши в (19) коефіцієнти при однакових степенях малого параметра і взявши до уваги розвинення (7-9), дістанемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $c_k^{(j)}$, $k=0,1,...$, $j=\overline{1,n}$:

$$M_1\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}u_l^{(j)}(t_1)c_{k-l}^{(j)}+M_1\sum_{l=0}^{k}v_l(t_1)c_{k-l}^{(n)}+M_1\widetilde{v}_k(t_1)=d_k-\sum_{i=2}^{n}M_i\widetilde{v}_k(t_i),$$
$$k=0,1,.... \tag{20}$$

Підставивши в (20) вирази (10), (12), (16) і ввівши позначення

$$c_k=col(c_k^{(1)};c_k^{(2)};...;c_k^{(n)}), k=0,1,...,$$
$$U_0(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t);...;\varphi_{n-1}(t),\widetilde{\varphi}(t)],$$
$$U_k(t)=[H_1(t)b_k^{(1)}(t);H_2(t)b_k^{(2)}(t);...;H_{n-1}(t)b_k^{(n-1)}(t);G(t)a_k(t)], k=1,2,...,$$

запишемо систему у векторно-матричному вигляді

$$M_1U_0(t_1)c_k+M_1\sum_{i=1}^{k}u_i(t_1)c_{k-i}+M_1\widetilde{v}_k(t_1)=d_k-\sum_{i=2}^{n}M_i\widetilde{v}_k(t_i), k=0,1,... \tag{21}$$

Нехай виконується умова

9° $\det M_1 \neq 0$.

Оскільки $U_0(t_1)$ є неособливою матрицею завдяки лінійній незалежності власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\widetilde{\varphi}(t)$, то із рівняння (21) дістанемо такі формули для визначення векторів c_k:

$$c_0 = U_0^{-1} M_1^{-1} [d_0 - \sum_{i=2}^{n} M_i \widetilde{v}_0(t_i)] - U_0^{-1}(t_1)\widetilde{v}_0(t_1), \tag{22}$$

$$c_k = U_0^{-1} M_1^{-1} [d_k - \sum_{i=2}^{n} M_i \widetilde{v}_k(t_i)] - U_0^{-1} \sum_{i=1}^{k} U_i(t_1) c_{k-i} - U_0^{-1} \widetilde{v}_k(t_1),$$
$$k = 1, 2, ... \tag{23}$$

Визначивши таким чином скаляри $c_k^{(i)}$ і підставивши в (6), дістанемо формальний розв'язок багатоточкової крайової задачі (1), (2). Покажемо, що він має асимптотичний характер. Для цього введемо до розгляду m-наближення, обірвавши відповідні формальні ряди на m-у члені:

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp(\varepsilon^{-h} \int_{t_1}^{t} \lambda_m^{(i)}(\tau,\varepsilon) d\tau) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k} v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\xi_m(\tau,\varepsilon)}) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t), \tag{24}$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1}, \tag{25}$$

$$\xi_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \xi_k(t). \tag{26}$$

За побудовою вектор $x_m(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (1) з точністю до $O(\varepsilon^m)$ рівномірно по $t \in [t_1; t_p]$, а крайову умову (2) — з точністю до $O(\varepsilon^{m+1})$, тобто

$$A(t,\varepsilon) x_m(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t,\varepsilon) \frac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon^m a(t,\varepsilon); \tag{27}$$

$$d(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{p} M_i x_m(t_i,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon), \tag{28}$$

де $a(t,\varepsilon)$ — вектор-функція, рівномірно обмежена на $[t_1; t_p]$ при $\varepsilon \to 0$, $b(\varepsilon)$ — обмежений n-вимірний вектор.

Розв'язок крайової задачі $x(t,\varepsilon)$ подамо у вигляді суми вектора m-наближення $x_m(t,\varepsilon)$ та вектора нев'язки $y_m(t,\varepsilon)$. Згідно з (27), (28) вектор $y_m(t,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^m a(t,\varepsilon); \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i y_m(t_i,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon). \tag{30}$$

Оскільки виконується умова 7° і рівність $\det B(t,\varepsilon) = \varepsilon(B_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) + O(\varepsilon^2)$, то обернену матрицю $B^{-1}(t,\varepsilon)$ можна подати у вигляді

$$B^{-1}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}Q(t,\varepsilon),$$

де $Q(t,\varepsilon)$ — деяка рівномірно обмежена на $[t_1;t_p]$ квадратна матриця n-го порядку. Тому помноживши систему (29) зліва на $\varepsilon^{-h-1}Q(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\frac{dy_m}{dt} = \varepsilon^{-h-1}\widetilde{A}(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m-h-1}\widetilde{a}(t,\varepsilon), \tag{31}$$

де

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon), \widetilde{a}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)a(t,\varepsilon).$$

Введемо до розгляду відповідну однорідну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon^{-h-1}\widetilde{A}(t,\varepsilon)x \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i x(t_i,\varepsilon) = 0. \tag{33}$$

Згідно з [5], за виконання умови 8° фундаментальна матриця однорідної системи (32) має вигляд

$$X(t,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau),$$

де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),...,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon),\varepsilon^{-1}\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)\},$$

$$U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k(t),$$

$$U_k(t) = [u_k^{(1)}(t),...,u_k^{(n-1)}(t),v_k(t)], k = 0,1,....$$

Тоді загальний розв'язок системи (31) подамо у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)c(\varepsilon) + \int_{t_1}^{t} X(t,\varepsilon)X^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau =$$

$$= (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)c(\varepsilon)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{34}$$

де

$$q(t,\varepsilon)=\varepsilon^{m-h-1}\widetilde{a}(t,\varepsilon).$$

Підставивши (34) у крайову умову (30), дістанемо таке рівняння для визначення вектора $c(\varepsilon)$:

$$[M_1U_m(t_1,\varepsilon)+\sum_{i=2}^{p}(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t_i}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)+$$
$$+O(\varepsilon^{m-h-1})]c(\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon)-\sum_{i=2}^{p}M_i\int_{t_1}^{t_i}(U_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times$$
$$\times(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{35}$$

Оскільки згідно з умовою 8°

$$[\sum_{i=1}^{p}(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t_i}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)]=$$
$$=M_1U_m(t_1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}),$$

а матриця $M_1U_m(t_1,\varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon>0$ завдяки неособливості матриці $M_1U_0(t_1)$, то рівняння (35) однозначно розв'язне і з нього дістанемо вектор $c(\varepsilon)$:

$$c(\varepsilon)=[M_1U_m(t_1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})]^{-1}\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon)-$$
$$-[M_1U_m(t_1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})]^{-1}\sum_{i=2}^{p}M_i\int_{t_1}^{t_i}(U_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\times$$
$$\times\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{36}$$

Підставивши (36) в (34), дістанемо єдиний розв'язок крайової задачі (31), (30) у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon)=s(\varepsilon)+\int_{t_1}^{t_p}G(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{37}$$

в якому перший доданок являє собою розв'язок напіводнорідної крайової задачі (32), (30), а другий — розв'язок крайової задачі (31), (33), $G(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна однорідної крайової задачі (32), (33). Зокрема,

$$s(\varepsilon)=[M_1U_m(t_1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})]^{-1}\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{38}$$

$$G(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} -(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)\times \\ \times([M_1U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m-h-1}))\sum_{i=2}^{p}\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)\times \\ \times(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})), \\ \text{якщо}\quad t_1\le t<\tau\le t_2\le\ldots\le t_p, \\ (U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))-(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)([M_1U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m-h-1}))\times \\ \times\sum_{i=2}^{p}\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}))\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1})), \\ \text{якщо}\quad t_1\le\tau\le t\le t_2\le\ldots\le t_p, \end{cases} \tag{39}$$

де $\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)$ — характеристична функція відрізка $[t_1;t_i]$,

$$\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\quad \tau\in[t_1;t_i],\\ 0,\ \text{якщо}\quad \tau\notin[t_1;t_i].\end{cases}$$

Перейшовши в рівності (37) до оцінок за нормою, маємо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\|\le\|s(\varepsilon)\|+\int_{t_1}^{t_p}\|G(t,\tau,\varepsilon)\|\cdot\|q(\tau,\varepsilon)\|d\tau.$$

З неособливості матриці $M_1U_0(t_1)$ випливає існування та обмеженість матриці $[M_1U_m(t_1;\varepsilon)]^{-1}$. Із умови стійкості 8° випливає також обмеженість при досить малих $\varepsilon>0$ експоненціальних виразів, які містяться в (38), (39):

$$\|\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)\|\le c_1,$$

$$\|\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\|\le c_i,\text{якщо}\,\tau\le t_i, i=\overline{2,p},$$

$$\|\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\tau}^{t}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\| \leq c_{p+1}, \text{якщо}\, \tau \leq t,$$

де c_i, $i = \overline{1, p+1}$ — деякі сталі, що не залежать від ε.

Враховуючи обмеженість усіх матричних і векторних функцій, які входять у вирази (38), (39), дістанемо оцінку для вектора нев'язки

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h-1}c,$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε.

Отже, за виконання накладених вище умов крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ такий, що

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h-1}c.$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо M_i, $i = \overline{1,p}$ — квадратні матриці n-го порядку і виконуються умови $1^\circ - 9^\circ$, то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}u_j^{(i)}(t)c_{k-j}^{(i)}\exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\lambda_m^{(i)}(\tau,\varepsilon)d\tau)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}v_j(t)c_{k-j}^{(n)}\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{\xi_m(\tau,\varepsilon)}) + \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(t) + O(\varepsilon^{m-h-1}),$$

де $u_k^{(i)}(t), i = \overline{1,n-1}, v_k(t), \widetilde{v}_k(t)$ — n-вимірні вектор-функції, що визначаються рекурентними формулами (10), (12), (15), (16), $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n-1}, \xi_m(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображаються розвиненнями (25), (26), коефіцієнти яких знаходяться за формулами (11), (13), (14), $c_k^{(i)}, k = \overline{0,m}, i = \overline{1,n}$ — сталі множники, які визначаються за формулами (22), (23).

Література

[1] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 398 с.

[2] *Коняев Ю.А.* Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущённых начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.А. Коняев // Дифференц. уравнения. — 1984. — 20, №11. — С. 1999-2003.

[3] *Каранджулов Л.И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущённых дифференциальных систем / Л.И. Каранджулов // Докл. АН Украины. — 1996. — №7. — С.1-5.

[4] *Яковец В.П.* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений / В.П. Яковец, М.Б. Вира // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна-2008. Воронеж:ВорГУ. – 2008. – С.319-332.

[5] *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

References

[1] Lomov S.A. *Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij (Introduction to the general theory of singular perturbations)* - 1981, 398 p.

[2] Konjaev Ju.A. *Differencial'nye uravnenija (differential Equations)* - 1984, 11, pp. 1999-2003.

[3] Karandzhulov L.I. *Dokl. AN Ukrainy (Ukraine NAS Reports)* - 1996, 7, pp. 1-5;

[4] Yakovets V.P. *Trudy Voronezhskoj zimnej matematicheskoj shkoly S.G. Krejna-2008. (Proceedings of the Voronezh Crane Winter Mathematical School-2008.)* - 2008, pp. 319-332.

[5] A.M. Samoylenko, M.I. Shkil, V.P. Yakovets *Linijni systemy dyferencial'nyh rivnjan' z vyrodzhennjamy (Linear systems of differential equations with degeneracy)* - 2000, 294 p.